LÖSUNGEN SERIE 4: Winkel und Winkelfunktionen im Bogenmass

Trigonometrie II / Schwingungen und Wellen / Klasse 155c / AGe

1. Es ergeben sich folgende Entsprechungen:

(a) $120° \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$ (b) $7\pi \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{1260°}}$ (c) $135° \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}$

(d) $\frac{7\pi}{4} \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{315°}}$ (e) $-90° \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$ (f) $\frac{5\pi}{6} \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{150°}}$

(g) $-900° \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{-5\pi}}$ (h) $-\frac{11\pi}{12} \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{-165°}}$ (i) $54° \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{\frac{3\pi}{10}}}$

(j) $\frac{22\pi}{15} \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{264°}}$ (k) $5445° \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{\frac{121\pi}{4}}}$ (l) $\frac{15\pi}{8} \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{337\frac{1}{2}°}}$

2. Wir finden die folgenden Werte:

(a) $\cos\pi = \underline{\underline{-1}}$ (b) $\tan\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{1}}$ (c) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

(d) $\tan\frac{29\pi}{6} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{3}}}$ (e) $\sin\frac{13\pi}{4} = \sin\frac{5\pi}{8} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

(f) $\cos(-9\pi) = \cos\pi = \underline{\underline{-1}}$

3. Nach Einsetzen der Werte vereinfachen wir:

$$\frac{\tan\frac{13\pi}{6} - \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}}{\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}+12+6+6\sqrt{6}}{2-12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{18+8\sqrt{6}}{-10} = \underline{\underline{-\frac{9+4\sqrt{6}}{15}}}$$

4. Wir erhalten die folgenden Winkel:

(a) $\arctan\sqrt{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$ (b) $\arcsin\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$ (c) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}$

(d) $\arcsin(-1) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$ (e) $\arctan(-1) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{4}}}$ (f) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$

5. Es ergeben sich die folgenden Lösungsmengen:

(a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ x = \frac{\pi}{3} \pm k \cdot 2\pi \text{ oder } x = \frac{2\pi}{3} \pm k \cdot 2\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}}}$

(b) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ x = -\frac{\pi}{6} \pm k \cdot \pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}}}$

(c) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ x = \pm\frac{3\pi}{4} \pm k \cdot 2\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}}}$

(d) $\sqrt{3}\sin x = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ x = \frac{\pi}{6} \pm k \cdot \pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}}}$

(e) $\tan x = 2\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 2 \right) = 0$

$\Rightarrow \quad \sin x = 0 \text{ oder } \cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ x = k \cdot \pi \text{ oder } x = \pm\frac{\pi}{3} \pm k \cdot 2\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}}}$

(f) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ x = \frac{5\pi}{12} \pm k \cdot \pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}}}$

Bei (f) kennen wir bis anhin keinen rechnerischen Lösungsweg, aber $\cos(x - \frac{\pi}{3})$ ist eine um $\frac{\pi}{3}$ ($\widehat{=} 60°$) nach rechts verschobene Cosinuskurve, die wir mit einer Sinuskurve ins Koordinatensystem einzeichnen und so die Schnittpunkte aufspüren können: