



INTEGRALRECHNUNG

ein Mathematik-Skript für die Klasse 155c

Alex Gertsch

Zürich im Juni 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Integralrechnung – eine Einführung	1
1.1	Die Berechnung der Fläche unter einem Funktionsgraphen	1
1.2	Flächen unterhalb der x -Achse	3
1.3	Mehrteilige Flächen – abschnittsweise Integration	4
1.4	Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen	6
1.5	Abschluss des Einführungskapitels	8
2	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	9
2.1	Flächenberechnung mittels Unter- und Obersumme	9
2.2	Die Herkunft der Integralnotation	12
2.3	Funktion $f(x)$ und Flächenfunktion $F(x)$	13
2.4	Eindeutige Festlegung der Stammfunktion $F(x)$	14
2.5	Die Fläche unter dem Graphen von $x = a$ bis $x = b$	15
2.6	Das unbestimmte Integral	15
2.7	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	17
3	Integrationsregeln und inverse Kettenregel	18
3.1	Allgemeine Integrationsregeln	18
3.2	Die inverse Kettenregel – eine tolle Integrationstechnik	18
4	Uneigentliche Integrale	20
5	Das Volumen eines Rotationskörpers	22
5.1	Das Volumen des geraden Kreiskegels	22
5.2	Allgemeine Berechnungsformel für das Rotationskörpervolumen	24
6	Weiterführende Integrationstechniken	25
6.1	Lineare Substitution	25
6.2	Partielle Integration	29
6.3	Spezielle bestimmte Integrale	30
A	Liste gängiger Stammfunktionen	31

Kapitel 1

Integralrechnung – eine Einführung

Die **Integralrechnung** ist ein essentieller Bestandteil der **Analysis** (= analytische Mathematik), zu der auch Themen wie **Folgen und Reihen** oder die **Differentialrechnung** gehören.

Die nahe Verwandtschaft mit diesen anderen Gebieten werden wir bald aufdecken. Zunächst möchte ich in diesem Einführungskapitel aber zeigen, wofür wir die Integralrechnung am Gymnasium hauptsächlich benützen (**Nutzen**), wie deren Anwendung läuft (**Technik**) und wie ihre korrekte Notation aussieht (**Formalismus**).

Konkret geht es bei der Integralrechnung um die Berechnung von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt werden. Weshalb diese **Flächenberechnung** gerade so funktioniert, wie ich das gleich zeigen werde, werden wir erst im zweiten Kapitel beantworten resp. herleiten.

1.1 Die Berechnung der Fläche unter einem Funktionsgraphen

Vorgabe: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \quad .$$

Fragestellung: Welche Fläche A wird vom Funktionsgraphen G_f und der x -Achse zwischen den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ eingeschlossen?

Wir möchten also die in Abb. 1.1 farblich hervorgehobene Fläche A berechnen. Die exakte Beantwortung dieser Fragestellung scheint herausfordernd zu sein, denn die krumme Oberkante von A dürfte eine erhebliche Komplikation darstellen...

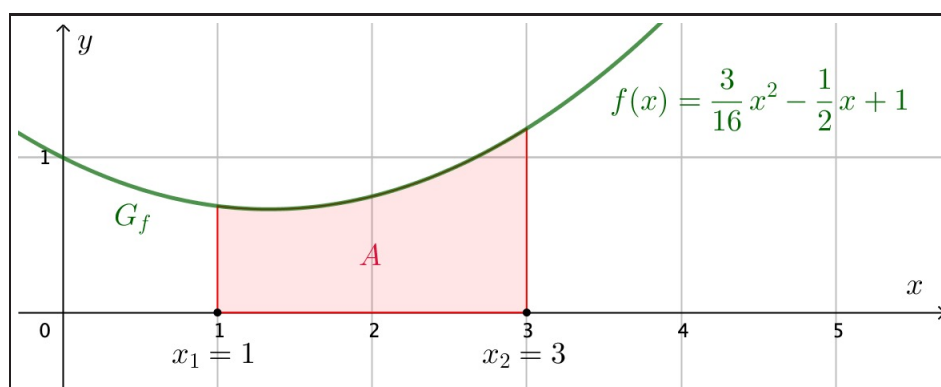


Abbildung 1.1: Die Fläche zwischen einem Funktionsgraphen G_f und der x -Achse lässt sich mittels Integralrechnung bestimmen. Dabei geben zwei Stellen x_1 und x_2 die seitlichen Ränder vor.

Lösung mittels Integral: So anspruchsvoll die Aufgabe erscheinen mag, unter Verwendung der Integralrechnung ist sie relativ rasch erledigt. Ich zeige nun Schritt für Schritt vor, was zu tun ist, um die Fläche zu bestimmen. Man nennt dieses Vorgehen **Integrieren** oder **Integration**.

Nochmals zur Erinnerung: **In diesem Kapitel 1 geht es noch nicht darum zu verstehen, weshalb die Integration funktioniert und das korrekte Ergebnis liefert!**

Schritt 1 – Notation als Integral: Die zu berechnende Fläche A liegt zwischen dem Funktionsgraphen G_f und der x -Achse. Sie wird links von der Stelle $x_1 = 1$ und rechts von der Stelle $x_2 = 3$ begrenzt. Wir schreiben sie als sogenanntes **(bestimmtes) Integral** auf:

$$A = \int_1^3 \left(\frac{3}{16} x^2 - \frac{1}{2} x + 1 \right) \cdot dx \quad \text{allgemein: } A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Lies: “Die Fläche A ist gleich dem Integral über die Funktion $\frac{3}{16} x^2 - \frac{1}{2} x + 1$ von der Stelle 1 bis zur Stelle 3.” resp.: “ A ist gleich dem Integral von x_1 bis x_2 über f von x .”

In dieser Integralnotation steht hinter dem **Integralzeichen** $\int$ jeweils das Produkt aus der Funktion $f(x)$ und einem **infinitesimalen Schritt** dx . Bei den vertikalen Enden des Integralzeichens geben wir die beiden **Integrationsgrenzen** $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ an, also von wo bis wo **integriert** resp. die Fläche berechnet wird.

Bemerke: Bis hierhin haben wir noch keinerlei Rechnung ausgeführt, sondern nur eine **neue Notationsweise** kennengelernt, mit der wir ausdrücken, welche Fläche berechnet wird.

Schritt 2 – Bestimmung einer Stammfunktion: Es folgt der wichtigste und oftmals auch anspruchsvollste Schritt bei der Berechnung eines Integrals resp. einer Fläche. Es gilt eine Funktion $F(x)$ aufzuspüren, deren Ableitung gleich der Funktion $f(x)$ ist: $F'(x) = f(x)$. Jede solche Funktion $F(x)$ heisst **Stammfunktion** von $f(x)$.

Nach kurzer Überlegung finden wir – weil wir Potenz- und Summenregel zur Ableitung kennen:

$$F(x) = \frac{1}{16} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + x \quad \text{denn: } F'(x) = \frac{3}{16} x^2 - \frac{2}{4} x + 1 = \frac{3}{16} x^2 - \frac{1}{2} x + 1 = f(x)$$

Mit dieser Stammfunktion setzen wir die Notation von oben fort:

$$\begin{aligned} \text{im Beispiel: } A &= \int_1^3 \left(\frac{3}{16} x^2 - \frac{1}{2} x + 1 \right) \cdot dx = \left[\frac{1}{16} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + x \right]_1^3 \\ \text{allgemein: } A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \end{aligned}$$

Schritt 3 – Einsetzen der Integrationsgrenzen: Zum Schluss folgt das eigentliche Rechnen. Wir setzen die obere Integrationsgrenze $x_2 = 3$ in die Stammfunktion $F(x)$ ein und subtrahieren davon den Wert, der sich ergibt, wenn wir die untere Integrationsgrenze $x_1 = 1$ in die Stammfunktion $F(x)$ einsetzen:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 \left(\frac{3}{16} x^2 - \frac{1}{2} x + 1 \right) \cdot dx = \left[\frac{1}{16} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + x \right]_1^3 \\ &= \frac{3^3}{16} - \frac{3^2}{4} + 3 - \left(\frac{1^3}{16} - \frac{1^2}{4} + 1 \right) = \frac{27}{16} - \frac{9}{4} + 3 - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \dots = \underline{\underline{\frac{13}{8}}} \\ \text{allgemein: } A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1) \end{aligned}$$

Der vertikale Strich in $F(x) \Big|_{x_1}^{x_2}$ ist die Kurzschreibweise für die Differenzbildung $F(x_2) - F(x_1)$.

Abschliessende Notizen: Dass das berechnete Resultat tatsächlich stimmen kann, sehen wir in Abb. 1.1. Die rote Fläche A umfasst nicht ganz zwei, aber sicher mehr als eineinhalb Quadrate des Koordinatennetzes. Und unser Rechenresultat beträgt $\frac{13}{8} = 1.625$.

Obige Schritte sind das typische Vorgehen beim **Integrieren**. Die Hauptschwierigkeit liegt in der Bestimmung der **Stammfunktion** $F(x)$ – der Rest ist “nur” Rechnen. Wir merken uns:

Die Fläche unter einem Funktionsgraphen G_f zu berechnen resp. die Funktion $f(x)$ zu integrieren bedeutet, eine Stammfunktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ zu bestimmen!

1.2 Flächen unterhalb der x -Achse

Vorgabe: Jetzt betrachten wir das Negative der Funktion $f(x)$ aus Abschnitt 1.1:

$$g(x) = -f(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \quad .$$

Fragestellung: Welche Fläche B wird vom Funktionsgraphen G_f und der x -Achse zwischen den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ eingeschlossen?

Aus Symmetriegründen sollte sich dasselbe Resultat wie in 1.1 ergeben. Schliesslich spiegeln wir einfach den G_f resp. A an der x -Achse (vgl. Abb. 1.2), sodass $B = A$ sein müsste.

Berechnung des Integrals: Ich schreibe direkt alle Schritte in eine Rechnung:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx &= \int_1^3 \left(-\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \right) \cdot dx = \left[-\frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x \right]_1^3 \\ &= -\frac{3^3}{16} + \frac{3^2}{4} - 3 - \left(-\frac{1^3}{16} + \frac{1^2}{4} - 1 \right) = -\frac{27}{16} + \frac{9}{4} - 3 + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 1 = \dots = \underline{\underline{-\frac{13}{8}}} \end{aligned}$$

Betragsstriche! Das Integral kommt negativ heraus, allerdings mit demselben Betrag wie vorher. Das ist immer so, wenn die Funktionswerte zwischen den Integrationsgrenzen negativ sind, also $g(x) < 0$ für $x_1 < x < x_2$ ist. Flächen sollen aber stets positiv sein! Wir notieren daher:

$$B = \left| \int_1^3 \left(-\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \right) \cdot dx \right| = \left| -\frac{13}{8} \right| = \underline{\underline{\frac{13}{8}}}$$

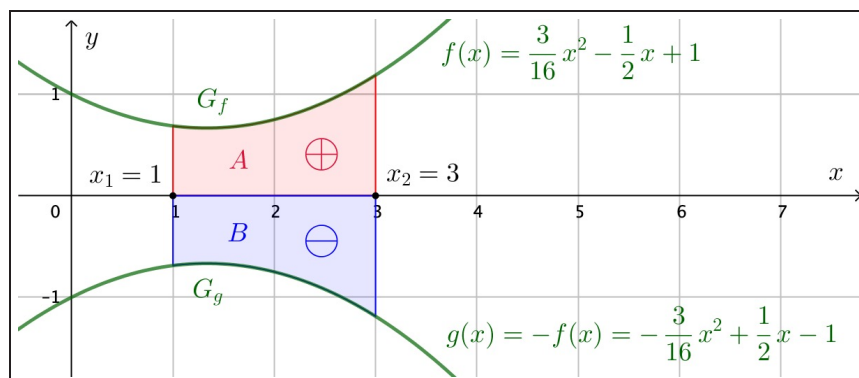


Abbildung 1.2: Auch Flächen unterhalb der x -Achse lassen sich mittels Integral bestimmen.

Eine erste Regel zur Integralrechnung: Eigentlich hätten wir eben gerade gar nicht neu zu rechnen brauchen. Unser Wissen zur Ableitung von Funktionen können wir nämlich auch beim Aufspüren von Stammfunktionen anwenden. . .

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, d.h. $F'(x) = f(x)$, und $k \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante, so gilt gemäss der **Ableitungsregel für multiplikative Konstanten**:

$$[k \cdot F(x)]' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x) \quad .$$

Damit ist aber ganz offensichtlich $k \cdot F(x)$ eine Stammfunktion von $k \cdot f(x)$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} k \cdot f(x) \, dx &= [k \cdot F(x)] \Big|_{x_1}^{x_2} = k \cdot F(x_2) - k \cdot F(x_1) = k \cdot (F(x_2) - F(x_1)) \\ &= k \cdot [F(x)] \Big|_{x_1}^{x_2} = k \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \end{aligned}$$

Folglich gibt es eine **Integrationsregel für multiplikative Konstanten**:

$$\int_{x_1}^{x_2} k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Multiplikative Konstanten lassen sich als Faktor vor das Integral ziehen!

