

SERIE 3: Die inverse Kettenregel

Klasse 155c / AGe

1. Leite ab, indem du die **Kettenregel** verwendest:

$$\begin{array}{cccc} [\sin(4x)]' & \left[\frac{2}{3x-1} \right]' & [(2x-1)^6]' & [\cos(x^2)]' \\ \left[\frac{3}{(2x^2-1)^2} \right]' & [\cos^2 x]' & [e^{-2x^2}]' & [\sqrt{x^2+1}]' \end{array}$$

2. Erkenne innere und äussere Ableitungen um das Integral zu berechnen:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_{\pi/8}^{\pi/4} 2 \cos(2x) \, dx & \text{(b)} \int_0^{3\pi/8} 6 \sin(2x) \, dx & \text{(c)} \int_0^1 x(x^2-1)^2 \, dx \\ \text{(d)} \int_{-1}^1 e^{-2x} \, dx & \text{(e)} \int_{-1}^1 x e^{-x^2} \, dx & \text{(f)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{x}{4} \, dx \end{array}$$

3. Im Anhang A des Integralskripts findest du einen Katalog von Stammfunktionen zu verschiedenen gängigen Funktionen. Manchmal handelt es sich dabei um relativ komplizierte Ausdrücke, weshalb wir uns nur die einfachsten davon merken wollen (*).

Berechne nun die folgenden Integrale und lasse dir jeweils von GeoGebra aufzeichnen, wie die Graphen der Funktionen aussehen, über die integriert wird.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_1^4 \log_2 x \, dx & \text{(b)} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2 x \, dx & \text{(c)} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{x^2+1} \, dx \end{array}$$

4. Berechne (zum Teil unter Verwendung von Anhang A!):

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos(x^2) \, dx & \text{(b)} \int_{\pi/6}^{\pi/3} 4 \sin x \cos x \, dx & \text{(c)} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx \\ \text{(d)} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx & \text{(e)} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} \, dx & \text{(f)} \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \, dx \end{array}$$

5. Die Formel für die Kreisfläche

- Lasse dir von GeoGebra den G_f zu $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ aufzeichnen.
Weshalb muss der G_f genau einem Halbkreis mit Radius 4 entsprechen? Anders gefragt: Weshalb beschreibt die Funktion $f(x)$ einen Halbkreis?
- Verwende eine Stammfunktion aus dem Anhang A des Skripts, um die Fläche zwischen dem G_f und der x -Achse zu bestimmen.
- Zeige nun allgemein, dass der Kreis mit Radius r die Fläche $A = \pi r^2$ hat.

6. Zeige, dass die Stammfunktion rechts zum unbestimmten Integral links passt, und bestimme die fehlenden Parameter a und b :

$$\int \frac{12-x}{x(x-4)} \, dx = a \ln|x-4| + b \ln|x| + C$$