

Übungen zur Integralrechnung – Lösungen Serie 4

1. Die Berechnung der ersten paar Integrale zeige ich ganz explizit mit Grenzwertbildung vor. Wenn man damit etwas Routine hat, darf man die Notation auch gerne etwas vereinfachen, solange man immer im Hinterkopf hat, dass es sich eigentlich um eine Grenzwertbildung handelt. Das siehst du bei der Lösung den Integralen in (c), (d) und (h):

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\int_a^{-1} \frac{1}{x^2} dx \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_a^{-1} \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{a} \right) = 1 + 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$(b) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_0^b e^{-x} dx \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-b} + e^0 \right) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

$$(c) \quad \int_1^{\infty} \frac{2}{x^3} dx = -\frac{1}{x^2} \Big|_1^{\infty} = -0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

$$(d) \quad \int_0^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^{16} = 2(4 - 0) = \underline{\underline{8}}$$

$$(e) \quad \int_2^{11} \frac{1}{x-2} dx = \lim_{a \rightarrow 2} \left(\int_a^{11} \frac{1}{x-2} dx \right) = \lim_{a \rightarrow 2} \left(\ln(x-2) \Big|_a^{11} \right) = \lim_{a \rightarrow 2} (\ln 9 - \ln(a-2)) \\ = \ln 9 - (-\infty) = \infty \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{Integral ist nicht definiert!}}}$$

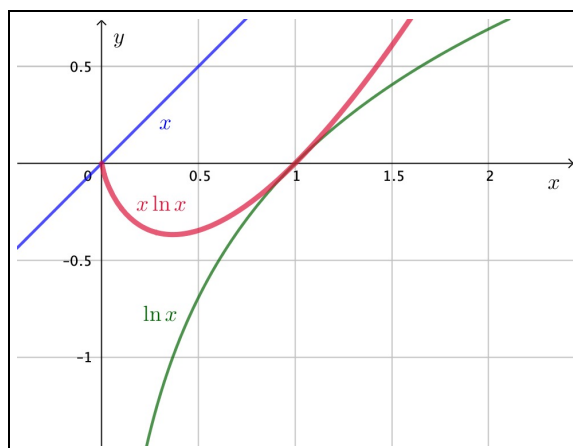
$$(f) \quad \int_0^1 \ln x dx = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\int_a^1 \ln x dx \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(x(\ln x - 1) \Big|_a^1 \right) = 1 \cdot (\ln 1 - 1) - \lim_{a \rightarrow 0} (a(\ln a - 1)) \\ = 1(0 - 1) - \lim_{a \rightarrow 0} (a \ln a) + \lim_{a \rightarrow 0} a = -1 - 0 + 0 = \underline{\underline{-1}} \quad \text{siehe Anmerkung!}$$

$$(g) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{weil } x e^{-x^2} \text{ eine ungerade Funktion ist (Punktsymmetrie!)}$$

$$(h) \quad \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Anmerkung zu (f): Der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow 0} (a \ln a)$ ist nicht ganz trivial zu ermitteln. Zwar geht der Vorfaktor a für $\lim_{a \rightarrow 0}$ schon gegen 0, aber gleichzeitig geht $\ln a$ gegen $-\infty$! Welche Richtung dominiert nun? ergibt sich 0 oder $-\infty$ oder ein Grenzwert irgendwo dazwischen?

Hier hilft GeoGebra, wo man sich den Graphen von $x \ln x$ vor Augen führen kann und ersichtlich ist, dass die Tendenz gegen 0 offenbar dominiert, sodass $\lim_{a \rightarrow 0} (a \ln a) = 0$ ist:

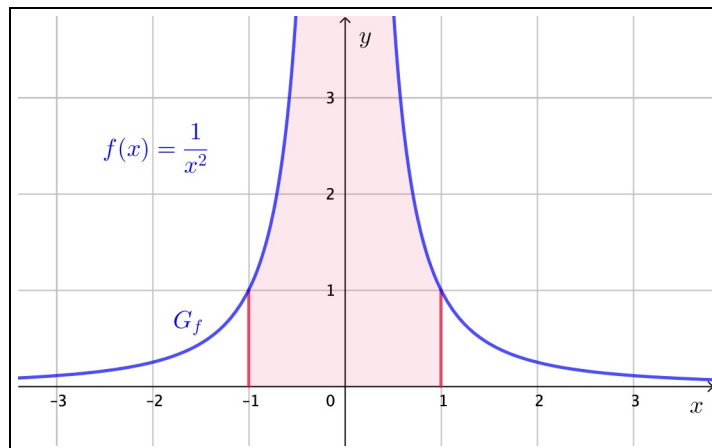


Selbstverständlich sollte die Mathematik in der Lage sein derartige Grenzwertfragen analytisch und ohne Betrachtung von Funktionsgraphen zu beantworten. Damit wollen wir uns hier aber nicht beschäftigen.