In unserer Anwendung hätte sich folglich der Faktor (-1) vor das Integral nehmen lassen, sodass wir mit dem Resultat aus Abschnitt 1.1 sofort hätten erhalten können:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) \, dx = \int_{x_1}^{x_2} -f(x) \, dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx = -\underline{\underline{\frac{13}{8}}}$$

Rekapitulation: Integrale, deren zugehörige Flächen unterhalb der x -Achse liegen, haben negative Werte. Zur Flächenberechnung muss somit der Betrag des Integrals verwendet werden.

1.3 Mehrteilige Flächen – abschnittsweise Integration

Vorgabe: Jetzt wollen wir die Cosinusfunktion betrachten:

$$f(x) = \cos x \quad .$$

Fragestellung: Welche Fläche schliesst der Graph der Cosinusfunktion zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi$ mit der x -Achse ein?

Abb. 1.3 zeigt die Fläche, die uns interessiert. Sie setzt sich aus den zwei Teilen A und B zusammen.

Drauflos! Ein erstes Resultat: Berechnen wir ohne weitere Vorüberlegung einfach mal das Integral von 0 bis π . Dabei benützen wir, dass $\sin x$ eine Stammfunktion von $\cos x$ ist ($[\sin x]' = \cos x$):

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = \underline{0}$$

Das Integral verschwindet – aber die Fläche in Abb. 1.3 ist doch nicht gleich Null?!

Richtig, aber der G_f verläuft eben sowohl ober-, als auch unterhalb der x -Achse. Das Integral besitzt positive und negative Abschnitte. Somit hat unsere Rechnung einfach gezeigt, dass die Fläche A oberhalb der x -Achse gleich gross ist wie die Fläche B unterhalb – in der Summe ergibt sich 0.

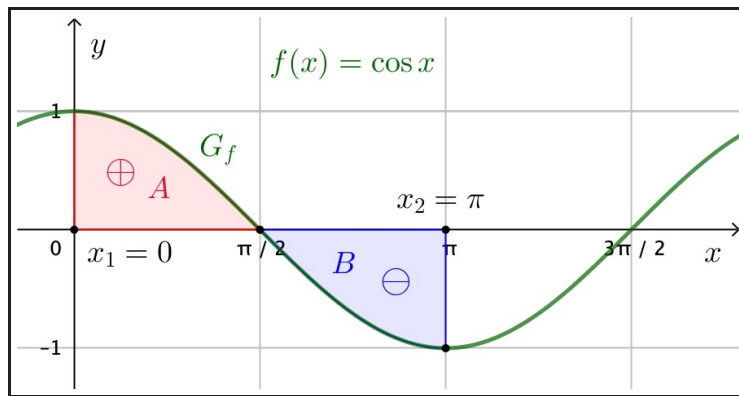


Abbildung 1.3: Das Integral von 0 bis π ergibt 0, weil A und B gleich gross sind, im Integral aber verschiedene Vorzeichen erhalten. Um $A + B$ zu berechnen, müssen die Teilflächen daher separat bestimmt werden.

Korrekte Berechnung: Wollen wir die gesamte Fläche von $x_1 = 0$ bis $x_2 = \pi$ bestimmen, so müssen wir das Integral bei der Nullstelle $x_3 = \frac{\pi}{2}$ **unterteilen**:

$$\begin{aligned} A + B &= \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx}_{=A} + \underbrace{\left| \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx \right|}_{=B} = \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \left| \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right| \\ &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 + \left| \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right| = 1 - 0 + |0 - 1| = 1 + 1 = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Optimierung: Die Rechnung so auszuführen, wie das eben gezeigt wurde, ist allerdings ein bisschen ungeschickt, weil zu aufwändig. Die Punktsymmetrie der Cosinusfunktion bezüglich $x = \frac{\pi}{2}$ ist schliesslich wohlbekannt. Wir wissen von Anfang an, dass B gleich gross wie A ist, sodass:

$$A + B = 2A = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 2 \cdot [\sin x] \Big|_0^{\pi/2} = 2 \cdot \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right] = 2(1 - 0) = \underline{\underline{2}}$$

Auf diese Weise sparen wir uns also das zweite Integral.

Merke: Beim Integrieren empfiehlt es sich stets zuerst über allfällige Symmetrien nachzudenken und diese – wenn möglich – zur Vereinfachung der Rechnung auszunützen!

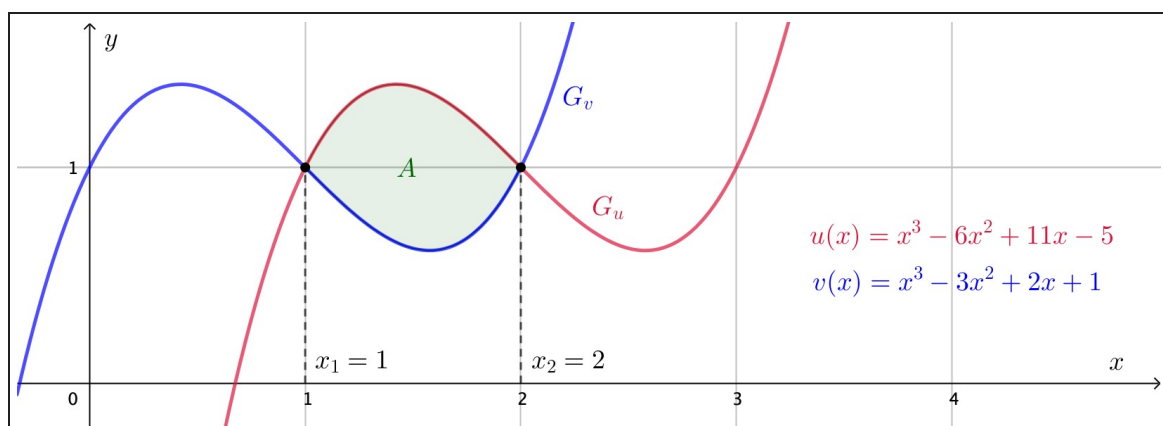


Abbildung 1.4: Auch Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen lassen sich durch Integrale bestimmen.

1.4 Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen

Vorgabe: Abb. 1.4 zeigt die Graphen G_u und G_v der beiden Funktionen:

$$u(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5 \quad \text{und} \quad v(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1.$$

Fragestellung: Wie gross ist die Fläche A zwischen G_u und G_v zwischen den beiden Schnittpunkten über den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$?

Überlegung: Die gesuchte Fläche A ist die Differenz zweier Flächen B und C , die sich je als Integral schreiben lassen (vgl. Abb. 1.5). B ist die Fläche zwischen dem oberen Graphen G_u und der x -Achse und C ist die Fläche zwischen G_v und der x -Achse. Die Fläche A entspricht dem Unterschied dieser beiden Flächen:

$$A = B - C = \int_1^2 u(x) \, dx - \int_1^2 v(x) \, dx$$

“Ungeschicktes” Rechenvorgehen: Im Prinzip kann man nun die beiden Integrale für die Flächen B und C berechnen und erhält durch die Subtraktion die Zwischenfläche $A = B - C$. Dies werden wir hier genau so machen, allerdings nur um hinterher festzustellen, dass wir es wesentlich leichter hätten haben können. . .

Zunächst bestimmen wir die Stammfunktionen von $u(x)$ und $v(x)$:

$$U(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 5x \quad \text{denn so ist:} \quad U'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = u(x)$$

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + x \quad \text{denn so ist:} \quad V'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = v(x)$$

Damit folgt für die grössere Fläche B unter G_u :

$$\begin{aligned} B &= \int_1^2 u(x) \, dx = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 5) \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 5x \right]_1^2 \\ &= \frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + \frac{11 \cdot 2^2}{2} - 5 \cdot 2 - \left(\frac{1^4}{4} - 2 \cdot 1^3 + \frac{11 \cdot 1^2}{2} - 5 \cdot 1 \right) \\ &= 4 - 16 + 22 - 10 - \frac{1}{4} + 2 - \frac{11}{2} + 5 = \underline{\underline{\frac{5}{4}}} \end{aligned}$$

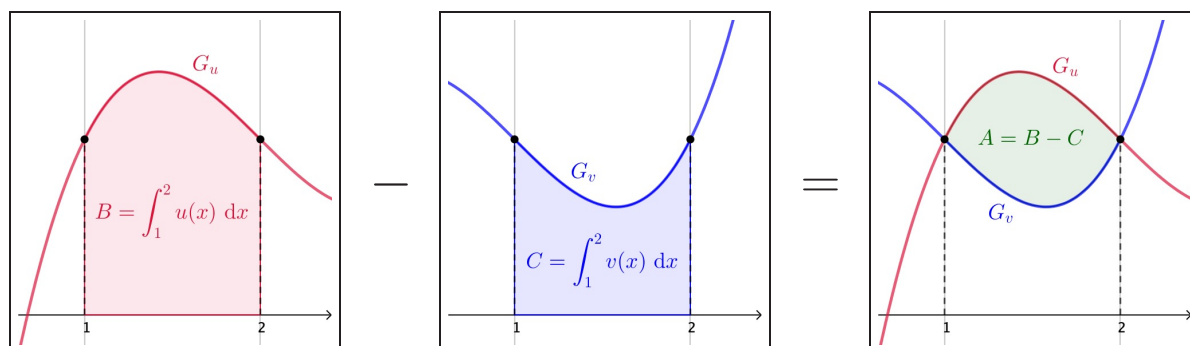


Abbildung 1.5: Die Fläche zwischen den Funktionsgraphen entspricht einer Flächendifferenz: “Zwischenfläche A = grössere Fläche B minus kleinere Fläche C ”.

Analog folgt für die kleinere Fläche C unter G_v :

$$\begin{aligned} C &= \int_1^2 v(x) \, dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + x \right]_1^2 \\ &= \frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 + 2 - \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 + 1 \right) = 4 - 8 + 4 + 2 - \frac{1}{4} + 1 - 1 - 1 = \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir für die Zwischenfläche A :

$$A = B - C = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Das Verfahren hat funktioniert, allerdings gab die Berechnung der beiden Integrale relativ viel zu tun: zweimal eine Stammfunktion bestimmen, zweimal die obere und die untere Grenze einsetzen, zweimal alle Terme zum Resultat verrechnen und schliesslich aus den beiden Teilflächen auf die Zwischenfläche schliessen.

Mit einer zusätzlichen Integralregel lässt sich diese Rechnung allerdings wesentlich einfacher gestalten.

Eine zweite Regel zur Integralrechnung: Eine Funktion $f(x)$ sei die Summe oder die Differenz zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$, also:

$$f(x) = u(x) \pm v(x) \quad .$$

Dann lässt sich das Integral über $f(x)$ von der Stelle x_1 bis zur Stelle x_2 als Summe resp. Differenz zweier separater Integrale von x_1 bis x_2 schreiben. Es gilt also – ganz analog zur Ableitung – eine **Integrationsregel für Summen und Differenzen von Funktionen**:

$$\int_{x_1}^{x_2} (u(x) \pm v(x)) \, dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x) \, dx \pm \int_{x_1}^{x_2} v(x) \, dx \quad (1.2)$$

Beweis: Kennen wir für $u(x)$ und $v(x)$ die Stammfunktionen $U(x)$ mit $U'(x) = u(x)$ und $V(x)$ mit $V'(x) = v(x)$, so folgt aus der Summen- resp. der Differenzregel für Ableitungen:

$$[U(x) \pm V(x)]' = U'(x) \pm V'(x) = u(x) \pm v(x) \quad .$$

Das bedeutet, $U(x) \pm V(x)$ ist eine Stammfunktion von $u(x) \pm v(x)$. Mit dieser Feststellung folgt direkt:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (u(x) \pm v(x)) \, dx &= [U(x) \pm V(x)] \Big|_{x_1}^{x_2} = U(x_2) \pm V(x_2) - (U(x_1) \pm V(x_1)) \\ &= U(x_2) - U(x_1) \pm (V(x_2) - V(x_1)) = U(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \pm V(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} u(x) \, dx \pm \int_{x_1}^{x_2} v(x) \, dx \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Integrale über Summen oder Differenzen von Funktionen dürfen also in einzelne Integrale auseinander genommen werden!

