Prüfung 2 Exponentialfunktionen – Lösungen

1. *The Trouble with Tribbles (4 Punkte)*

   (a) Für den stündlichen Wachstumsfaktor a_h ergibt sich: (1 P)

   $$a_\mathrm{h} = 13^{\frac{1\,\mathrm{h}}{11\,\mathrm{h}}} \approx 1.2626$$

   Somit folgt für das stündliche prozentuale Wachstum p_h: (0.5 P)

   $$p_\mathrm{h} = a_\mathrm{h} - 1 \approx 1.2626 - 1 = 0.2626 = \underline{\underline{26.26\,\%}}$$

   (b) Zunächst sollten wir den 1-täglichen Wachstumsfaktor a_d bestimmen: (1.5 P)

   $$a_\mathrm{d} = a_\mathrm{h}^{24} = 1.2626^{24} = 269.39 \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 \cdot a_\mathrm{d}^{\frac{t}{1\,\mathrm{d}}} = \underline{\underline{4 \cdot 269.39^{\frac{t}{1\,\mathrm{d}}}}}$$

   (c) Wir können mit dem stündlichen Wachstumsfaktor rechnen: (1 P)

   $$N(55\,\mathrm{h}) = N_0 \cdot a_\mathrm{h}^{\frac{55\,\mathrm{h}}{1\,\mathrm{h}}} = 4 \cdot 1.2626^{55} \approx \underline{\underline{1\,484\,835}}$$

2. *Höhenformel – wo beginnt der Weltraum? (5 Punkte)*

   (a) Wir setzen die barometrische Höhenformel mit einem Millionstel bar gleich und erhalten so für die Höhe, die in diesem Modell dem Übergang zum Weltraum entspricht: (2.5 P)

   $$\begin{aligned}
   & p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H_s}} \overset{!}{=} \frac{1}{1\,000\,000}\,\mathrm{bar} && |\ \text{Parameterwerte einsetzen} \\
   \Rightarrow\quad & 1.0\,\mathrm{bar} \cdot e^{-\frac{h}{8.4\,\mathrm{km}}} = \frac{1}{1\,000\,000}\,\mathrm{bar} && |\ : 1.0\,\mathrm{bar} \\
   \Leftrightarrow\quad & e^{-\frac{h}{8.4\,\mathrm{km}}} = \frac{1}{1\,000\,000} && |\ \ln(\ldots) \\
   \Leftrightarrow\quad & -\frac{h}{8.4\,\mathrm{km}} = \ln\left(\frac{1}{1\,000\,000}\right) && |\ \cdot(-8.4\,\mathrm{km}) \\
   \Leftrightarrow\quad & h = -8.4\,\mathrm{km} \cdot \ln\left(\frac{1}{1\,000\,000}\right) \approx \underline{\underline{116\,\mathrm{km}}}
   \end{aligned}$$

   (b) Die Halbwertshöhe ist der Höhenunterschied, über den hinweg sich der Luftdruck jeweils halbiert. (Dabei spielt es keine Rolle, von welcher Ausgangshöhe man ausgeht.) (1 P)

