

Übungen zur Integralrechnung – Lösungen Serie 3

1. Für die Ableitungen erhalten wir mittels **Kettenregel**:

$$[\sin(4x)]' = \cos(4x) \cdot 4 = \underline{\underline{4\cos(4x)}}$$

$$\left[\frac{2}{3x-1}\right]' = [2 \cdot (3x-1)^{-1}]' = 2 \cdot (-1) \cdot (3x-1)^{-2} \cdot 3 = -\frac{6}{\underline{\underline{(3x-1)^2}}}$$

$$[(2x-1)^6]' = 6 \cdot (2x-1)^5 \cdot 2 = \underline{\underline{12(2x-1)^5}}$$

$$[\cos(x^2)]' = -\sin(x^2) \cdot 2x = \underline{\underline{-2x \sin(x^2)}}$$

$$\left[\frac{3}{(2x^2-1)^2}\right]' = [3 \cdot (2x^2-1)^{-2}]' = 3 \cdot (-2) \cdot (2x^2-1)^{-3} \cdot 4x = -\frac{24x}{\underline{\underline{(2x^2-1)^3}}}$$

$$[\cos^2 x]' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = \underline{\underline{-2 \sin x \cos x}}$$

$$[e^{-2x^2}]' = e^{-2x^2} \cdot (-4x) = \underline{\underline{-4x e^{-2x^2}}}$$

$$[\sqrt{x^2+1}]' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}}$$

2. Mittels **inverser Kettenregel** lassen sich diese Funktionen integrieren:

$$(a) \int_{\pi/8}^{\pi/4} 2 \cos(2x) dx = \sin(2x) \Big|_{\pi/8}^{\pi/4} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}}$$

$$(b) \int_0^{3\pi/8} 6 \sin(2x) dx = -3 \cos(2x) \Big|_0^{3\pi/8} = -3 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} - \cos 0 \right) = -3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{2}+6}{2}}}$$

$$(c) \int_0^1 x(x^2-1)^2 dx = \frac{1}{6} \cdot (x^2-1)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \cdot (0 - (-1)) = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$(d) \int_{-1}^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{2} \cdot (e^{-2} - e^2) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} = \underline{\underline{\frac{e^4-1}{2e^2}}}$$

$$(e) \int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{2} \cdot (e^{-1} - e^{-1}) = \underline{\underline{0}}$$

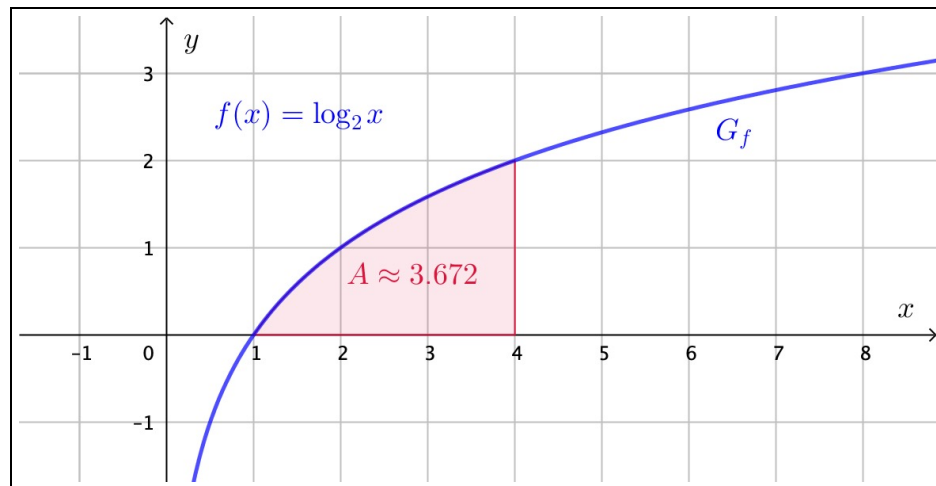
$$(f) \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{x}{4} dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{4} dx = 8 \sin \frac{x}{4} \Big|_0^{\pi} = 8 \cdot \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$$

Anmerkung zu (e): Es muss sich 0 ergeben, denn unter dem Integral wird die ungerade Funktion x mit der geraden Funktion e^{-x^2} multipliziert. Ein solches Produkt ergibt stets eine ungerade Funktion. Das Integral darüber verschwindet bei zu 0 symmetrischen Integrationsgrenzen.