“Geschicktes Rechenverfahren”: In unserem aktuellen Beispiel ist es praktisch, diese Differenzregel in die Gegenrichtung anzuwenden, also die Differenz zweier separater Integrale mit gleichen Integrationsgrenzen zu einem einzelnen Integral über die Differenz beider Funktionen zusammenzufassen:

$$A = B - C = \int_{x_1}^{x_2} u(x) \, dx - \int_{x_1}^{x_2} v(x) \, dx = \int_{x_1}^{x_2} (u(x) - v(x)) \, dx$$

Auf diese Weise brauchen wir nur ein Integral zu berechnen. Es wird nur noch über die Differenzfunktion $f(x) = u(x) - v(x)$ integriert. In unserem Fall trifft sich dies besonders gut, denn dadurch vereinfacht sich die zu integrierende Funktion ungemein:

$$f(x) = u(x) - v(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5 - (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) = -3x^2 + 9x - 6$$

Die Differenzfunktion $f(x)$ ist nur noch quadratisch! Ihre Stammfunktion lautet:

$$F(x) = -x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x \quad \text{denn so ist: } F'(x) = -3x^2 + 9x - 6 = f(x)$$

Damit berechnen wir die gesuchte Differenzfläche viel schneller:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (u(x) - v(x)) \, dx = \int_1^2 f(x) \, dx = \int_1^2 (-3x^2 + 9x - 6) \, dx \\ &= \left[-x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x \right] \Big|_1^2 = -2^3 + \frac{9 \cdot 2^2}{2} - 6 \cdot 2 - \left(-1^3 + \frac{9 \cdot 1^2}{2} - 6 \cdot 1 \right) \\ &= -8 + 18 - 12 + 1 - \frac{9}{2} + 6 = 5 - \frac{9}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Es ist zwar nicht zwingend, dass das Zusammennehmen der beiden Funktionen zu einer einzigen Differenzfunktion $f(x) = u(x) - v(x)$ zu derart drastischen Erleichterungen führt, wie das hier der Fall war. Dennoch wollen wir uns **merken**:

Die Berechnung von Zwischenflächen zwischen zwei Funktionsgraphen G_u und G_v vereinfacht sich in der Regel, wenn man die beiden Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ zuerst zu einer Differenzfunktion $f(x) = u(x) - v(x)$ zusammensetzt.

1.5 Abschluss des Einführungskapitels

Im Wesentlichen haben wir nun bereits gesehen, wie die Integralrechnung angewendet wird. Es werden Flächen zwischen Funktionsgraphen und der x -Achse oder zwei Funktionsgraphen berechnet.¹

Um solche Flächen zu bestimmen, müssen **Stammfunktionen** ermittelt werden. Es geht also darum eine Funktion $F(x)$ zu finden, deren Ableitung die zu integrierende Funktion $f(x)$ ist. Dieses **„Aufleiten“** oder eben **Integrieren** ist in der Regel ein bisschen schwieriger als das Ableiten von Funktionen. Das werden wir gehörig üben müssen!

Beim Integrieren gibt es, wie schon beim Differenzieren, verschiedene Regeln. Zwei dieser **Integrationsregeln** wurden bereits explizit benannt: die **Integrationsregel für multiplikative Konstanten** sowie die **Integrationsregel für Summen und Differenzen**. Eine weitere Regel ist mehrfach vorgekommen, wurde aber nie allgemein notiert. Das soll hier explizit nachgeholt werden:

Potenzregel: Ist $f(x) = x^n$ eine Potenzfunktion mit reellem Exponenten $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, so ist auch die Stammfunktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ eine Potenzfunktion. Es gilt:

$$f(x) = x^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (1.3)$$

Die Potenzregel fürs Integrieren ergibt sich sofort aus der bereits bekannten Potenzregel zur Ableitung: Aus $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ mit $n \neq -1$ folgt: $F'(x) = \frac{n+1}{n+1} \cdot x^{n+1-1} = x^n = f(x)$ ✓.

Natürlich gibt es rund ums Integrieren noch weitere Regeln, Techniken und Anwendungsbeispiele. Im Kapitel 2 werden wir nun aber erstmal erfahren resp. herleiten, weshalb die Integralrechnung überhaupt funktioniert und warum es dabei Stammfunktionen zu bestimmen gibt.

¹Die x -Achse ist natürlich auch ein Funktionsgraph, nämlich derjenige der Nullfunktion $f(x) = 0$.

Kapitel 2

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Kapitel wollen wir ergründen, weshalb die Flächenberechnung genau so funktioniert, wie wir das im Kapitel 1 gesehen haben. Weshalb benötigen wir zur Berechnung der Fläche unter dem Graphen zur Funktion $f(x)$ ausgerechnet eine Stammfunktion $F(x)$, also eine Funktion mit $F'(x) = f(x)$? Diese Frage führt uns schliesslich zum sogenannten **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**, eine der ganz zentralen Aussagen der gesamten analytischen Mathematik.

2.1 Flächenberechnung mittels Unter- und Obersumme

Eine konkrete Vorgabe: In Abb. 2.1 sehen wir links den Graphen G_f der Funktion $f(x) = x^2$. Wir möchten die Fläche A über dem Intervall $[0; b]$ bestimmen.

Ober- und Untersummen: Wir können $[0; b]$ in z.B. vier gleich grosse Abschnitte unterteilen. In jedem dieser Abschnitte werden zwei Rechtecke von der x -Achse aus eingezeichnet (vgl. Abb. 2.1 rechts). Alle Rechtecke haben die Breite $\frac{b}{4}$. In einem einzelnen Abschnitt soll die Höhe des grösseren Rechtecks (rot) dem Funktionswert von $f(x)$ am rechten Rand des Abschnittes entsprechen. Die Höhe des kleineren Rechtecks (blau) sei jeweils gleich dem Funktionswert am linken Rand. So ist im ersten Abschnitt $[0; \frac{b}{4}]$ gar kein kleines Rechteck sichtbar, weil der Funktionswert am linken Rand gleich 0 ist.

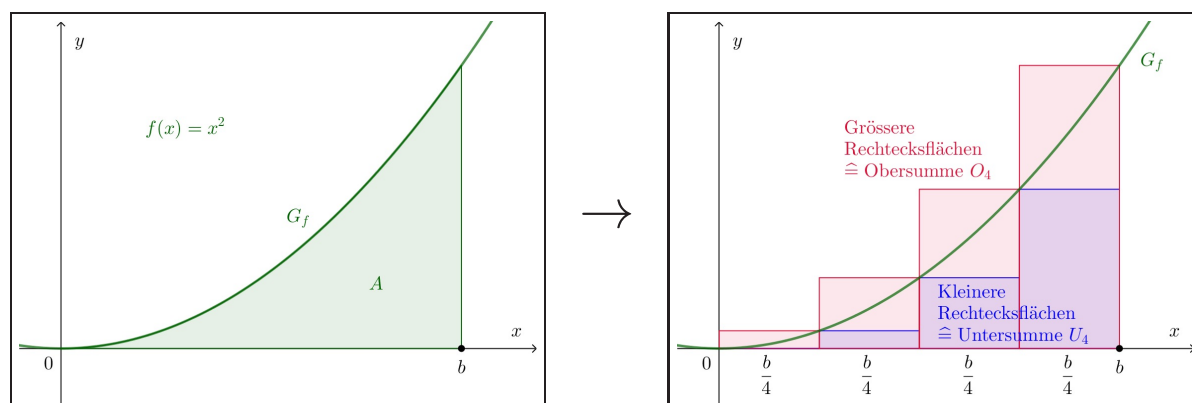


Abbildung 2.1: Wir unterteilen das betrachtete Intervall $[0; b]$ und legen zu grosse Rechtecke über und zu kleine Rechtecke unter den Funktionsgraphen. So ergibt sich eine Obersumme O_4 , die stets grösser ist als A , und eine stets kleinere Untersumme $U_4 < A$.

Die Summe über die Flächen der vier grösseren Rechtecke (rot) bezeichnen wir als **Obersumme** O_4 , die Summe über die kleineren Rechtecksflächen heisst **Untersumme** U_4 . Dabei gibt die 4 an, dass wir das Intervall $[0; b]$ geviertelt haben. Offensichtlich wird die Fläche A von unten durch die Unter- und von oben durch die Obersumme beschränkt:

$$U_4 < A < O_4 \quad .$$

Diese Feststellung scheint trivial. Für unser weiteres Vorgehen ist sie aber dennoch bedeutsam.

Der Unterschied der beiden Summen: Betrachten wir nun die obere Grafik in Abb. 2.2. Darin wird rechts gezeigt, aus welchen Rechtecken sich die Flächendifferenz zwischen Ober- und Untersumme zusammensetzt. Die vier Einzeldifferenzen werden einfach aufeinander gestellt. Die so entstehende Fläche lässt sich gut berechnen:

$$O_4 - U_4 = \frac{b}{4} \cdot f(b) = \frac{b}{4} \cdot b^2 = \frac{b^3}{4} \quad .$$

Wenn wir nicht vierteln, sondern z.B. achteln, so ergeben sich Unter- und Obersummenrechtecke, deren Unterschiede in den einzelnen Abschnitten deutlich kleiner sind. Entsprechend wird auch die Differenz von Ober- und Untersumme kleiner, wie wir in Abb. 2.2 unten sehen sehen:

$$O_8 - U_8 = \frac{b}{8} \cdot f(b) = \frac{b}{8} \cdot b^2 = \frac{b^3}{8} < \frac{b^3}{4} \quad .$$

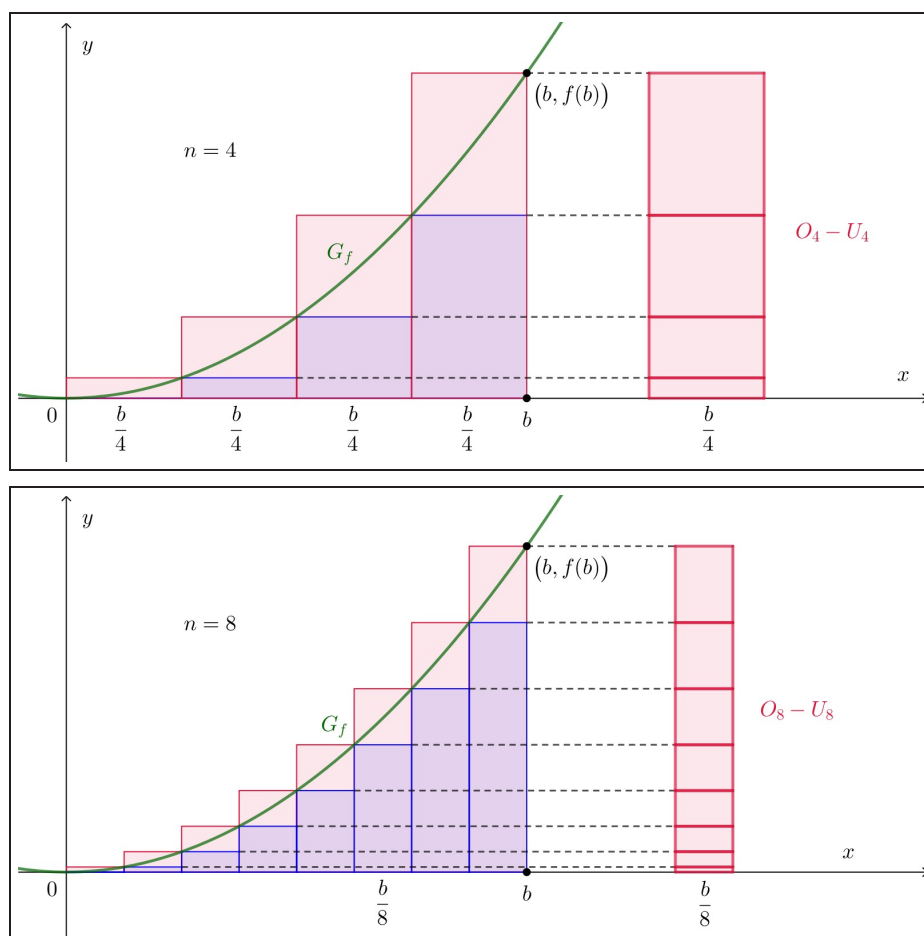


Abbildung 2.2: Der Differenz von Ober- und Untersumme entspricht eine rasch berechenbare Fläche.

Verfeinerung der Unterteilung: Unterteilen wir das Intervall $[0; b]$ in $n \in \mathbb{N}$ gleich grosse Abschnitte, so gilt für die Differenz zwischen Ober- und Untersumme offensichtlich:

$$O_n - U_n = \frac{b^3}{n}.$$

Damit ist aber klar, dass diese Differenz zwischen Ober- und Untersumme beliebig klein werden kann, wenn wir das Intervall $[0, b]$ nur hinreichend oft unterteilen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (O_n - U_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{n} = 0.$$

Da man Grenzwerte von Summen und Differenzen auseinandernehmen darf, folgt weiter:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (O_n - U_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n - \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n.$$

Ober- und Untersumme streben also für $n \rightarrow \infty$ gegen denselben Grenzwert.

