Potenzen mit natürlichen Exponenten

*Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die **n-te Potenz** von $a \in \mathbb{R}$ gegeben durch:*

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

*a^n als Ganzes heisst **Potenz**. a ist die **Basis** und n der **Exponent**.*

Aus diesen offensichtlich richtigen Rechnungen wollen wir allgemein folgern:

Potenzregeln Teil I

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \text{und} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Bei der Multiplikation resp. Division von Potenzen mit gleichen Basen dürfen die Exponenten addiert resp. subtrahiert werden.

In weiteren Beispielen werfen diese Regeln aber Fragen auf:

Wir fordern: **Die Potenzregeln sollen allgemeine Gültigkeit haben!** Daher legen wir fest:

Sinnvolle Definitionen

$$a^0 := 1 \qquad \text{inkl.} \quad 0^0 := 1 \qquad \text{und} \qquad a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

Ab sofort dürfen wir also mit negativen Exponenten rechnen, und zwar genau gleich, wie wir das mit positiven Exponenten tun. Weiter folgt sofort:

$$\frac{1}{5^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{5^3}} = 5^3 \qquad \text{also allgemein:} \quad \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n$$

Merke: Ich darf eine Potenz vom Zähler in den Nenner eines Bruchs umplatzieren (oder umgekehrt), muss dabei aber einfach das Vorzeichen des Exponenten ändern.

Potenzregeln Teil II

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \text{und} \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Bei der Multiplikation resp. Division von Potenzen mit gleichen Exponenten dürfen die Basen multipliziert resp. dividiert werden.

Potenzregeln Teil III

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

Beim Potenzieren einer Potenz dürfen die Exponenten multipliziert werden.
Def.: *Mit a^{m^n} ohne Klammersetzung ist $a^{(m^n)}$ gemeint, also:*

$$a^{m^n} := a^{(m^n)} \neq \left(a^m\right)^n \quad !!!$$