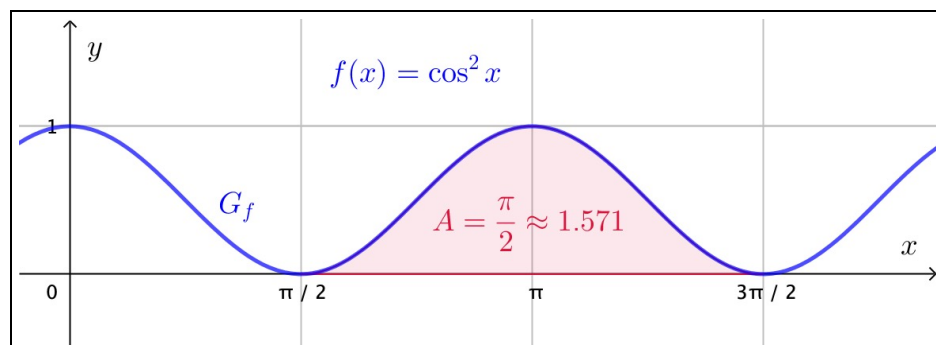
3. (a) Im Integrationsintervall $[1; 4]$ gibt es nur positive Zahlen, sodass uns der Betrag in der Angabe zur allgemeinen Logarithmusfunktion nicht zu kümmern braucht. Mit $a = 2$ finden wir:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \log_2 x \, dx &= \left[x (\log_2 x - \log_2 e) \right]_1^4 = 4(\log_2 4 - \log_2 e) - 1(\log_2 1 - \log_2 e) \\ &= 4 \cdot 2 - 4 \log_2 e - 0 + \log_2 e = \underline{\underline{8 - 3 \log_2 e \approx 3.672}}\end{aligned}$$

Hier noch die Grafik zu dieser Aufgabe:



- (b) Schauen wir hier zuerst die Grafik an:



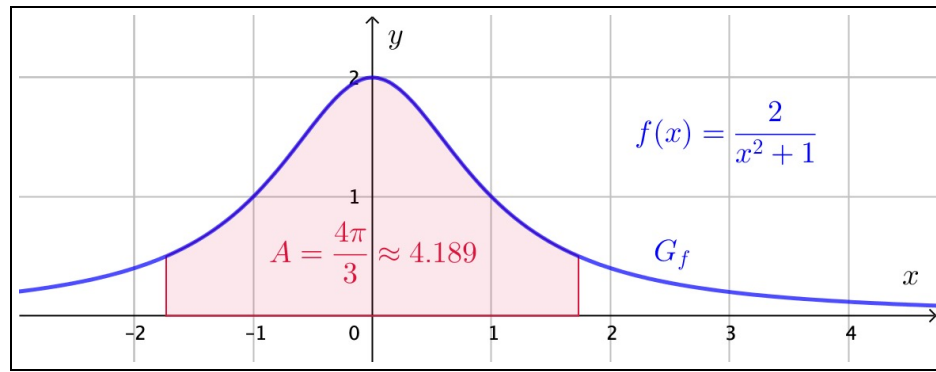
Nach Betrachtung dieses Bildes könnte man auf die gute Idee kommen statt von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$ besser von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ zu integrieren und dabei die Achsensymmetrie der Funktion auszunutzen. Das sieht dann folgendermassen aus:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2 x \, dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 0 - \sin 0 \cos 0 = \frac{\pi}{2} + 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} \approx 1.571}}\end{aligned}$$

Ich zeige die Rechnung aber auch noch direkt mit den vorgegebenen Integrationsgrenzen vor:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2 x \, dx &= \left[\frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3\pi}{2} + (-1) \cdot 0 - \frac{\pi}{2} - 1 \cdot 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot \pi = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} \approx 1.571}}\end{aligned}$$

Solange man weiss, wo welche Werte der Sinus- und der Cosinusfunktion sitzen, geht auch dieses Vorgehen ohne Probleme.