Konsequenz: Da die exakte Fläche A für jedes beliebige n zwischen U_n und O_n liegt, gilt das auch bezüglich der Grenzwerte für $n \rightarrow \infty$:

$$U_n < A < O_n \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \leq A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} O_n}_{= \text{identisch!}}.$$

Wenn nun aber die Grenzwerte von U_n und O_n für $n \rightarrow \infty$ zusammenfallen, dann muss dieser Grenzwert zwingend gleich der gesuchten Fläche A selber sein. Halten wir also fest:

Die gesuchte Fläche A entspricht sowohl dem Grenzwert der Untersumme U_n , wie auch demjenigen der Obersumme O_n für $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n. \quad (2.1)$$

Diese Aussage gilt nicht nur für unsere Beispielfunktion $f(x) = x^2$, sondern für jede auf dem betrachteten Abschnitt **stetige**, also “nicht-sprunghafte” oder “löchrige” Funktion $f(x)$.

Überprüfung an der quadratischen Funktion: Wir wollen uns kurz davon überzeugen, dass wir im Falle $f(x) = x^2$ aus der obigen Aussage (2.1) das erwartete Resultat für die Fläche erhalten.

Z.B. gilt für die Obersumme bei n Unterteilungen von $[0; b]$:

$$O_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{kb}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{kb}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{b^3}{n^3} \cdot k^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n k^2. \quad (2.2)$$

Dabei ist $x_k = \frac{kb}{n}$ die Stelle am rechten Rand des k -ten Abschnittes. An dieser Stelle muss jeweils der Funktionswert $f(\frac{kb}{n}) = (\frac{kb}{n})^2$ abgegriffen werden.

Für die abbrechende Reihe der Quadratzahlen gilt: $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Diesen Ausdruck setzen wir oben ein und erhalten weiter:

$$O_n = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

In dieser Form lässt sich der Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ ohne Weiteres bilden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{b^3}{6} \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{b^3}{3}}}$$

Dasselbe Resultat erhalten wir auch mit der Integraltechnik aus Kapitel 1:

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^b = \frac{1}{3} (b^3 - 0) = \underline{\underline{\frac{b^3}{3}}}$$

Schön und gut... Wir wissen nun also, wie die Fläche unter einem Funktionsgraphen prinzipiell bestimmt werden kann. Man nimmt eine Ober- oder Untersumme mit n Unterteilungen, berechnet diese in Abhängigkeit von n und bildet anschliessend den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$.

Es ist allerdings nicht so klar, ob diese Berechnung der Ober- oder Untersumme immer so "einfach" geht, wie das in unserem Beispiel der Fall war, wo es glücklicherweise eine Formel für die Summe über alle Quadratzahlen gab. Auch muss sich der Grenzwert nicht immer so einfach bilden lassen.

Schlimmer noch: Wir scheinen unser Ziel ein wenig aus den Augen verloren zu haben, wollten wir doch zeigen, dass die Flächenberechnung mittels Integralen, also über die Bestimmung einer Stammfunktion funktioniert, so wie wir das im Kapitel 1 andauernd benutzt hatten.

War die ganze Arbeit umsonst? Nein, wir nehmen davon durchaus gute Erkenntnisse mit, die wir nur noch ein bisschen anders anzuwenden brauchen, um den vollen Durchblick zu haben. Davon mehr in Abschnitt 2.3.

2.2 Die Herkunft der Integralnotation

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt wieder der Funktionsweise der Flächenberechnung resp. Integralrechnung widmen, sei hier kurz die Gelegenheit ergriffen zu zeigen, woher die Integralnotation $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ kommt. Weshalb werden Integrale gerade so aufgeschrieben?

Werfen wir dazu einen Blick auf die anfängliche Notation der Obersumme in (2.2):

$$O_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{kb}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} .$$

Dabei ist $f\left(\frac{kb}{n}\right) \cdot \frac{b}{n}$ als Fläche des einzelnen Rechtecks der Obersumme erkennbar. Es hat die Höhe der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_k = \frac{kb}{n}$ und die Breite $\Delta x = \frac{b}{n}$. Dabei schreibe ich Δx um anzuzeigen, dass diese Breite einem bestimmten Schritt auf der x -Achse entspricht.

Mit x_k und Δx kann ich auch schreiben:

$$O_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x \quad \text{mit} \quad x_k = \frac{kb}{n} \quad \text{und} \quad \Delta x = \frac{b}{n} .$$

Zur Flächenberechnung muss davon nun der Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ gebildet werden:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x \right) .$$

Unsere Flächenberechnung entspricht stets der Grenzwertbildung einer Summe, was bezüglich Notation natürlich recht unübersichtlich und mühsam ist. Tatsächlich war das bereits **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716), einem der Erfinder der Integralrechnung, zu umständlich, sodass er für $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \dots)$ das Integralzeichen $\int$ als Kurzschreibweise einführte:

$$\int_0^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x \right) .$$

Im Limes $n \rightarrow \infty$ wird aus der Breite der Rechtecke Δx ein infinitesimaler Schritt dx . Dieser blieb auch sichtbar im Integral stehen. **Das Produkt $f(x) dx$ ist die Fläche des infinitesimal dünnen Rechtecks an der Stelle x und das Integralzeichen $\int$ steht für die Summe über alle diese infinitesimalen Rechtecksflächen** – hier von der Stelle 0 bis zur Stelle b .

2.3 Funktion $f(x)$ und Flächenfunktion $F(x)$

Wenden wir uns nun wieder dem grundlegenden Verständnis der Integralrechnung zu.

Die Flächenfunktion $F(x)$: In Abb. 2.3 ist die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ von der Stelle 0 bis zur Stelle x grün eingezeichnet. Für jede beliebige Stelle $x > 0$ hat diese Fläche einen ganz bestimmten Wert $F(x)$. Deshalb dürfen wir $F(x)$ zurecht als **Flächenfunktion** auffassen.

Ziel: Bei gegebener Funktion $f(x)$ soll die Flächenfunktion $F(x)$ bestimmt werden!

Veränderung der Flächenfunktion: Wenn wir nun von der Stelle x zur Stelle $x + h$ wechseln, so vergrößert sich dabei der Wert der Flächenfunktion um die Fläche ΔF :

$$F(x + h) = F(x) + \Delta F \quad \text{resp.} \quad \Delta F = F(x + h) - F(x) \quad . \quad (2.3)$$

Wie uns Abb. 2.3 links vor Augen führt, dürfte es zunächst nicht so einfach sein den Flächenzuwachs exakt anzugeben, denn die Oberkante der hinzukommenden Fläche ΔF ist gekrümmt – die Verbindung zwischen den beiden Punkten auf dem Graphen sieht zwar fast wie eine gerade Strecke aus, aber wir wissen ganz genau, dass dem nicht so ist. Schliesslich handelt es sich bei diesem Graphen um die überall gekrümmte Normalparabel zu $f(x) = x^2$.

Unsere Erfahrung aus Abschnitt 2.1 hat uns gelehrt, wie nun vorzugehen ist: Wir beschränken den Flächenzuwachs ΔF von unten durch die Fläche $h \cdot f(x)$ des kleineren, blauen Rechtecks und von oben durch die Fläche $h \cdot f(x + h)$ des grösseren, roten Rechtecks (Abb. 2.3 rechts):

$$h \cdot f(x) < \Delta F < h \cdot f(x + h) \quad .$$

Teilen wir diese Ungleichung durch h , so folgt:

$$f(x) < \frac{\Delta F}{h} < f(x + h) \quad .$$

Grenzwertbildung: Nun kommt der “Trick des Infinitesimalen”! Wenn wir h beliebig klein, also infinitesimal werden lassen, so strebt auf der rechten Seite $f(x + h)$ gegen $f(x)$, also gegen die linke Seite der Ungleichung. Gleichzeitig ist $\frac{\Delta F}{h}$ “im Sandwich” von $f(x)$ und $f(x + h)$, die bei der Grenzwertbildung aber identisch werden, also:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{h} \leq f(x) \quad . \quad (2.4)$$

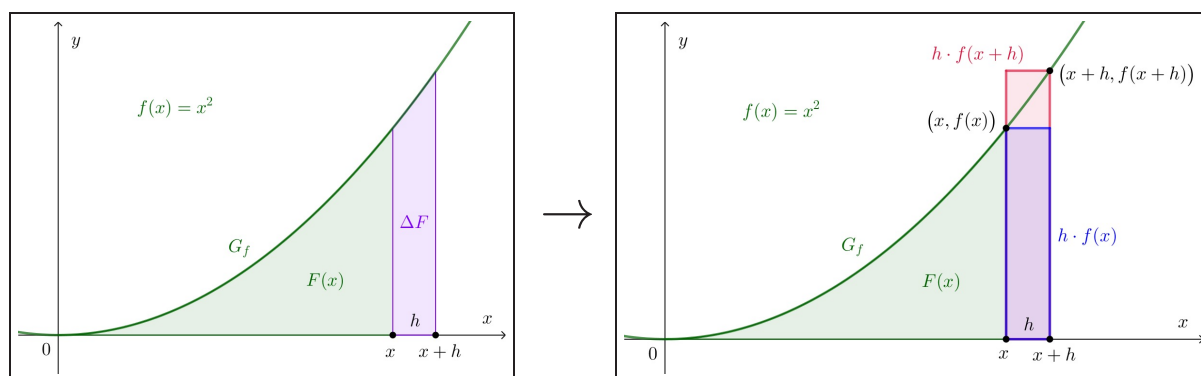


Abbildung 2.3: Die Flächenfunktion $F(x)$ und ihr Zuwachs ΔF über die Strecke h hinweg.

Bemerke: Wenn wir die Ungleichung mit der Grenzwertbildung $\lim_{h \rightarrow 0}$ versehen, müssen wir statt $< \text{neu} \leq$ notieren, denn die Ungleichung gilt bei einer anwachsenden Funktion zwar strikt für jedes endliche h , aber die Grenzwerte, gegen die die Ausdrücke streben, werden unter Umständen durch keinen bestimmten Wert von h abgedeckt. So strebt z.B. $f(x+h)$ gegen $f(x)$, aber sobald ich mir ein $h > 0$ vorgebe, ist $f(x+h) \neq f(x)$.

Weiter im Text: Für $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{h}$ resp. mit $\Delta F = F(x+h) - F(x)$ schliessen wir aus (2.4):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{h} = f(x) \quad \text{resp.} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{F(x+h) - F(x)}{h}}_{=: F'(x)} = f(x) \quad . \quad (2.5)$$

Und ob du es glaubst oder nicht: Damit sind wir praktisch am Ziel angelangt! Wir müssen nur innehalten und erkennen, was denn jetzt auf der linken Seite von Gleichung (2.5) steht. . .

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ ist der **Differenzenquotient** der Funktion $F(x)$ an der Stelle x . Bilden wir davon den Limes für $h \rightarrow 0$, so erhalten wir die **Ableitung** $F'(x)$! (2.5) bedeutet kurz also:

$$F'(x) = f(x) \quad . \quad (2.6)$$

Das ist der gesuchte Zusammenhang zwischen der Funktion $f(x)$ und der zugehörigen Flächenfunktion $F(x)$: **Die Funktion $f(x)$ ist die Ableitung der Flächenfunktion $F(x)$.** Resp. umgekehrt: **Die Flächenfunktion $F(x)$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$.**

2.4 Eindeutige Festlegung der Stammfunktion $F(x)$

Problematisierung: Wir haben nun offenbar ein schönes Resultat erhalten: *Die Fläche zwischen dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ und der x -Achse ist von der Stelle 0 bis zur Stelle x gegeben durch die Flächenfunktion $F(x)$, die eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.*

Allerdings gibt es dabei eine Schwierigkeit: Zu einer bestimmten Funktion $f(x)$ gibt es nämlich mehrere Stammfunktionen $F(x)$! Die Stammfunktion $F(x)$ zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist nur bis auf eine **additive Konstante** $C \in \mathbb{R}$ festgelegt. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so auch $F(x) + C$. Das folgt aus der Ableitungsregel für additive Konstanten:

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x) \quad .$$

Es stellt sich also die dringende Frage, welche von allen möglichen Stammfunktionen $F(x) + C$ denn nun die Richtige ist?!

Stammfunktion von $f(x) = x^2$? In unserem Beispiel der vorherigen zwei Abschnitte haben wir nach der Fläche unter dem Graphen von $f(x) = x^2$ von der Stelle 0 bis zur Stelle x gefragt.

Stammfunktionen zu $f(x)$ wären zum Beispiel $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ oder $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \pi$ oder einfach $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Welches $F(x)$ lässt uns die gesuchte Fläche korrekt bestimmen?

Antwort: Die Stammfunktion $F(x)$ muss eine zusätzliche Bedingung erfüllen. Wird gar keine Fläche abgedeckt, integrieren wir also von $x = 0$ bis $x = 0$, so muss die Flächenfunktion 0 ergeben. D.h., es muss $F(0) = 0$ sein. Dadurch wird die Konstante C und somit die Flächenfunktion $F(x)$ eindeutig festgelegt.

