Lösungen Exp&Log 4: Exponential- und Logarithmengleichungen

Klasse 155c / AGe

1. Oft kann man noch weiter vereinfachen, auch wenn die Lösung im Prinzip schon gefunden wurde:

(a) $e^x = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \ln(\pi)}}$

(b) $e^{2x-5} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 5 = \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{5+\ln(3)}{2}}}$

(c) $10^{\frac{x}{x+1}} = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+1} = \log\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x - x\log\left(\frac{4}{5}\right) = \log\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{\log\left(\frac{4}{5}\right)}{1-\log\left(\frac{4}{5}\right)}}}$

(d) $7^{\sqrt{x}} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = \log_7(3) \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{\left(\log_7(3)\right)^2}}$

(e) $e^{-x} = 100 \quad \Leftrightarrow \quad -x = \ln(100) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -\ln(100)}}$

(f) $0.8^x = 0.005 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \log_{0.8}(0.005) = \log_{\frac{4}{5}}\left(\frac{1}{200}\right) = \log_{\frac{5}{4}}(200)}}$

(g) $8 \cdot 3^{-x} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{-x} = \frac{5}{8} \quad \Leftrightarrow \quad -x = \log_3\left(\frac{5}{8}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -\log_3\left(\frac{5}{8}\right) = \log_3\left(\frac{8}{5}\right)}}$

(h) $4^{1-x} = 0.6 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x = \log_4(0.6) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1 - \log_4(0.6) = 1 + \log_4\left(\frac{5}{3}\right)}}$

(i) $3^{-\frac{1}{x}} = 20 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x} = \log_3(20) \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{-\frac{1}{\log_3(20)}}}$

(j) $2^x = 7^{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_2\left(7^{x-2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = (x-2)\log_2(7) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{2\log_2(7)}{\log_2(7)-1}}}$

(k) $7 \cdot 3^{1-2x} = 4^{2x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \log_3\left(7 \cdot 3^{1-2x}\right) = \log_3\left(4^{2x+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \log_3(7) + 1 - 2x = (2x+1)\log_3(4)$

$\Leftrightarrow \quad \log_3(7) + 1 - \log_3(4) = 2x + 2x\log_3(4) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{1 + \log_3(4) + \log_3(7)}{2 + 2\log_3(4)}}}$

(l) $e^{-\ln x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$

Anmerkung: Manche Leute würden bei der Lösung von Aufgabe (c) aus "ästhetischen Gründen" noch weiter umformen, z.B. mittels Basiswechselformel:

$$\frac{\log\left(\frac{4}{5}\right)}{1-\log\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{\frac{\ln(4)}{\ln(5)}}{1-\frac{\ln(4)}{\ln(5)}} = \frac{\frac{\ln(4)}{\ln(5)}}{\frac{\ln(5)-\ln(4)}{\ln(5)}} = \underline{\underline{\frac{\ln(4)}{\ln(5)-\ln(4)}}}$$

Das macht die Sache schon noch etwas übersichtlicher. Wir wollen das aber nicht bei jeder Aufgabe so machen. Hingegen sollten wir bei Bedarf zeigen können, dass die beiden Lösungen übereinstimmen.

Gleichermassen könnten wir bei den Aufgabe (j) weiter umformen:

$$\text{(j)} \quad x = \frac{2\log_2(7)}{\log_2(7)-1} = \frac{2\cdot\frac{\ln(7)}{\ln(2)}}{\frac{\ln(7)}{\ln(2)}-1} = \frac{\frac{2\ln(7)}{\ln(2)}}{\frac{\ln(7)-\ln(2)}{\ln(2)}} = \underline{\underline{\frac{2\ln(7)}{\ln(7)-\ln(2)}}}$$

Auch bei (k) könnten wir noch umformen, aber das ist effektiv ein bisschen zuviel Aufwand.