(c) In der Grafik oben sehen wir, dass die Funktion gerade ist, ihr Graph also symmetrisch zur y -Achse verläuft, sodass wir diese Symmetrie aufgrund der symmetrischen Integrationsgrenzen ausnützen dürfen. Die Stammfunktion ist offenbar der Arcustangens:

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{x^2 + 1} dx &= 4 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx = 4 \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= 4 (\arctan \sqrt{3} - \arctan 0) = 4 \left(\frac{\pi}{3} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} \approx 4.189}} \end{aligned}$$

4. Für die sechs Integrale finden wir:

$$(a) \quad \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \int_{\pi/6}^{\pi/3} 4 \sin x \cos x dx &= 2 \cdot \sin^2 x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = 2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder: } \int_{\pi/6}^{\pi/3} 4 \sin x \cos x dx &= -2 \cdot \cos^2 x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = -2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{6} \right) \\ &= -2 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) = -2 \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

$$(c) \quad \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\ln(1^2 + 1) - \ln(0^2 + 1)) = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln 2}}$$

$$(d) \quad \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} (\ln(1^2 + 1) - \ln((-1)^2 + 1)) = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 2) = \underline{\underline{0}}$$

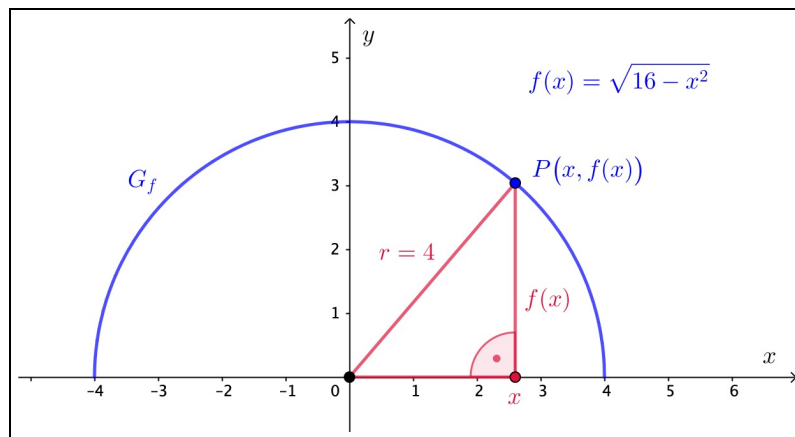
$$(e) \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

$$(f) \quad \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \sqrt{x^2 - 1} \Big|_1^2 = \sqrt{2^2 - 1} - \sqrt{1^2 - 1} = \sqrt{3} - 0 = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

Anmerkung zu (c) und (d): Der Graph zu $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ist punktsymmetrisch, denn es wird eine ungerade Funktion (x) durch eine gerade Funktion ($x^2 + 1$) geteilt, was insgesamt eine ungerade Funktion ergibt. Somit muss sich bei (d) wegen der zu 0 symmetrischen Integrationsgrenzen 0 ergeben (vgl. Aufgabe 2.(e)).

5. Die Formel für die Kreisfläche

(a) Mit GeoGebra ergibt sich für den Funktionsgraphen:



Nur Stellen $x \in [-4; 4]$ können eingesetzt werden, denn sonst wird $16 - x^2$ unter der Wurzel negativ. Bildet der G_f wirklich einen exakten Halbkreis um den Ursprung $(0,0)$? Dann muss der Abstand zum Ursprung für alle Punkte $P \in G_f$ derselbe sein. Die x -Koordinate eines solchen Punktes ist x , die y -Koordinate ist $f(x)$. Mit dem Satz des Pythagoras im oben eingezeichneten Dreieck folgt:

$$r = \sqrt{x^2 + (f(x))^2} = \sqrt{x^2 + \sqrt{16 - x^2}^2} = \sqrt{x^2 + 16 - x^2} = \sqrt{16} = 4$$

Tatsächlich: Für alle Punkte $P \in G_f$ ergibt sich der Abstand $r = \sqrt{16} = 4$ zu $(0,0)$.