Im Fall $f(x) = x^2$ von $x = 0$ bis $x = b$ finden wir somit definitiv: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ (quasi mit $C = 0$), denn nur so ist $F(0) = 0$.

Wir werden im Abschnitt 2.6 gleich noch ausführlicher auf diese Thematik eingehen und besser verstehen, weshalb es bei gegebenem $f(x)$ zu unterschiedlichen Stammfunktionen kommt.

2.5 Die Fläche unter dem Graphen von $x = a$ bis $x = b$

Selbstverständlich wollen wir nicht nur Flächen von der Stelle 0 aus berechnen. Wir wollen die Integrationsgrenzen a und b beliebig setzen können. Das ist aber ganz einfach, wenn wir einmal über eine Flächenfunktion $F(x)$ mit unterer Grenze bei $x = 0$ verfügen.

Abb. 2.4 zeigt, wie wir die Fläche zwischen zwei beliebigen Integrationsgrenzen a und b erhalten. Von der Fläche $F(b)$ von 0 bis zur Stelle b subtrahieren wir die Fläche $F(a)$ von 0 bis zur Stelle a . Es gilt also:

$$A = F(b) - F(a)$$

Als kompakte Notation für das Integral von a bis b legen wir fest:

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_0^b f(x) \, dx - \int_0^a f(x) \, dx \quad .$$

Und sofern $F'(x) = f(x)$ ist, gilt damit dann eben:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_0^b f(x) \, dx - \int_0^a f(x) \, dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \quad . \quad (2.7)$$

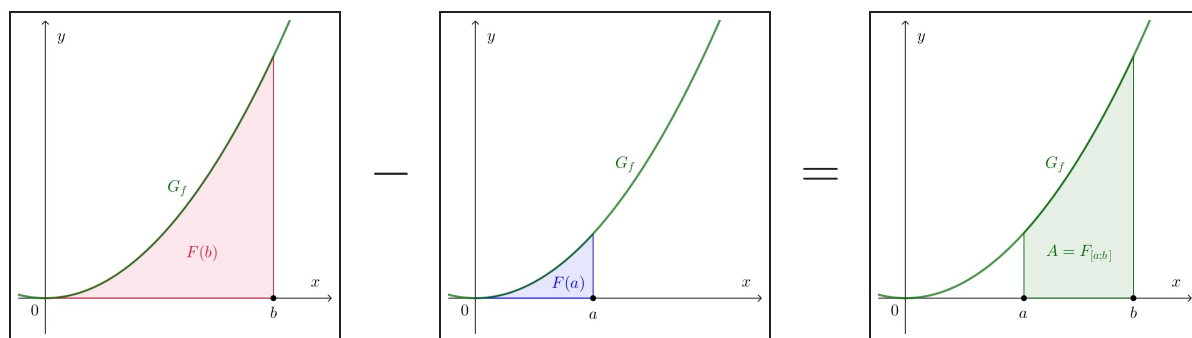


Abbildung 2.4: Das Integral von a bis b als Differenz der Integrale von 0 bis b und von 0 bis a .

2.6 Das unbestimmte Integral

Bisher haben wir die Flächenfunktion $F(x)$ zu einer Funktion $f(x)$ von der Stelle $x = 0$ aus starten lassen. Das war eigentlich eine sehr willkürliche Entscheidung. Im Prinzip kann ich die Fläche unter dem Graphen doch von einer beliebigen Stelle c aus berechnen.

Zur Kennzeichnung der Flächenfunktion von der Stelle c aus schreiben wir nun $F_c(x)$. Bisher haben wir also ausschliesslich mit $F_0(x)$ gearbeitet.

Worin besteht denn nun der Unterschied zweier an verschiedenen Stellen c und d startender Flächenfunktionen $F_c(x)$ und $F_d(x)$? Was gibt es zu berücksichtigen, wenn ich statt von 0 aus von irgendeiner anderen Stelle c aus mit der Flächenfunktion starte?

Betrachten wir zwei konkrete Beispiele, einerseits $F_0(x)$ und zum Vergleich neu $F_{-2}(x)$. Bei einer bestimmten Funktion $f(x)$ – in Abb. 2.5 z.B. $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{5}x + 2$ – beginnt $F_0(x)$ die Fläche unter dem Funktionsgraphen G_f wie gewohnt von 0 aus zu berechnen, währenddem $F_{-2}(x)$ diese Flächenberechnung eben von -2 aus startet.

Soll die Fläche bis zur Stelle a berechnet werden, so ist $F_{-2}(a)$ um einen gewissen Betrag C grösser als $F_0(a)$. Dieses C entspricht offensichtlich genau der Fläche unter dem G_f von der Stelle $x = -2$ bis zur Stelle $x = 0$. Es gilt also:

$$F_{-2}(a) = F_0(a) + C \quad .$$

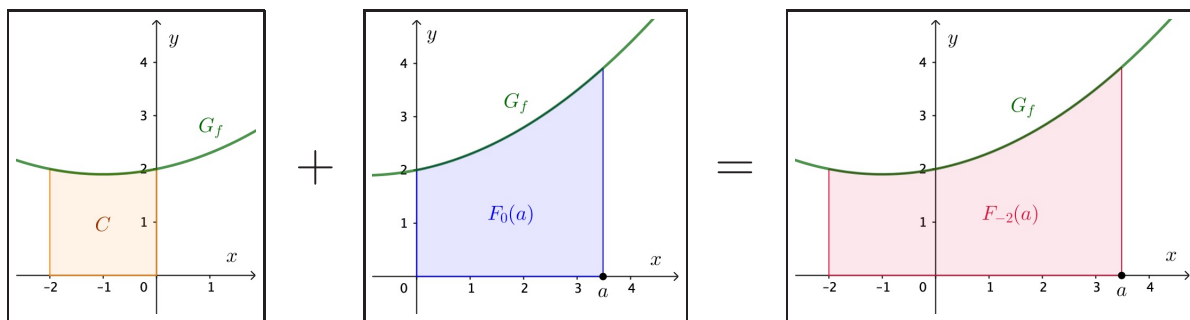


Abbildung 2.5: Das grafische Verständnis für die Integrationskonstante C .

Der Wert von C hängt nicht von der Stelle a ab, bis zu der integriert wird, sondern nur davon, dass die eine Flächenfunktion $F_{-2}(x)$ von $x = -2$ aus arbeitet und $F_0(x)$ eben von $x = 0$ aus.

Daraus folgern wir: Sämtliche Flächenfunktionen $F_c(x)$ unterscheiden sich nur um eine von der Stelle c abhängige Konstante C von der Flächenfunktion $F_0(x)$. Oder nochmals anders: Jedes Paar zweier Flächenfunktionen $F_c(x)$ und $F_d(x)$ unterscheidet sich lediglich um eine additive Konstante C , deren Wert von der Wahl der beiden Stellen c und d abhängt.

So verstehen wir, dass alle möglichen Flächenfunktionen $F_c(x)$ Stammfunktionen von ein- und derselben Funktion $f(x)$ sind, denn wenn $F_c(x) = F_d(x) + C$ ist, so folgt aus $F_d'(x) = f(x)$:

$$F_c'(x) = [F_d(x) + C]' = F_d'(x) = f(x) \quad .$$

D.h., wenn $F_d(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann auch $F_c(x)$.

Angabe der Stammfunktion als unbestimmtes Integral

Oftmals möchten wir zu einer Funktion $f(x)$ einfach die Stammfunktion angeben (egal welche Rechnung nachher vielleicht damit gemacht wird). Diese Angabe erfolgt in Form eines sogenannten **unbestimmten Integrals** mit einer **Integrationskonstanten** C :

$$\underbrace{\int f(x) \, dx}_{\text{unbestimmtes Integral}} = F(x) + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \quad . \quad (2.8)$$

Man notiert also einfach das Integral über $f(x)$ ohne Angabe von Integrationsgrenzen. Rechts davon schreibt man nach dem Gleichheitszeichen eine Stammfunktion $F(x)$ und die Integrationskonstante C , wobei wir in der Regel auf den Zusatz $C \in \mathbb{R}$ verzichten dürfen. Uns ist klar, dass die Integrationskonstante C eine beliebige reelle Zahl sein kann.

So findet man z.B. in Formelsammlungen reihenweise Angaben von Stammfunktionen als unbestimmte Integrale. Hier eine solche Liste:

$$\begin{array}{ll} \int 0 \, dx = C & \int a \, dx = ax + C \\ \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C & \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ \int e^x \, dx = e^x + C & \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \\ \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C & \int \sin x \, dx = -\cos x + C \\ \int \cos x \, dx = \sin x + C & \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C \end{array}$$

Irrelevanz der Integrationskonstante C für bestimmte Integrale

Sobald wir ein **bestimmtes Integral**, also ein Integral mit konkret gegebenen Integrationsgrenzen berechnen, ist die Wahl der Integrationskonstante C irrelevant. Das lässt sich rasch zeigen.

Seien $F_c(x)$ und $F_d(x)$ zwei Stammfunktionen von $f(x)$ mit $F_c(x) = F_d(x) + C$, so folgt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \underline{F_c(b) - F_c(a)} = F_d(b) + C - (F_d(a) + C) = \underline{F_d(b) - F_d(a)} \quad .$$

Bei der Berechnung von bestimmten Integralen brauchen wir uns um die Integrationskonstante also keine Gedanken mehr zu machen. Wir benutzen die einfachst mögliche Stammfunktion $F(x)$.

2.7 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Nun haben wir alles beisammen, um endlich den Hauptsatz der **Differential- und Integralrechnung**, der manchmal auch als **Fundamentalsatz der Analysis** bezeichnet wird, zu formulieren. Zu beweisen brauchen wir diesen Satz nicht mehr, denn er fasst nun einfach alles zusammen, was wir in den Abschnitten 2.3 bis 2.6 hergeleitet haben.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine auf dem Intervall $[a; b]$ stetige Funktion, so gibt es auf $[a; b]$ eine differenzierbare (= ableitbare) Integral- resp. Stammfunktion mit

$$F'(x) = f(x) \quad . \quad (2.9)$$

Diese Stammfunktion $F(x)$ hat die Eigenschaft, dass das Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx := F(b) - F(a) \quad (2.10)$$

für die Fläche zwischen der x -Achse und dem Graphen G_f der Funktion zwischen den Stellen a und b steht.

Anmerkungen

- Der Hauptsatz beschreibt den fundamentalen Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration. Offensichtlich gilt:

$$\int_a^b F'(x) \, dx = F(b) - F(a) = \Delta F \quad \text{resp.} \quad F(b) = F(a) + \Delta F = F(a) + \int_a^b F'(x) \, dx$$

Das Integral von a bis b über die Ableitung der Funktion $F(x)$ ergibt die Veränderung ΔF des Funktionswertes von $F(x)$, wenn ich von der Stelle a zur Stelle b wechsele.

- Alle Konsequenzen für die Flächenberechnung, die wir in Kapitel 1 zum Teil bereits kennengelernt und ausgenutzt haben, lassen sich aus obigem Hauptsatz ableiten. Dazu gehört insbesondere die negative Zählung von Flächen unterhalb der x -Achse. Diese wurde oben durch die Forderung $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ noch explizit ausgenommen.
- Im nächsten Kapitel werden wir nun die gängigen **Integrationsregeln** festhalten, die aus diesem Hauptsatz abgeleitet werden können. Dabei verzichten wir weitgehend auf Beweise. Wir müssen vor allem wissen, dass es diese Regeln gibt und dass sie sich auch eine nach der anderen beweisen liessen.

Kapitel 3

Integrationsregeln und inverse Kettenregel

Dies ist ein Zwischenkapitel mit zwei kurzen, aber wichtigen Inhalten. Im ersten Abschnitt werden ein paar **allgemeine Integrationsregeln** vorgestellt. Dabei bedeutet "allgemein", dass diese Regeln nicht von den Funktionen abhängen, über die integriert wird, sondern eben für beliebige Funktionen Gültigkeit haben. Im zweiten Abschnitt geht es um die **inverse Kettenregel**, eine praktische Integrationstechnik, die sich aus der Kettenregel des Ableitens ergibt.

3.1 Allgemeine Integrationsregeln

Aus dem Hauptsatz auf Seite 17 können die folgenden Regeln für die Integration hergeleitet werden:

Summenregel:	$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$
Multiplikative Konstante:	$\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx$
Aufteilung des Integrals:	$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$
Umkehrung der Integrationsgrenzen:	$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$

Diese allgemein gültigen Regeln wollen wir an dieser Stelle einfach zur Kenntnis nehmen ohne sie weiter zu beweisen. Teilweise haben wir sie ja in Kapitel 1 hergeleitet, so die Regel (1.1) für multiplikative Konstanten auf Seite 4 und die Summenregel (1.2) auf Seite 7.

