

SERIE 4: Uneigentliche Integrale

Klasse 155c / AGe

1. Bestimme die folgenden uneigentlichen Integrale, falls möglich:

- (a) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$ (b) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ (c) $\int_1^{\infty} \frac{2}{x^3} dx$ (d) $\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
- (e) $\int_2^{11} \frac{1}{x-2} dx$ (f) $\int_0^1 \ln x dx$ (g) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$ (h) $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$

Zu (f): Schlage die Stammfunktion zu $\ln x$ im Anhang A des Skripts nach.

2. Betrachte folgendes Integral:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

- (a) Berechne dieses Integral so, wie du es dir gewohnt bist (ohne weiter drüber nachzudenken).
 (b) Betrachte den Graphen zu $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (GeoGebra). Er liegt ständig oberhalb der x -Achse, sodass obiges Integral eigentlich positiv herauskommen müsste, wenn es denn existiert.
 Wo liegt wohl die Problematik bei der Berechnung dieses Integrals?
 (c) Berechne das Integral nochmals unter Berücksichtigung der Problematik. Feststellung?
 (d) Integriere nun unter Berücksichtigung der Problematik auch das folgende Integral:

$$\int_{-4}^4 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$$

Überlege dir zuerst, weshalb hier Betragsstriche benötigt werden. Danach dürfte auch klarer sein, wie man sie eliminieren kann.

3. Potenzfunktionen der Form $f(x) = \frac{1}{x^n}$ mit $n > 0$ haben für $x \rightarrow \infty$ den Limes 0; ihr Graph fällt ab und schmiegt sich an die x -Achse an.

- (a) Lasse dir Graphen von $f(x)$ für verschiedene $n > 0$ in GeoGebra aufzeichnen. Z.B. kannst du für n auch einen Schieberegler definieren, sodass sich der G_f dynamisch verändern lässt.
 (b) Überlege dir nun, für welche $n > 0$ das folgende Integral existiert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n} dx$$

Vielleicht helfen ein paar klärende Versuche mit $n = \frac{1}{2}$, $n = 1$ und $n = 2 \dots$

- (c) Die Obersumme in der nachfolgenden Grafik entspricht der sogenannten **harmonischen Reihe** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$. Wie steht es um die Konvergenz dieser Reihe? Hat sie einen Grenzwert?