2. (a) Auf herkömmliche Weise berechnen wir für dieses Integral:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -(1 - (-1)) = \underline{\underline{-2}}$$

- (b) Hier der Graph zur inversen Quadratfunktion:



Die Problematik besteht wohl darin, dass obiges Integral über die Polstelle $x = 0$ von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ hinweg geht ohne diesen Umstand zu berücksichtigen.

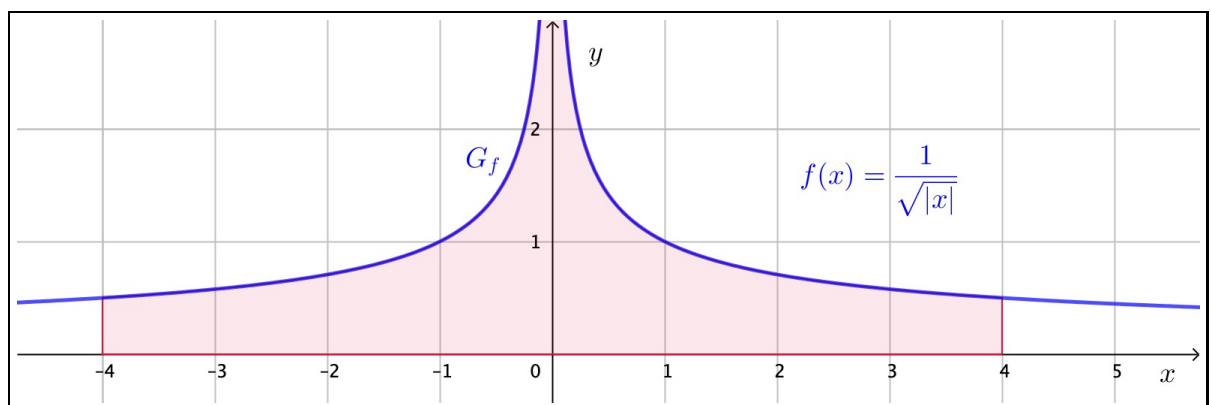
Auf jeden Fall sollte für dieses Integral keine negative Zahl herauskommen, denn die dazu gehörende Fläche liegt eindeutig oberhalb der x -Achse.

- (c) Um dieser Problematik Rechnung zu tragen, sollten wir die beiden Teilflächen wohl separat integrieren. Aufgrund der Achsensymmetrie notieren wir:

$$2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = 2 \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \left(\int_a^1 \frac{1}{x^2} dx \right) = 2 \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \Big|_a^1 \right) = 2 \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{a} \right) = 2(-1 + \infty) = \infty$$

Folglich ist die Fläche unendlich gross und das Integral existiert nicht!