Diese Regeln gilt es einfach im Hinterkopf zu behalten. In manchen Anwendungen erlauben sie praktische Umformungen und Vereinfachungen.

3.2 Die inverse Kettenregel – eine tolle Integrationstechnik

Um das Kapitel ein wenig anzureichern, wollen wir uns an dieser Stelle noch eine nützliche Integrationstechnik aneignen, mit der sich manche kompliziertere Funktion integrieren lassen wird. Wir wollen sie als **inverse Kettenregel** oder als die **Erkennung von äusseren und inneren Ableitungen** bezeichnen.

In Sachen **Kettenregel** (bei der Ableitung) sind wir ja geübt und verfügen daher über ein relativ geschultes Auge punkto innere Ableitungen. Erinnern wir uns: Bei der Differenziation erklärt uns die Kettenregel, wie eine verschachtelte Funktion abgeleitet werden muss:

$$[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad .$$

“Die Ableitung einer verschachtelten Funktion ist das Produkt aus äusserer und innerer Ableitung.”

Bemerken wir nun umgekehrt, dass unter einem Integral ein Produkt $f(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ aus einer äusseren und einer inneren Funktion steht, so haben wir mit $F(x) = u(v(x))$ eine Stammfunktion aufgespürt und erhalten für das bestimmte Integral:

$$\text{Inverse Kettenregel:} \quad \int_a^b u'(v(x)) \cdot v'(x) \, dx = u(v(x)) \Big|_a^b \quad . \quad (3.1)$$

Wie zielführend diese Methode ist, möchte ich an drei Beispielen erläutern.

Beispiel 1:
$$\int_1^{\sqrt{2}} x \cdot e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (e^2 - e) = \frac{e}{2} (e - 1)$$

Die innere Funktion ist $v(x) = x^2$ mit $v'(x) = 2x$. Die äussere Funktion $u(v) = \frac{1}{2} e^v$ hat die Ableitung $u'(v) = \frac{1}{2} e^v = \frac{1}{2} e^{x^2}$.¹

Im Nachhinein kann man die Richtigkeit der aufgespürten Stammfunktion stets leicht überprüfen, denn Ableiten ist typischerweise einfacher als Integrieren:

$$\left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]' = \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2x = x \cdot e^{x^2} \quad .$$

Beispiel 2:
$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Die innere Funktion ist $v(x) = \sin x$ mit Ableitung $v'(x) = \cos x$. Die äussere Funktion $u(v) = \frac{1}{2} v^2$ ergibt die Ableitung $u'(v) = \frac{1}{2} \cdot 2v = v = \sin x$. Auch hier überprüfen wir das Resultat:

$$\left[\frac{1}{2} \sin^2 x \right]' = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x \quad .$$

Wir hätten auch $-\cos x$ als innere Funktion mit Ableitung $\sin x$ auffassen können. Dann hätte die äussere Funktion $u(v) = -\frac{1}{2} v^2$ gelautet und wir hätten gleichermassen erhalten:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x \, dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x \Big|_0^{\pi/2} = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Dieses Beispiel zeigt sehr schön, dass sich für ein und dieselbe Funktion $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ unterschiedliche Stammfunktionen $F(x)$ ergeben können. Ganz offensichtlich ist $\frac{1}{2} \sin^2 x \neq -\frac{1}{2} \cos^2 x$. Die beiden Funktionsgraphen verlaufen parallel übereinander und unterscheiden sich lediglich um eine Integrationskonstante $C = \frac{1}{2}$. Für das bestimmte Integral spielt dieser Unterschied aber keine Rolle, weil sich die Integrationskonstante wegsubtrahiert, wie wir in Abschnitt 2.6 gesehen hatten.

Beispiel 3:
$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx = \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Die äussere Funktion ist $u(v) = \ln v$ mit Ableitung $u'(v) = \frac{1}{v}$. Die innere Funktion lautet $v(x) = x^2 + 1$ mit Ableitung $v'(x) = 2x$. Zum Schluss habe ich verwendet, dass $\log_a 1 = 0$ ist.

¹Es sei daran erinnert, dass $a^{b^c} := a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$.

Kapitel 4

Uneigentliche Integrale

Unendlich ausgedehnte Flächen... Die Graphen mancher Funktionen $f(x)$ verlaufen abfallend und schmiegen sich z.B. für $x \rightarrow \infty$ der x -Achse an, andere haben eine Polstelle bei $x = a$ und steigen für $x \rightarrow a$ ins Unendliche an, währenddem sie sich an die Vertikale $x = a$ anschmiegen. Die Stelle $x = a$ selber ist eine Definitionslücke und darf nicht in $f(x)$ eingesetzt werden. Abb. 4.1 zeigt je ein Beispiel.

...mit endlichem Inhalt! Man könnte nun vermuten, dass die Fläche unter derartigen Graphen automatisch unendlich gross werden muss, denn zwei ihrer Seitenlinien werden ja unendlich lang. Um zu zeigen, dass dem nicht immer so sein muss, genügt ein Gegenbeispiel.

Beispiel eines uneigentlichen Integrals: Betrachten wir die Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Den dazu gehörenden, exponentiell abfallenden Funktionsgraphen sehen wir in Abb. 4.2.

Die Fläche A unter dem G_f ab der Stelle $x = 0$ bis $+\infty$ wollen wir wie folgt aufschreiben:

$$A = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x dx \quad .$$

Da die Integrationsgrenze $+\infty$ für keine konkrete reelle Zahl $b \in \mathbb{R}$ steht, sprechen wir hier von einem **uneigentlichen Integral** und müssen den Ausdruck in dem Sinne präzisieren, als dass wir ihn als Grenzwert für die ins Unendliche anwachsende obere Integrationsgrenze b verstehen:

$$A = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \left(\frac{1}{2}\right)^x dx \quad .$$

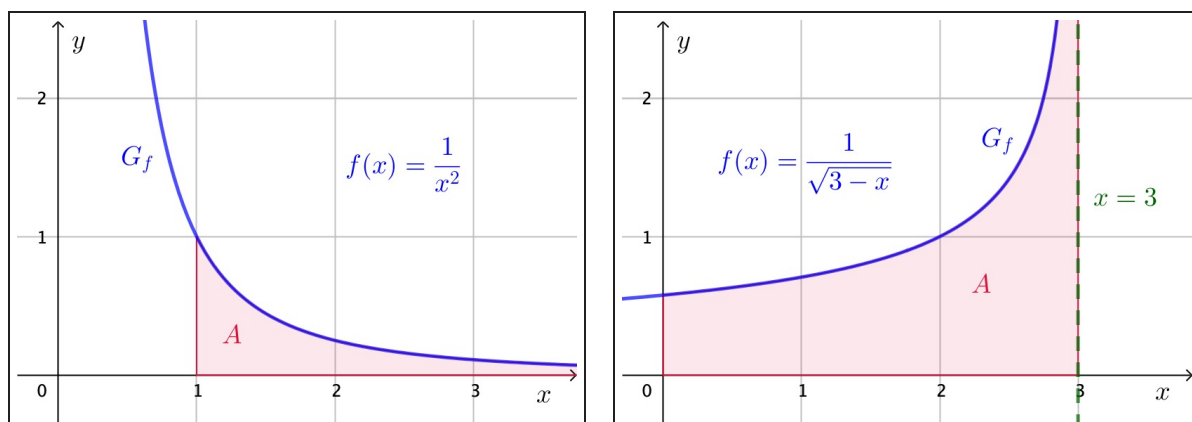


Abbildung 4.1: Uneigentliche Integrale: Flächen mit unendlicher Ausdehnung – Inhalt?

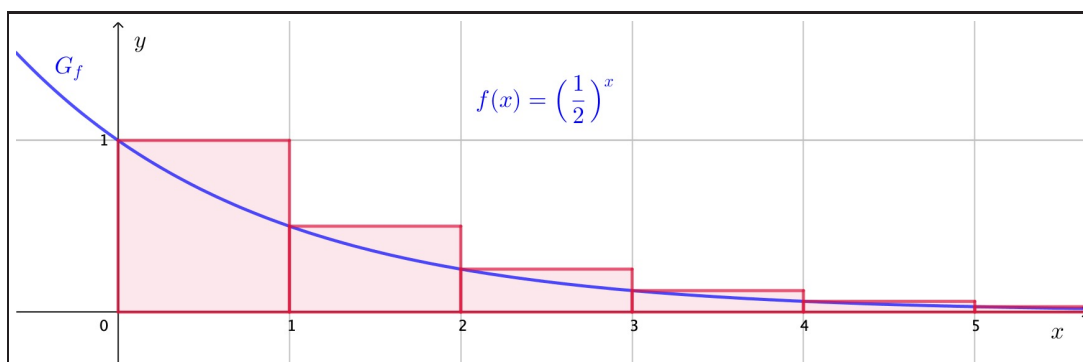


Abbildung 4.2: Die Obersumme beschränkt das uneigentliche Integral.

Obersumme als Einschränkung: Zeichnen wir über jedem Abschnitt der Breite $\Delta x = 1$ ein Rechteck ein, dessen Höhe jeweils durch den Funktionswert $f(x)$ am linken Rand vorgegeben wird, so bilden alle diese Rechtecksflächen zusammen eine Obersumme O zu unserem Integral. Es gilt:

$$A < O = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Zu dieser geometrischen Reihe mit Verkleinerungsfaktor $q = \frac{1}{2}$ von Glied zu Glied existiert allerdings ein Grenzwert. Es gilt, wie wir aus dem Thema *Folgen und Reihen* wissen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{also:} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Bereits unsere Obersumme O ist also endlich, dann muss die Fläche A unter dem Funktionsgraphen erst recht endlich sein!

Berechnung mittels Grenzwertbildung: Mit dem Verständnis des uneigentlichen Integrals als Grenzwert für $b \rightarrow \infty$ erhalten wir rechnerisch:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \Big|_0^b \\ &= \frac{1}{-\ln 2} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^b - \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right) = \frac{1}{-\ln 2} \cdot (0 - 1) = \underline{\underline{\frac{1}{\ln 2}}} \approx 1.44 \end{aligned}$$

Merken wir uns abschliessend:

Uneigentliche Integrale

Als **uneigentliche Integrale** bezeichnen wir *Integrale mit Integrationsgrenzen, von denen eine oder beide im Unendlichen liegen oder zu Stellen gehören, an denen die Funktion $f(x)$, über die integriert wird, nicht definiert ist.*

Solche Integrale berechnen wir durch Grenzwertbildung, z.B.:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx \quad \text{für} \quad f(b) = \text{undefiniert}$$

$$\text{oder:} \quad \int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Derartige Grenzwerte müssen nicht unbedingt existieren. Dann wird das Integral unendlich gross.

Kapitel 5

Das Volumen eines Rotationskörpers

Mit der Integralrechnung lassen sich neben Flächen unter Funktionsgraphen auch Oberflächen und Volumina verschiedener Körper bestimmen. In diesem Abschnitt lernen wir das Paradebeispiel zu dieser Thematik kennen, die Berechnung des Volumens sogenannter **Rotationskörper**. Das Wesentliche dazu ist sehr rasch gesagt, sodass es für uns genügen wird ein Beispiel anzuschauen und hinterher allgemein festzuhalten, wie das Volumen eines Rotationskörpers zu berechnen ist.

5.1 Das Volumen des geraden Kreiskegels

Ein (**gerader Kreis-)**Kegel hat eine kreisförmige Grundfläche mit Radius R , über deren Mittelpunkt sich senkrecht zu ihr die Höhe h erhebt.

Abb. 5.1 zeigt links den Kegel in einem dreidimensionalen Koordinatensystem. Seine Spitze wurde in den Ursprung gelegt und seine Höhe verläuft längs der x -Achse. Der Kegel habe die Höhe $h = 8$ und seine Öffnung sei durch die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ vorgegeben. Wir wollen sein Volumen bestimmen.

Rechts sehen wir das Berechnungsprinzip, das wir als dasjenige der Integralrechnung wiedererkennen: Wir legen eine Untersumme, bestehend aus n zylinderartigen Scheiben ins Innere des Kreiskegels. Das Kegelvolumen V wird dann angenähert durch die Summe über die Volumina aller Scheiben. Im Limes für eine unendlich feine Unterteilung entsteht der exakte Volumenwert.

