

155c: Prüfung Integralrechnung I – Lösungen

1. Für die zwei Integrale berechnen wir: (2 P+3 P)

$$(a) \int_2^8 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_2^8 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_2^8 \stackrel{!}{=} 2\sqrt{x} \Big|_2^8 = 2(\sqrt{8} - \sqrt{2}) = 2(2\sqrt{2} - \sqrt{2}) \stackrel{!}{=} \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

$$(b) \int_{-2}^2 (4x^3 + 3x^2 - 2x - 1) dx \stackrel{0.5}{=} \int_{-2}^2 (3x^2 - 1) dx \stackrel{0.5}{=} 2 \cdot \int_{-2}^2 (3x^2 - 1) dx \\ \stackrel{!}{=} 2 \cdot [x^3 - x] \Big|_0^2 = 2(8 - 2 - 0) \stackrel{!}{=} \underline{\underline{12}}$$

Bei (b) empfiehlt es sich, sowohl die Punktsymmetrie zum Ursprung von $4x^3$ und von $-2x$, wie auch die Achsensymmetrie von $3x^2 - 1$ auszunutzen, um vorab das Integral massgeblich zu vereinfachen.

2. (a) Hier können wir ohne Umschweife drauf los rechnen: (2 P)

$$A = \int_0^{3\pi/4} \sin x \stackrel{!}{=} -\cos x \Big|_0^{3\pi/4} = -\cos \frac{3\pi}{4} + \cos 0 \stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$$

(b) Die Gesamtfläche besteht aus zwei Teilflächen, von denen eine unterhalb der x -Achse liegt. Sie lässt sich somit nicht direkt mit einem Integral von $\frac{1}{2}$ bis 2 berechnen, sondern wir müssen die beiden Teilflächen separat bestimmen: (4 P)

$$A_1 = \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) dx \\ \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{x} - x \right] \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{2} \left(-1 - 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(-2 + 2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$A_2 = \left| \int_1^2 \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \right) dx \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) dx \right| \\ = \left| \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{x} - x \right] \Big|_1^2 \right| = \left| \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 2 + 1 + 1 \right) \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right| \stackrel{!}{=} \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$\Rightarrow A \stackrel{0.5}{=} A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \stackrel{0.5}{=} \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Wer nur ein Integral von $\frac{1}{2}$ berechnet, erhält dafür korrekterweise den Wert 0 – weil beide Teilflächen gleich gross sind, die eine aber unterhalb der x -Achse liegt. Dafür gibt es bei korrekter Ausführung maximal 2 Punkte.

3. Die zwei quadratischen Funktionen lauten: (2 P)

$$f(x) \stackrel{0.5}{=} \frac{1}{4}(x-2)^2 = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) \stackrel{0.5}{=} \frac{1}{4}x^2 - x + 1 \quad \text{und} \quad g(x) \stackrel{!}{=} 1 - \frac{1}{4}x^2$$

Damit erhalten wir für die Zwischenfläche: (2 P)

$$A \stackrel{0.5}{=} \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \right) \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x \right) dx \\ \stackrel{!}{=} \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right] \Big|_0^2 = -\frac{8}{6} + \frac{4}{2} - 0 = -\frac{4}{3} + 2 \stackrel{0.5}{=} \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$