Umgekehrt hätten wir uns auch fragen können, wie denn die Halbkreisfunktion lauten muss. Aus der Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$ für den Kreis mit Radius r um den Ursprung folgt dafür direkt:

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

Wollen wir diesen Ausdruck als Funktion von x auffassen, so müssen wir uns für ein Vorzeichen vor der Wurzel entscheiden, denn Funktionen müssen eindeutig sein. Wählen wir $f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$, so ergibt sich der Halbkreis oberhalb der x -Achse.

(b) Bestimmen wir nun also die Fläche des Halbkreises oberhalb der x -Achse. Im Skriptanhang A finden wir für die Stammfunktion zur Halbkreisfunktion:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^+$$

Bei uns ist $a = r = 4$. Der Halbkreis liegt symmetrisch zur y -Achse, was uns beim Integrieren hilft:

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx &= 2 \cdot \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx = 2 \cdot \left[\frac{16}{2} \arcsin \frac{x}{4} + \frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2} \right] \Big|_0^4 \\ &= 2 \cdot \left(8 \arcsin 1 + 2 \cdot \sqrt{16 - 16} - 8 \arcsin 0 - 0 \sqrt{16 - 0} \right) \\ &= 2 \cdot \left(8 \cdot \frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right) = \frac{2 \cdot 8\pi}{2} = \underline{\underline{8\pi}} \end{aligned}$$

(c) Allgemein finden wir für die Halbkreisfläche:

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \sqrt{16 - x^2} dx &= 2 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \cdot \left[\frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} \right] \Big|_0^r \\ &= 2 \cdot \left(\frac{r^2}{2} \arcsin 1 + 2 \cdot \sqrt{r^2 - r^2} - \frac{r^2}{2} \arcsin 0 - 0 \sqrt{r^2 - 0} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right) = \frac{2 \cdot r^2 \pi}{2 \cdot 2} = \frac{\pi r^2}{2} \end{aligned}$$

Und damit folgt für die doppelt so grosse Kreisfläche: $A = \pi r^2$.

6. Wir leiten die Stammfunktion ab und finden:

$$[a \ln |x - 4| + b \ln |x| + C]' = \frac{a}{x - 4} + \frac{b}{x}$$

Das sieht bereits vielversprechend aus. Wir machen gleichnamig und sortieren dann im Zähler nach dem konstanten und dem linearen Glied in x :

$$\frac{a}{x - 4} + \frac{b}{x} = \frac{ax}{x(x - 4)} + \frac{b(x - 4)}{x(x - 4)} = \frac{ax + bx - 4b}{x(x - 4)} = \frac{(a + b)x - 4b}{x(x - 4)}$$

Im Nenner stimmt alles bereits. Gemäss Aufgabenstellung muss das lineare Glied im Zähler $-x$ und das konstante Glied 12 sein. Daraus folgern wir:

$$-4b \stackrel{!}{=} 12 \Rightarrow \underline{b = -3} \Rightarrow (a + b)x = (a - 3)x \stackrel{!}{=} -x \Rightarrow a - 3 = -1 \Rightarrow \underline{a = 2}$$

Somit lautet unsere vollständige Stammfunktion:

$$\int \frac{12 - x}{x(x - 4)} dx = \underline{\underline{2 \ln |x - 4| - 3 \ln |x| + C}}$$

Überprüfen wir dieses Resultat nochmals durch Ableiten:

$$[2 \ln |x - 4| - 3 \ln |x| + C]' = \frac{2}{x - 4} - \frac{3}{x} = \frac{2x - 3(x - 4)}{x(x - 4)} = \frac{2x - 3x + 12}{x(x - 4)} = \frac{12 - x}{x(x - 4)} \quad \checkmark$$