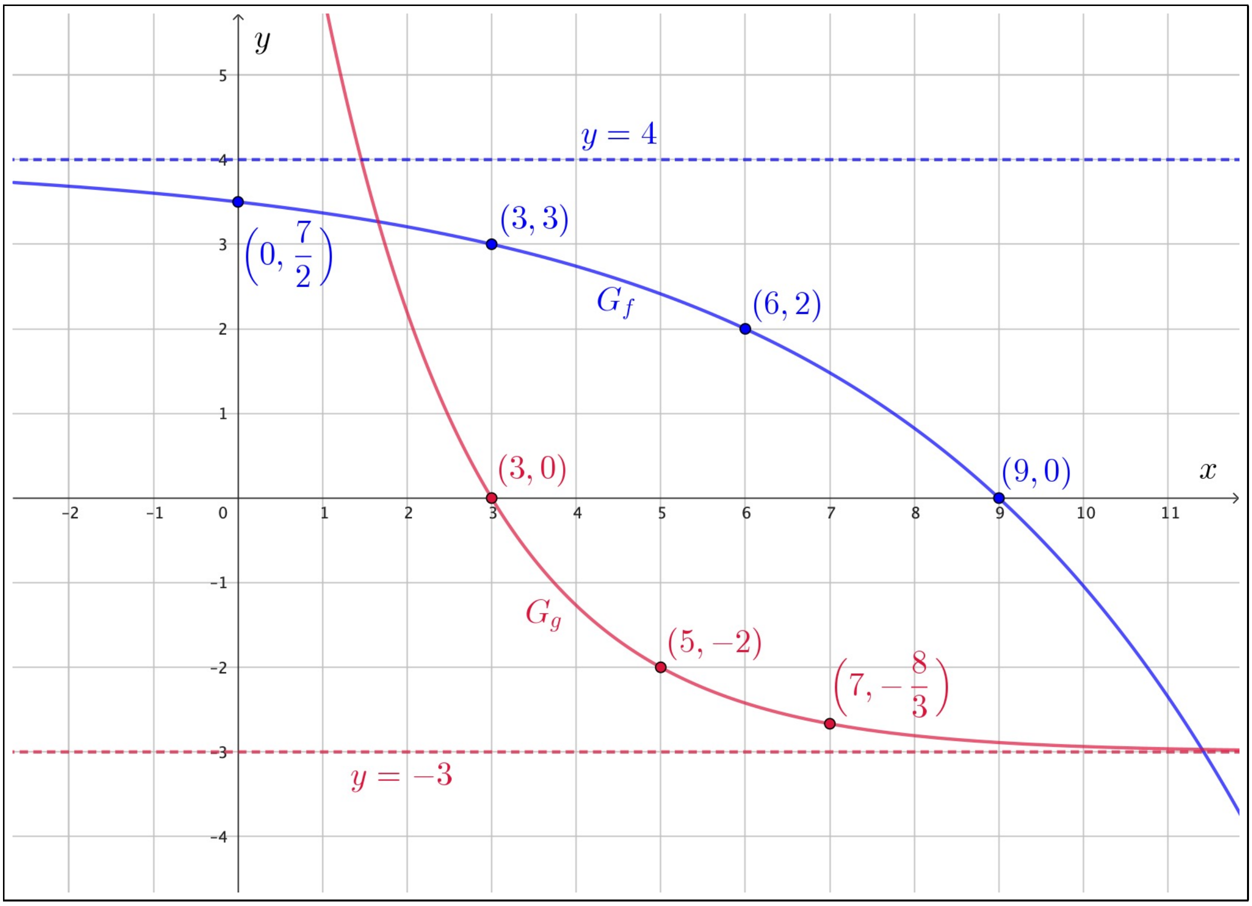
   Bem.: Keine Punkte gibt es hier, wenn man schreibt: "Die Halbwertshöhe ist die Höhe, auf der der Luftdruck halb so gross ist wie am Boden." Dies ist nicht die Idee einer Halbwertsangabe bei einer Exponentialfunktion. Nach dieser Beschreibung gäbe es bei jeder beliebigen Art von Luftdruckabnahme eine Halbwertshöhe. Die eigentliche Bedeutung dieses Ausdrucks muss aber eben mit einer Eigenschaft der exponentiellen Abnahme in Verbindung gebracht werden!

   Wenn wir die Halbwertshöhe in den Exponentialfaktor einsetzen, muss sich $\frac{1}{2}$ ergeben. Daraus folgt für die Halbwertshöhe $H_{1/2}$: (1.5 P)

   $$\begin{aligned}
   & e^{-\frac{H_{1/2}}{H_s}} \overset{!}{=} \frac{1}{2} && |\ \ln(\ldots) \\
   \Leftrightarrow\quad & -\frac{H_{1/2}}{H_s} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) && |\ \cdot(-H_s) \\
   \Leftrightarrow\quad & h = -H_s \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -8.4\,\mathrm{km} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx \underline{\underline{5.8\,\mathrm{km}}}
   \end{aligned}$$

3. *Funktionsgraphen skizzieren (4 Punkte)*

   Für die beiden Funktionsgraphen erhalten wir: (je 2 P)



4. *Kühles Bier (4 Punkte)*

   (a) Die Zieltemperatur des kühler werdenden Bieres sind die $4\,°\mathrm{C}$ (Asymptote). Folglich lautet der Ansatz für die Temperaturfunktion: (0.5 P)

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot a^t + 4\,°\mathrm{C}$$

   Nun können wir die beiden Punkte einsetzen und aus dem so entstehenden Gleichungssystem die beiden Parameter ϑ_0 und a bestimmen: (2 P)

$$\left|\begin{array}{c} \vartheta(15) \stackrel{!}{=} 12 \\ \vartheta(35) \stackrel{!}{=} 8 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{c} \vartheta_0 \cdot a^{15} + 4 = 12 \\ \vartheta_0 \cdot a^{35} + 4 = 8 \end{array}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{c} \vartheta_0 \cdot a^{15} = 8 \\ \vartheta_0 \cdot a^{35} = 4 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\vartheta_0 \cdot a^{35}}{\vartheta_0 \cdot a^{15}} = \frac{4}{8} \quad \Leftrightarrow \quad a^{20} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}} \approx 0.96594$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{20}} = \vartheta_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta_0 = 8 \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{15}{4}} \approx 13.45$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta(x) \approx 13.45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20\,\mathrm{min}}} + 4\,°\mathrm{C}$$

   Für $t = 0$ erhalten wir $\vartheta(0) = 13.45\,°\mathrm{C} \cdot 1 + 4\,°\mathrm{C} \approx \underline{\underline{17.45\,°\mathrm{C}}}$ Kellertemperatur. (0.5 P)