2. Bei der Lösung einer Logarithmengleichung muss jeweils *exponiert* werden, um den Logarithmus zu "neutralisieren" und die Unbkeannte x freizustellen. Dabei muss man allenfalls jeweils vor dem Exponieren passend zusammenfassen:

   (a) $\log(100x) = 3\log(1000) \quad\Leftrightarrow\quad \log(100x) = 9 \quad\Leftrightarrow\quad 100x = 10^9 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x = 10^7}}$

   (b) $3\log_2(x) = 2\log_2(27) \quad\Leftrightarrow\quad \log_2\big(x^3\big) = \log_2\big(27^2\big) \quad\Leftrightarrow\quad x^3 = 27^2 \quad\Leftrightarrow\quad x = \sqrt[3]{27^2} = \underline{\underline{9}}$

   (c) $\log_2(x) = \log_4(10) \quad\Leftrightarrow\quad \log_2(x) = \dfrac{\log_2(10)}{\log_2(4)} = \dfrac{\log_2(10)}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 2\log_2(x) = \log_2(10)$

   $\Leftrightarrow\quad \log_2(x^2) = \log_2(10) \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = 10 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x = \sqrt{10}}}$

   (d) $\log_3(16) = \log_x(256) \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{\log_{16}(16)}{\log_{16}(3)} = \dfrac{\log_{16}(256)}{\log_{16}(x)} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{\log_{16}(3)} = \dfrac{2}{\log_{16}(x)}$

   $\Leftrightarrow\quad \log_{16}(x) = 2\log_{16}(3) \quad\Leftrightarrow\quad \log_{16}(x) = \log_{16}(9) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x = 9}}$

   (e) $\log_4\big(\log_2(x) - 1\big) = \log_{16}(9) \quad\Leftrightarrow\quad \log_4\big(\log_2(x) - 1\big) = \dfrac{\log_4(9)}{\log_4(16)} = \dfrac{1}{2}\log_4(9) = \log_4(3)$

   $\Leftrightarrow\quad \log_2(x) - 1 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad \log_2(x) = 4 \quad\Leftrightarrow\quad x = 2^4 = \underline{\underline{16}}$

   (f) $2^{\log_4(x)} = 7 \quad\Leftrightarrow\quad \log_4(x) = \log_2(7) = \dfrac{\log_4(7)}{\log_4(2)} = \dfrac{\log_4(7)}{\frac{1}{2}} = 2\log_4(7) = \log_4(49) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x = 49}}$

3. Wir überprüfen:

   (a) $-\dfrac{1}{\log_3(20)} = -\dfrac{1}{\frac{\ln(20)}{\ln(3)}} = -\dfrac{\ln(3)}{\ln(20)} = \dfrac{-\ln(3)}{\ln(20)} \quad \checkmark$

   (b) $\dfrac{2\log_2(7)}{\log_2(7) - 1} = \dfrac{2\cdot\frac{\ln(7)}{\ln(2)}}{\frac{\ln(7)}{\ln(2)} - 1} = \dfrac{\frac{2\ln(7)}{\ln(2)}}{\frac{\ln(7)-\ln(2)}{\ln(2)}} = \dfrac{2\ln(7)}{\ln(7) - \ln(2)} = \dfrac{2\ln(7)}{\ln\big(\frac{7}{2}\big)} \quad \checkmark$

   (c) $\dfrac{\log\big(\frac{4}{5}\big)}{1 - \log\big(\frac{4}{5}\big)} = \dfrac{\log\big(\frac{4}{5}\big)}{\log(10) + \log\big(\frac{5}{4}\big)} = \dfrac{\log\big(\frac{4}{5}\big)}{\log\big(\frac{50}{4}\big)} = \dfrac{\frac{\ln(\frac{4}{5})}{\ln(10)}}{\frac{\ln(\frac{25}{2})}{\ln(10)}} = \dfrac{\ln\big(\frac{4}{5}\big)}{\ln\big(\frac{25}{2}\big)}$

   und $\dfrac{\ln(10)}{\ln\big(\frac{25}{2}\big)} - 1 = \dfrac{\ln(10) - \ln\big(\frac{25}{2}\big)}{\ln\big(\frac{25}{2}\big)} = \dfrac{\ln\big(10\cdot\frac{2}{25}\big)}{\ln\big(\frac{25}{2}\big)} = \dfrac{\ln\big(\frac{4}{5}\big)}{\ln\big(\frac{25}{2}\big)} \quad \checkmark$