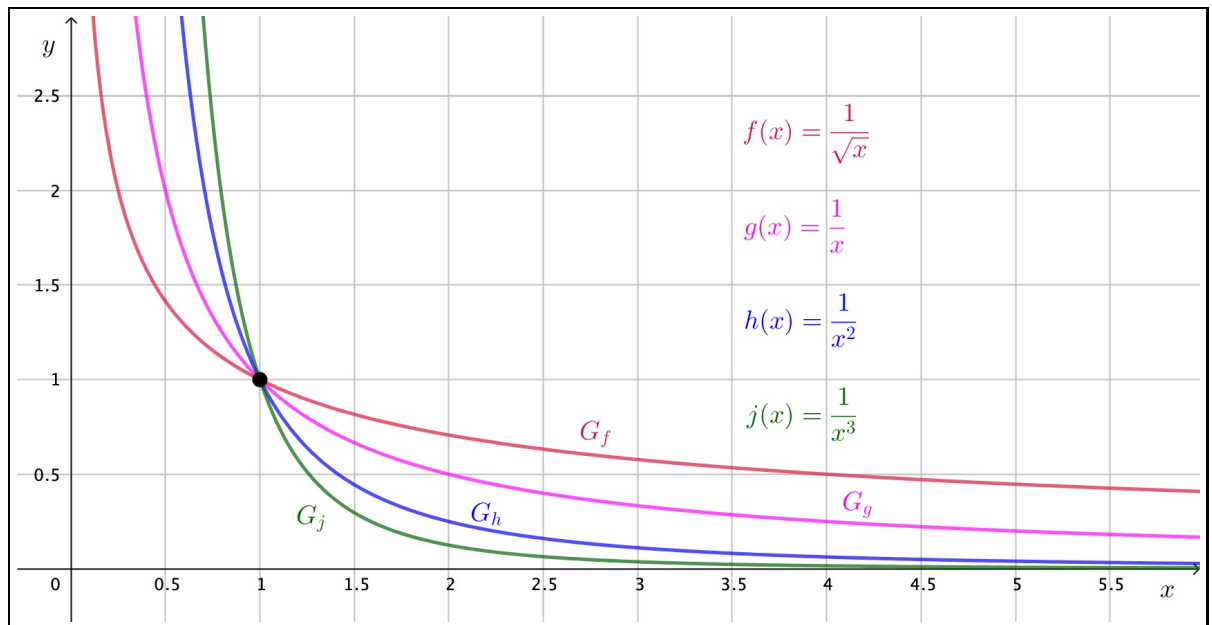
- (d) Die Betragsstriche sorgen dafür, dass unter der Wurzel keine negativen Zahlen stehen. Dadurch wird die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ aber auch gerade. Ihr Graph verläuft symmetrisch zur y -Achse:



Dank der Achsensymmetrie können wir von $x = 0$ bis $x = 4$ integrieren und danach verdoppeln. Dadurch werden aber auch die Betragsstriche überflüssig, denn in diesem Bereich sind alle Stellen x positiv:

$$A = 2 \cdot \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot 2\sqrt{x} \Big|_0^4 = 4 \cdot (2 - 0) = \underline{\underline{8}}$$

3. (a) Hier ein paar Graphen zu inversen Potenzfunktionen mit verschiedenen Exponenten n :



Je höher die Potenz im Nenner, desto rascher schmiegt sich der Graph für $x \rightarrow \infty$ der x -Achse an und umso eher könnte die Fläche darunter endlich sein.

- (b) Ganz konkret versuchen wir es zuerst mit den vorgeschlagenen Exponenten:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_1^{\infty} = 2(\infty - 1) = \infty \Rightarrow \text{divergent!}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{\infty} = \ln \infty - \ln 1 = \infty - 0 = \infty \Rightarrow \text{divergent!}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{konvergent!}$$

Tatsächlich scheint es da einen Grenzfall zu geben: Bei $\frac{1}{x}$ versagt die herkömmliche Regel für die Integration von Potenzfunktionen. Stattdessen lautet die Stammfunktion $\ln x$. Und diese Stammfunktion wächst für $x \rightarrow \infty$ immer noch ins Unendliche an.

Sobald die Nennerpotenz grösser als 1 ist, wird sich eine Stammfunktion ergeben, die selber eine inverse Potenzfunktion, deren Funktionswert für $x \rightarrow \infty$ den Grenzwert 0 hat, sodass das Integral existiert.

Zeigen wir dies ganz formal. Es sei $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_1^b x^{-1-\varepsilon} dx \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-\varepsilon} \cdot x^{-\varepsilon} \Big|_1^b \right) \\ &= \frac{1}{-\varepsilon} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{\varepsilon}} \Big|_1^b \right) = \frac{1}{-\varepsilon} \cdot (0 - 1) = \frac{1}{\varepsilon} < \infty \end{aligned}$$

Dabei habe ich verwendet, dass $\lim_{b \rightarrow +\infty} x^{\varepsilon} = \infty$ ist. Das trifft für $\varepsilon > 0$ stets zu, denn jeder nicht-ganzzahlige Exponent $\varepsilon > 0$ ist immer noch eine Wurzel, die jedoch für $x \rightarrow +\infty$ auch ins Unendliche anwächst.

- (c) Da wir nun wissen, dass der Graph der $\frac{1}{x}$ -Funktion genau der Grenzfall ist, bei dem die Fläche unter dem Graphen noch unendlich gross wird, muss auch die harmonische Reihe ins Unendliche anwachsen. Sie konvergiert also nicht. Ihr Grenzwert ist $+\infty$.