Notieren wir zunächst das Volumen V_Z einer einzelnen Zylinderscheibe:

$$V_Z = A \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

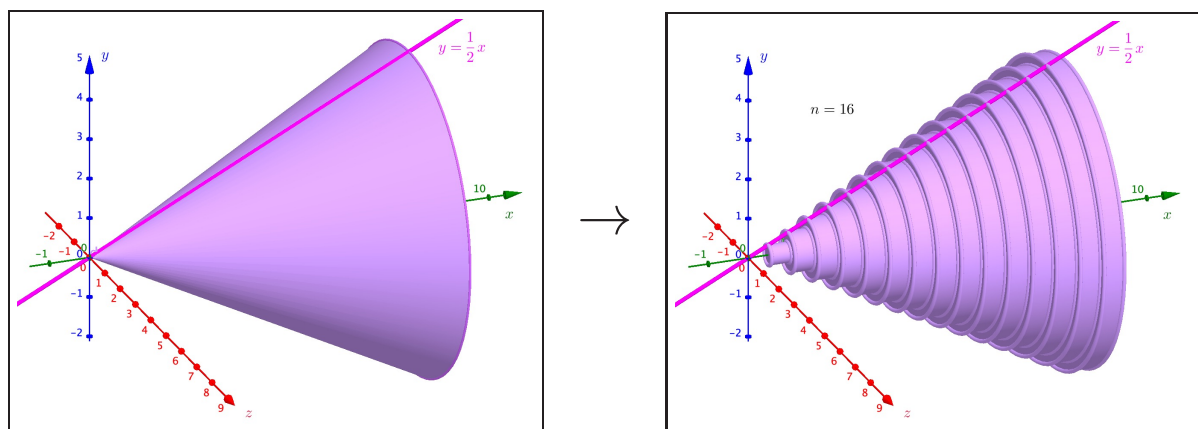


Abbildung 5.1: Untersumme zum Kegel in Form von dünnen, zylinderartigen Scheiben.

Nun hängt der Radius r der jeweiligen Zylinderscheibe davon ab, auf welcher Höhe des Kegels ich mich gerade befinde. Wir können ihn als Funktion der Stelle x auffassen: $r = f(x)$. Das wird in Abb. 5.2 verdeutlicht, wo uns ein Schnitt durch den Kegel und seine Scheiben n gezeigt wird. Die Höhe der Zylinderscheibe entspricht der Schrittweite Δx .

Somit folgt für das Scheibenvolumen:

$$V_Z = \pi r^2 \cdot h = \pi f^2(x) \cdot \Delta x \quad .$$

Wenn wir nun diese Zylinderscheiben unendlich dünn werden lassen ($\Delta x \rightarrow dx$), so besitzen sie auch infinitesimale Volumina dV , für die wir schreiben:

$$dV = \pi f^2(x) \cdot dx \quad .$$

Alle diese infinitesimalen Volumina müssen aufsummiert werden, um das Volumen des Kegels zu erhalten. D.h., es muss über die infinitesimalen Volumina integriert werden, und zwar über die gesamte Höhe hinweg. So erhalten wir:

$$V = \int dV = \int_0^h \pi f^2(x) \cdot dx \quad .$$

In unserem konkreten Beispiel sind $h = 8$ und $f(x) = \frac{1}{2}x$, sodass folgt:

$$V = \int_0^h \pi f^2(x) \cdot dx = \int_0^8 \pi \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{\pi}{12} \cdot x^3 \Big|_0^8 = \frac{8^3 \pi}{12} = \frac{2 \cdot 8^2 \pi}{3} = \underline{\underline{\frac{128\pi}{3}}} \quad .$$

Dieses Resultat entspricht demjenigen, das wir mittels der Volumenformel zum Kreiskegel erhalten:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot 4^2 \cdot 8 = \underline{\underline{\frac{128\pi}{3}}} \quad \text{mit} \quad R = r(h) = \frac{8}{2} = 4 \quad .$$

Natürlich lässt sich diese Volumenformel für den Kreiskegel mittels Integralrechnung nun allgemein herleiten, was du in den Übungsaufgaben erledigen wirst.

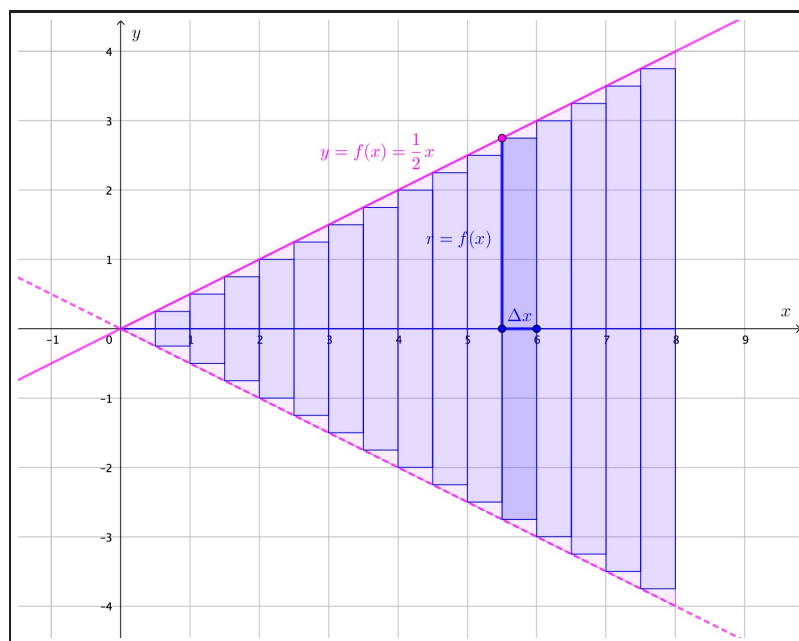


Abbildung 5.2: Ein Schnitt durch den Kegel resp. die Zylinderscheiben.

5.2 Allgemeine Berechnungsformel für das Rotationskörpervolumen

Nachdem wir nun ein konkretes Beispiel gesehen und durchgerechnet haben, wollen wir allgemein festhalten, wie das Volumen eines Rotationskörpers zu berechnen ist:

Das Volumen eines Rotationskörpers

Als **Rotationskörper** bezeichnen wir einen Körper, der bezüglich einer bestimmten Achse rotationssymmetrisch ist. Legen wir die x -Achse eines Koordinatensystems auf diese Rotationsachse und wird der Radius des Körpers längs dieser Achse durch die Funktion $f(x)$ beschrieben, so folgt für das Volumen V des Körpers:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \, dx \quad (5.1)$$

Dabei sind die Integrationsgrenzen a und b die Stellen auf der x -Achse, zwischen denen das Volumen berechnet werden soll.

Neben dem Volumen eines Rotationskörpers lässt sich übrigens auch seine Oberfläche mittels Integralrechnung bestimmen. Diese Berechnung ist allerdings etwas komplizierter. Wir werden sie nur im Rahmen einer Übungsaufgabe betrachten.

Kapitel 6

Weiterführende Integrationstechniken

Das Aufspüren von Stammfunktionen ist die zentrale Herausforderung beim Integrieren. Dazu haben wir bereits einige Überlegungen angestellt, grundlegende Integrationsregeln und die Stammfunktionen einiger elementarer Funktionen kennengelernt.

In diesem Kapitel sollen nun noch ein paar weitere “mathematische Kniffe” betrachtet werden, mit denen sich auch Stammfunktionen komplizierterer Funktionen finden lassen.

6.1 Lineare Substitution

Oftmals taucht die Integrationsvariable x innerhalb der Funktion $f(x)$, über die integriert wird, in einem linearen Ausdruck $mx + q$ auf. In diesem Fall ist es hilfreich $mx + q$ durch eine neue Integrationsvariable $s = mx + q$ zu **substituieren** (= ersetzen). In der Funktion sollen gar keine x mehr vorkommen. D.h., wir ersetzen wirklich alle x und schreiben für die Funktion nur noch $f(s)$. Aus dem infinitesimalen Schritt dx wird ds . Dabei müssen wir berücksichtigen, dass:

$$s = mx + q \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dx} = s' = m \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{ds}{m} .$$

Auch die Integrationsgrenzen müssen in s -Werte umgerechnet werden. Insgesamt folgt:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{m} \cdot \int_{ma+q}^{mb+q} f(s) ds . \quad (6.1)$$

Im Moment erkennen wir vielleicht noch nicht so richtig, wie die Sache läuft resp. was sie bringt. Die folgenden paar Beispiele sollen Licht ins Dunkel bringen.

Beispiel 1: Verschiebungs-Trick ($m = 1$)

Wir betrachten das folgende Integral:

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx .$$

Das sieht ein bisschen unschön aus. Von $\frac{1}{\sqrt{x}}$ kennen wir die Stammfunktion: $2\sqrt{x}$. Aber wie sieht es mit der -1 unter der Wurzel aus? Was verändert diese Subtraktion?

Von früher wissen wir, dass die Ersetzung aller x in einer Funktionsgleichung durch den Ausdruck $x - 1$ den Funktionsgraphen um 1 nach rechts verschiebt. Machen wir das Umgekehrte, ersetzen wir also $x - 1$ durch x , so bedeutet dies eine Verschiebung um 1 nach links.

Das nützen wir hier aus und setzen eine neue Integrationsvariable $s = x - 1$ an. Damit verschieben wir im Prinzip den Funktionsgraphen um 1 nach links (vgl. Abb. 6.1). Es leuchtet ein, dass dann auch die Integrationsgrenzen um 1 nach links verschoben werden müssen, damit wir immer noch dasselbe Integral berechnen.

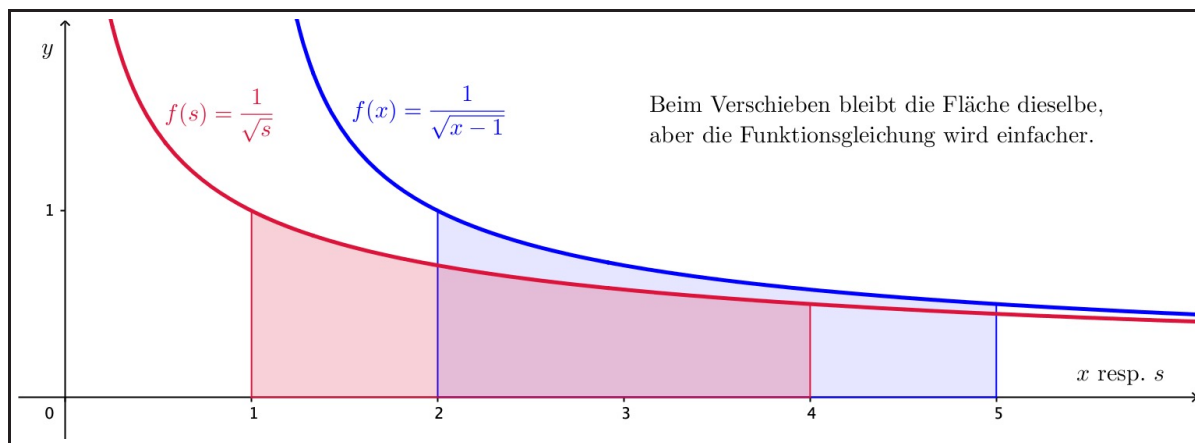


Abbildung 6.1: Die Substitution $s = x - 1$ verschiebt den Graphen von $f(x)$ um 1 nach links. Die Integrationsgrenzen werden mit verschoben, sodass die Integrationsfläche gleich gross bleibt.

Zunächst betrachten wir aber den neuen infinitesimalen Schritt:

$$m = \frac{ds}{dx} = s' = [x - 1]' = 1 \quad .$$

Solange also der lineare Koeffizient m in unserer Substitution $s = mx + q$ gleich 1 ist, verändert sich am infinitesimalen Schritt gar nichts, $ds = dx$. Es folgt:

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \int_{2-1}^{5-1} \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{s}} ds \quad .$$

Das sieht schon freundlicher aus! Aus der Integrationsregel für Potenzfunktionen erhalten wir:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \int_1^4 s^{-\frac{1}{2}} ds = 2s^{\frac{1}{2}} \Big|_1^4 = 2\sqrt{s} \Big|_1^4 = 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2 \quad .$$

Bemerkung: Das anfängliche Integral hätten wir auch berechnen können, wenn wir in der Aufgabenstellung eine inverse Kettenregel (vgl. Abschnitt 3.2) entdeckt hätten. Dann hätten wir die 1 im Zähler von $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ als Ableitung der inneren Funktion $v(x) = x - 1$ und $u'(v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$ als Ableitung der äusseren Funktion $u(v) = 2\sqrt{v}$ verstanden:

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = 2\sqrt{x-1} \Big|_2^5 = 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2 \quad .$$

Beim Integrieren gibt es relativ oft mehrere Wege, die zum Ziel führen.

Beispiel 2: Reskalierungs-Trick ($q = 0$)

Oftmals taucht x innerhalb einer Funktion zusammen mit einem Vorfaktor auf, so z.B. in

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos(3x) dx \quad .$$

Gerne würden wir nur über $\cos x$ integrieren. Daher lautet unsere Substitution $s = 3x$.

Ein Funktionsgraph wird bei der Ersetzung aller x durch $3x$ um den Faktor 3 horizontal gestaucht. Hier machen wir genau das Umgekehrte. Wir ersetzen $3x$ durch die Variable s , was eine horizontale Dehnung um den Faktor 3 bewirkt (vgl. Abb. 6.2). Dem entsprechend müssen die Integrationsgrenzen verschoben werden, um das Integral immer noch "an denselben Stellen" im Verlauf des Graphen zu begrenzen. Durch die Dehnung wird die Fläche effektiv vergrößert. Dies wird durch die Veränderung des infinitesimalen Schrittes ausgeglichen:

$$\frac{ds}{dx} = s' = [3x]' = 3 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{ds}{s'} = \frac{ds}{3} \quad .$$

Insgesamt folgt für unser Integral:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos(3x) dx = \int_{3 \cdot \pi/6}^{3 \cdot \pi/3} \cos s \frac{ds}{3} = \frac{1}{3} \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \cos s ds = \frac{1}{3} \cdot \sin s \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{3} \cdot (0 - 1) = -\frac{1}{3}$$

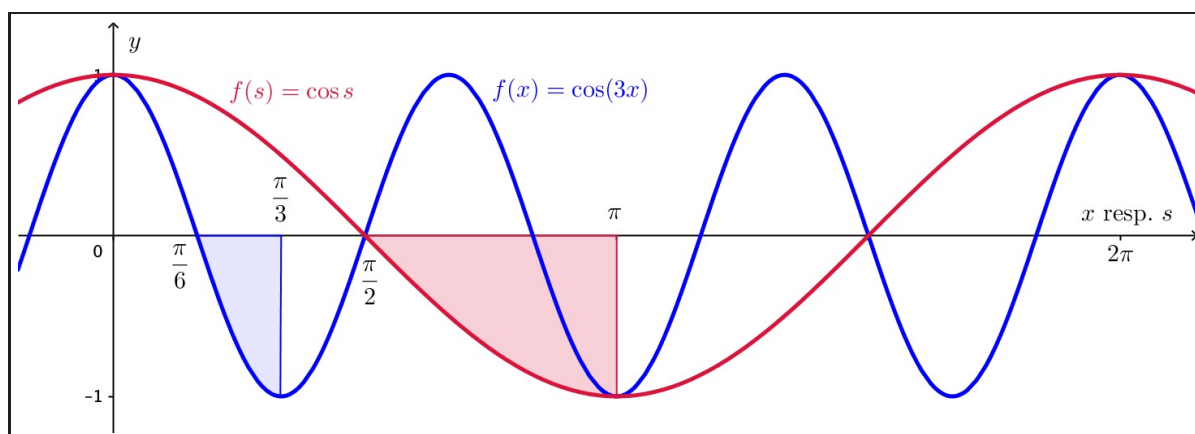


Abbildung 6.2: Die Substitution $s = 3x$ dehnt den Graphen von $f(x)$ horizontal um den Faktor 3. Die Integrationsgrenzen werden mitgestreckt. Dadurch wird offensichtlich die Fläche vergrößert, was beim Integral mit einer Division durch den Streckungsfaktor 3 ausgeglichen werden muss.

Beispiel 3: Lineare Substitution komplett ($m \neq 1, q \neq 0$)

Verschiebungs- und Reskalierungs-Trick sind nur Spezialfälle der am Anfang des Abschnittes beschriebenen allgemeinen linearen Substitution $s = mx + q$. Beim Verschiebungs-Trick ist $m = 1$, beim Reskalierungs-Trick ist $q = 0$. Im allgemeinen Fall ($m \neq 1$ und $q \neq 0$) Wird der Funktionsgraph sowohl horizontal verschoben, wie auch gestreckt oder gestaucht. Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{3}x - 4} \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{3}x - 4 \quad \Rightarrow \quad f(s) = \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad m = \frac{ds}{dx} = \frac{1}{3} \quad .$$

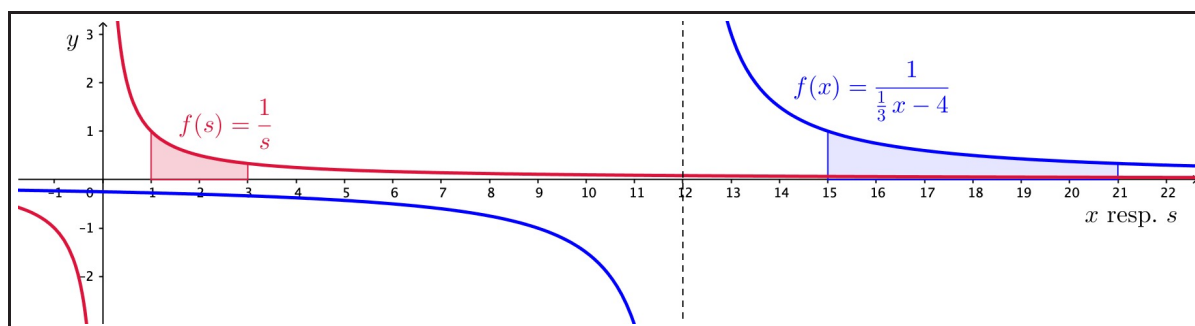


Abbildung 6.3: Die Substitution $s = \frac{1}{3}x - 4 = \frac{1}{3}(x - 12)$ verschiebt den Graphen horizontal um 12 nach links. Danach wird er mit dem Faktor 3 zur y -Achse hin gestaucht. Die Integrationsgrenzen müssen entsprechend mitverschoben werden. Durch die Stauchung wird die Fläche verkleinert, was beim Integral durch eine Multiplikation mit dem Stauchungsfaktor 3 ausgeglichen werden muss.

Damit finden wir beim folgenden Integral:

$$\int_{15}^{21} \frac{1}{\frac{1}{3}x - 4} dx = \frac{1}{\frac{1}{3}} \cdot \int_{\frac{1}{3} \cdot 15 - 4}^{\frac{1}{3} \cdot 21 - 4} \frac{1}{s} ds = 3 \cdot \int_1^3 \frac{1}{s} ds = 3 \cdot \ln |s| \Big|_1^3 = 3 \ln 3 \quad .$$

Wir bemerken, dass in dieser allgemeinen linearen Substitution die horizontale Verschiebung nicht einfach der Zahl q entspricht. Vielmehr muss man den Streckungs- resp. Stauchungsfaktor m ausklammern, um die effektive Verschiebung zu sehen. Sie ist gegeben durch $\frac{q}{m}$. Im Beispiel:

$$s = \frac{1}{3}x - 4 = \frac{1}{3}(x - 12) \quad \Rightarrow \quad \text{Verschiebung um 12 nach links}$$

Zum Schluss dieses Abschnittes sei angefügt, dass die lineare Substitution einem Erkennen von äusserer und innerer Ableitung entspricht. Anstatt lange zu theoretisieren zeige ich an einem Beispiel vor, wie das gemeint ist.

Beispiel 4: Das folgende Integral berechnen wir mit der linearen Substitution $s = 2x - \frac{\pi}{3}$:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/6} \cos s ds = \frac{1}{2} \cdot \sin s \Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4} \quad .$$

Andererseits erkennen wir aber auch, dass der Cosinus die Ableitung einer äusseren Funktion mit innerer Funktion $2x - \frac{\pi}{3}$ ist. Die konstante Ableitung der linearen inneren Funktion, also der Faktor 2, ist nicht sichtbar. D.h., es braucht einen zusätzlichen Faktor $\frac{1}{2}$, der diese innere Ableitung wegschafft. Die Stammfunktion lautet somit $\frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ und wir erhalten:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{1}{4}$$

Je mehr Übung man hat, desto selbstverständlicher werden derartige Rechnungen.

6.2 Partielle Integration

Eine weitere Integrationstechnik bedient sich der Produktregel beim Ableiten. Wir erinnern uns:

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad .$$

Integrieren wir über beide Seiten, so ergibt sich:

$$\int_a^b [u(x) \cdot v(x)]' dx = \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx \quad .$$

Nun steht auf der linken Seite aber das Integral über die Ableitung von $u(x) \cdot v(x)$. Eine Stammfunktion dazu ist $u(x) \cdot v(x)$ selber, woraus folgt:

$$[u(x) \cdot v(x)] \Big|_a^b = \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx \quad .$$

Durch Umstellen finden wir:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx \quad . \quad (6.2)$$

Diese Beziehung bezeichnet man als **partielle Integration**, weil von der Funktion $f(x) = u'(x) \cdot v(x)$ quasi nur der "Part" resp. Anteil $u'(x)$ integriert, also aufgeleitet wird. Damit ist die Integration von $f(x) = u'(x) \cdot v(x)$ noch nicht abgeschlossen, vielmehr hat man das Problem auf die Berechnung des Integrals über $g(x) = u(x) \cdot v'(x)$ verlagert. Dieses ist aber unter Umständen wesentlich leichter zu berechnen, sodass sich die partielle Integration ausbezahlt.

Die nachfolgenden Beispiele demonstrieren den Nutzen der partiellen Integration.

Beispiel 1: Das folgende Integral ist ein Kandidat für eine partielle Integration, weil wir in ihm ein Produkt zweier Funktionen entdecken:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx \quad .$$

Mit unseren bisherigen Methoden kommen wir hier nicht weiter. Der Faktor x vor der Cosinusfunktion erschwert die Sache. Nur $\cos x$ (oder $\sin x$) alleine wäre völlig unproblematisch. Genau dies können wir durch die partielle Integration erreichen, mit der das Integral in gewisser Weise ausgetauscht werden kann. Wir identifizieren $u'(x) = \cos x$ und $v(x) = x$. Dann sind $u(x) = \sin x$ und $v'(x) = 1$, sodass $u(x)v'(x) = \sin x$. Somit erhalten wir:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 0 + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + (0 - 1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

In die "andere Richtung" mit $u'(x) = x$ und $v(x) = \cos x$ bringt die partielle Integration keine Verbesserung:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \frac{1}{2} x^2 \cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} x^2 \sin x dx = ??$$

Beispiel 2: Gleich noch ein zweites Beispiel zur Veranschaulichung:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad .$$

Wir identifizieren: $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = \ln x$. Dann ist $u(x) = \ln x$ und $v'(x) = \frac{1}{x}$. Damit folgt:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 \Big|_1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 1^2 - 0^2 - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 1 - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad .$$

Nun könnte man meinen, dass wir uns im Kreis gedreht hätten, denn auf der rechten Seite taucht ja wieder dasselbe Integral auf wie zu Beginn. Tatsächlich haben wir aber etwas gewonnen, eben gerade weil wieder dasselbe Integral herauskommt. Wir können nun nämlich dieses Integral auf beiden Seiten hinzuaddieren und erhalten so direkt:

$$2 \cdot \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \quad .$$

6.3 Spezielle bestimmte Integrale

Ab und zu kommen Integrale vor, deren Herleitung den Rahmen der uns zur Verfügung stehenden Mathematik sprengt. Hier eine unvollständige Liste solcher Integrale:

Exponentialintegral: $\int_0^\infty x^n e^{-x/a} dx = n! a^{n+1}$ mit $a > 0, n \in \mathbb{N}$

Gauss'sche Integrale: $\int_0^\infty e^{-x^2/a^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{a}{2}$ mit $a > 0$

$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2/a^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$ mit $a > 0, n \in \mathbb{N}$

$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2/a^2} dx = \frac{n!}{2} a^{2n+2}$ mit $a > 0, n \in \mathbb{N}$

Trigo-Integrale: $\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$

$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$

$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$

$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ mit $a > 0$

$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

Anhang A

Liste gängiger Stammfunktionen

Hier eine Liste unbestimmter Integrale. Die Einträge mit Stern * wollen wir auswendig präsent haben. Natürlich gibt es weitaus umfangreichere Integralsammlungen. Ich habe mich hier auf einige sehr grundlegende Integrale eingeschränkt, die in unseren Übungen vorkommen.

Allgemeine Potenzfunktion:*	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad \text{mit } n \in \mathbb{R}, n \neq -1$
Reziprozitätsfunktion:*	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
Inverse Quadratfunktion:*	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
Wurzelfunktion:*	$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$
Exponentialfunktion zur Basis e :*	$\int e^x dx = e^x + C$
Allgemeine Exponentialfunktion:*	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^+$
Logarithmus naturalis:	$\int \ln x dx = x (\ln x - 1) + C$
Allgemeine Logarithmusfunktion:	$\int \log_a x dx = x (\log_a x - \log_a e) + C \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^+$
Sinusfunktion:*	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
Cosinusfunktion:*	$\int \cos x dx = \sin x + C$
Tangensfunktion:	$\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$
Quadratische Sinusfunktion:	$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + C$
Quadratische Cosinusfunktion:	$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C$
Halbkreisfunktion:	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C \quad (a \in \mathbb{R}^+)$
Inverse $(x^2 + 1)$ -Funktion:	$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + C$