   (d) $\dfrac{1 + \log_3\big(\frac{7}{4}\big)}{2\big(1 + \log_3(4)\big)} = \dfrac{\log_3(3) + \log_3\big(\frac{7}{4}\big)}{2\big(\log_3(3) + \log_3(4)\big)} = \dfrac{\log_3\big(\frac{21}{4}\big)}{2\log_3(12)} = \dfrac{\frac{\ln(\frac{21}{4})}{\ln(3)}}{2\cdot\frac{\ln(12)}{\ln(3)}} = \dfrac{\ln\big(\frac{21}{4}\big)}{2\ln(12)} \quad \checkmark$

4. Es ergeben sich die folgenden Lösungen:

(a) $15^{\frac{1}{x}} = 10^3 \quad \Leftrightarrow \quad \log\big(15^{\frac{1}{x}}\big) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}\log(15) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{\log(15)}{3}}}$

(b) $2^{3-4x} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 4x = \log_2(5) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{3 - \log_2(5)}{4}}}$

(c) $6^{3x+1} = 5^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 1 = \log_6\big(5^{2x}\big) = 2x\log_6(5) \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2x\log_6(5) = -1$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{1}{2\log_6(5) - 3}}}$

(d) $4 \cdot 5^{2-x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5^{2-x} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 2 - x = \log_5\left(\frac{3}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2 - \log_5\left(\frac{3}{4}\right)}}$

(e) $e^{\frac{1}{x}} = \pi^{\frac{2}{x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \ln\left(\pi^{\frac{2}{x^2}}\right) = \frac{2}{x^2}\,\ln(\pi) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 2\ln(\pi)}}$

(f) $10^4 \cdot \pi^x = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \pi^x = \frac{12}{10\,000} \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_\pi\left(\frac{12}{10\,000}\right) = \underline{\underline{\log_\pi\left(\frac{3}{2500}\right)}}$

(g) $\log_2(x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^4 = \underline{\underline{16}}$

(h) $\log_x\big(\sqrt[6]{a}\big) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}\log_x(a) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \log_x(a) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = a \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \sqrt[3]{a}}}$

(i) $\log_4\big(|x|\big) < 2 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2^4 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} =]-16; 16[}}$

(j) $x^{\log(x)} = 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad \log\big(x^{\log(x)}\big) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \log(x)\cdot\log(x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \big(\log(x)\big)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \quad \log(x) = \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^{\pm 2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{100; \frac{1}{100}\right\}}}$

(k) $\log(9x+5) - \log(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{9x+5}{x}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9x+5}{x} = 10^1$

$\Leftrightarrow \quad 9x + 5 = 10x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 5}}$

(l) $\log_{\sqrt{3}}(x) + \log_3(x) = 15 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log_3(x)}{\log_3(\sqrt{3})} + \log_3(x) = 15 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log_3(x)}{\frac{1}{2}} + \log_3(x) = 15$

$\Leftrightarrow \quad 3\log_3(x) = 15 \quad \Leftrightarrow \quad \log_3(x) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 3^5 = 243}}$

Manchmal sehen solche Lösungen sehr "komisch" aus. Da kann man sich ab und zu fragen, ob sie denn auch stimmen. In diesem Fall darf man auch mal die Lösung zurückeinsetzen und so überprüfen, ob die Lösung die Gleichung erfüllt. Das ist aber oft gar nicht so trivial. Hier zwei Beispiele:

Aufgabe 4.(c): Die ermittelte Lösung lautete $x = \frac{1}{2\log_6(5)-3}$. Das Zurückeinzusetzen dieser Lösung erfordert schon nochmal etwas Arbeit:

Linke Seite: $6^{3x+1} = 6^{\frac{3}{2\log_6(5)-3}+1} = 6^{\frac{3+2\log_6(5)-3}{2\log_6(5)-3}} = 6^{\frac{2\log_6(5)}{2\log_6(5)-3}}$

Rechte Seite: $5^{2x} = 5^{\frac{2}{2\log_6(5)-3}}$

Nun können wir beide Seiten Logarithmieren, idealerweise mit $\log_6(\ldots)$:

Linke Seite: $\log_6\left(6^{\frac{\log_6(5)}{2\log_6(5)-3}}\right) = \frac{\log_6(5)}{2\log_6(5)-3}$

Rechte Seite: $\log_6\left(5^{\frac{2}{2\log_6(5)-3}}\right) = \frac{2}{2\log_6(5)-3}\cdot\log_6(5) = \frac{\log_6(5)}{2\log_6(5)-3} \quad \checkmark$

Aufgabe 4.(j): Hier ist das Zurückeinsetzen der Lösungen relativ einfach und gleichzeitig spannend:

$$x^{\log(x)} = 100^{\log(100)} = 100^2 = 10\,000 = 10^4 \quad \checkmark$$

$$x^{\log(x)} = \left(\frac{1}{100}\right)^{\log\left(\frac{1}{100}\right)} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-2} = 100^2 = 10\,000 = 10^4 \quad \checkmark$$

Aufgabe 4.(l): Und nochmals ein interessantes Zurückeinsetzungsbeispiel:

$$\log_{\sqrt{3}}(x) + \log_3(x) = \log_{\sqrt{3}}\big(3^5\big) + \log_3\big(3^5\big) = 5\log_{\sqrt{3}}(3) + 5 = 5 \cdot 2 + 5 = 15 \quad \checkmark$$

5. Wir lösen wie folgt:

(a) $3\log_a(x) = 2\log_a(8) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a(x) = \frac{2}{3}\log_a(8) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a(x) = \log_a\big(8^{\frac{2}{3}}\big)$

$\Leftrightarrow \quad \log_a(x) = \log_a(4) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 4}}$

(b) $\log_a(x+4) + \log_a(x) = 2\log_a(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a\big(x(x+4)\big) = \log_a\big((x+1)^2\big)$

$\Leftrightarrow \quad x(x+4) = (x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x = x^2 + 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$

(c) $\frac{1}{2}\log_a(x+1) = \log_a(10) - \log_a(2) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a\big(\sqrt{x+1}\big) = \log_a(5) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} = 5$

$\Rightarrow \quad x + 1 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 24}}$

(d) $\log\big(\sqrt{x+1}\big) + 3\log\big(\sqrt{x-1}\big) = 2 + \log\big(\sqrt{x^2-1}\big)$

$\Leftrightarrow \quad \log\big(\sqrt{x+1}\big) + \log\Big(\big(\sqrt{x-1}\big)^3\Big) = \log(100) + \log\big(\sqrt{x^2-1}\big)$

$\Leftrightarrow \quad \log\Big(\sqrt{x+1} \cdot \big(\sqrt{x-1}\big)^3\Big) = \log\big(100\sqrt{x^2-1}\big)$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} \cdot \big(\sqrt{x-1}\big)^3 = 100 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$

$\Rightarrow \quad \big(\sqrt{x-1}\big)^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 101}}$

6. Manchmal werden nun längere und kniffligere Lösungswege benötigt:

(a) $\sqrt{x^{\log(\sqrt{x})}} = 10 \quad \Rightarrow \quad x^{\log(\sqrt{x})} = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \log\Big(x^{\log(\sqrt{x})}\Big) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log\big(\sqrt{x}\big) \cdot \log(x) = 2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\log(x) \cdot \log(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \big(\log(x)\big)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \log(x) = \pm 2$

$\Leftrightarrow \quad x = 10^{\pm 2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{100; \frac{1}{100}\right\}}}$

(b) $x^{\sqrt{x}} = \big(\sqrt{x}\big)^x \quad \Leftrightarrow \quad \log_x\Big(x^{\sqrt{x}}\Big) = \log_x\Big(\big(\sqrt{x}\big)^x\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \cdot \log_x(x) = x \cdot \log_x\big(\sqrt{x}\big)$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \cdot \log_x(x) = x \cdot \frac{1}{2}\log_x(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \cdot \log_x(x) - x \cdot \frac{1}{2}\log_x(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \cdot \log_x(x) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 0$

<u>Fall 1:</u> $\sqrt{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = 0}$ <u>Fall 2:</u> $\log_x(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = x^0 = 1}$

<u>Fall 3:</u> $\sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{0, 1, 4\}}}$

Dass die Spezialfälle $x = 0$ und $x = 1$ gültige Lösungen sind, sieht man eigentlich von Anfang an. Da empfiehlt es sich, diese beiden Lösungen schon zu Beginn zu notieren und danach nur noch nach weiteren Lösungen zu suchen. Damit vermeidet man diese mühsame Fallunterscheidung.

(c) $5^{x-1} + 6^x = 6^{x+1} - 5^x \quad \Leftrightarrow \quad 5^{x-1} + 5^x = 6^{x+1} - 6^x \quad \Leftrightarrow \quad 5^x\big(5^{-1} + 1\big) = 6^x\big(6 - 1\big)$

$$\Leftrightarrow \quad 5^x \cdot \frac{6}{5} = 6^x \cdot 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{5}{6}\right)^x = \frac{25}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \log_{\frac{5}{6}}\left(\frac{25}{6}\right)}}$$

(d) $10^x + 10^{2x} = 600 \quad \Leftrightarrow \quad \big(10^x\big)^2 + 10^x - 600 = 0 \quad \longrightarrow$ Substitution: $y = 10^x$

$$\Rightarrow \quad y^2 + y - 600 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y + 25)(y - 24) = 0$$

$\Rightarrow \quad y_1 = -25 \overset{!}{=} 10^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log(-25) \quad \Rightarrow$ geht nicht!

$$\Rightarrow \quad y_2 = 24 \overset{!}{=} 10^x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \log(24)}}$$

(e) $e^x = 1 + e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 1 - e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \cdot e^x - 1 \cdot e^x - e^{-x} \cdot e^x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \big(e^x\big)^2 - e^x - 1 = 0 \quad \longrightarrow$ Substitution: $y = e^x$

$$\Rightarrow \quad y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow \quad y_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \overset{!}{=} e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \quad \Rightarrow$ geht nicht, weil $1 - \sqrt{5} < 0$!

$$\Rightarrow \quad y_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \overset{!}{=} e^x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}}$$

(f) $x^{\log(x)} = x \cdot 10^{12} \quad \Leftrightarrow \quad \log\Big(x^{\log(x)}\Big) = \log\big(x \cdot 10^{12}\big) \quad \Leftrightarrow \quad \log(x) \cdot \log(x) = \log(x) + \log\big(10^{12}\big)$

$$\Leftrightarrow \quad \big(\log(x)\big)^2 = \log(x) + 12 \quad \Leftrightarrow \quad \big(\log(x)\big)^2 - \log(x) - 12 = 0$$

$\longrightarrow$ Substitution: $y = \log(x) \quad \Rightarrow \quad y^2 - y - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y + 3)(y - 4) = 0$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -3 \overset{!}{=} \log(x) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = 4 \overset{!}{=} \log(x) \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 10^4 = 10\,000 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{1000}; 10\,000\right\}}}$$

Gerade bei der letzten Aufgabe (f) ist eine Kontrolle auch wieder interessant:

$x_1: \quad x^{\log(x)} = \big(10^{-3}\big)^{\log\left(10^{-3}\right)} = \big(10^{-3}\big)^{-3} = 10^9$ und $x \cdot 10^{12} = 10^{-3} \cdot 10^{12} = 10^9 \quad \checkmark$

$x_2: \quad x^{\log(x)} = \big(10^4\big)^{\log\left(10^4\right)} = \big(10^4\big)^4 = 10^{16}$ und $x \cdot 10^{12} = 10^4 \cdot 10^{12} = 10^{16} \quad \checkmark$