Anmerkung: Die Funktion liesse sich rascher bestimmen, wenn wir bemerken, dass die Differenz zur Asymptotentemperatur beim Übergang von $t = 15\,\mathrm{min}$ zu $t = 35\,\mathrm{min}$ von $8\,°\mathrm{C}(= 12\,°\mathrm{C} - 4\,°\mathrm{C})$ auf $4\,°\mathrm{C}(= 8\,°\mathrm{C} - 4\,°\mathrm{C})$ zurückgeht. Daraus lässt sich direkt ableiten, dass der Verkleinerungsfaktor in der Exponentialfunktion durch

$$\left(\frac{4}{8}\right)^{\frac{t}{20\,\mathrm{min}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20\,\mathrm{min}}}$$

gegeben sein muss. Danach gilt es nur noch einen Punkt einzusetzen:

$$\vartheta(15\,\mathrm{min}) = \vartheta_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15\,\mathrm{min}}{20\,\mathrm{min}}} + 4\,°\mathrm{C} \overset{!}{=} 12\,°\mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta_0 = 8\,°\mathrm{C} \cdot 2^{\frac{3}{4}} \approx 13.45\,°\mathrm{C}$$

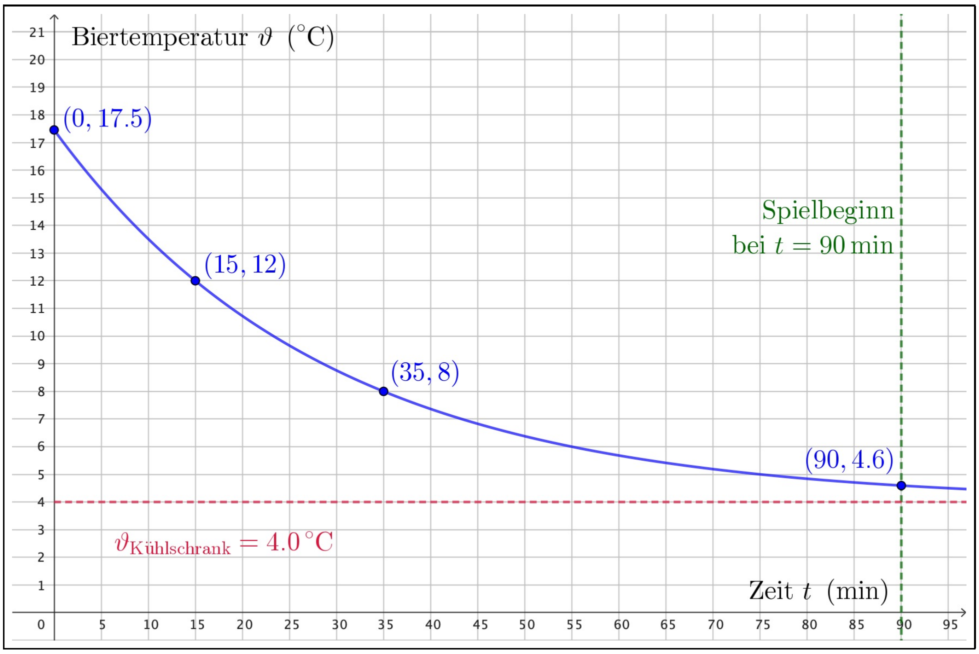
$$\Rightarrow \quad \vartheta(t) \approx 13.45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20\,\mathrm{min}}} + 4\,°\mathrm{C}$$

(b) Wir setzen die $90\,\mathrm{min}$ in die gefundene Funktionsgleichung ein: (1 P)

$$\vartheta(90\,\mathrm{min}) \approx 13.45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{90\,\mathrm{min}}{20\,\mathrm{min}}} + 4\,°\mathrm{C} = 13.45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{2}} + 4\,°\mathrm{C} \approx 4.6\,°\mathrm{C} < 5\,°\mathrm{C}$$

Ja, die erwünschte Temperatur wird erreicht!

Hier der Vollständigkeit halber noch das ausgefüllte Diagramm:



5. *Schweizer Stromproduktion aus erneuerbarer Energie im Vormarsch (6 Punkte)*

(a) Es gilt die Funktionsgleichung zu bestimmen. Für den zeitabhängigen Vergrösserungsfaktor erhalten wir (von $1400\,\mathrm{GWh}$ auf $4700\,\mathrm{GWh}$ während 10 Jahren): (1 P)

$$a^{\frac{t}{T_a}} = \left(\frac{4700\,\mathrm{GWh}}{1400\,\mathrm{GWh}}\right)^{\frac{t}{10\,\mathrm{a}}} = \left(\frac{47}{14}\right)^{\frac{t}{10\,\mathrm{a}}}$$

Damit notieren wir als Funktion, z.B. mit dem zeitlichen Nullpunkt $(t = 0)$ im Jahre 2010: (1 P)

$$S(t) = S_0 \cdot a^{\frac{t}{T_a}} = 1400\,\mathrm{GWh} \cdot \left(\frac{47}{14}\right)^{\frac{t}{10\,\mathrm{a}}}$$

Nun müssen wir noch das Jahr einsetzen: (0.5 P)

$$\text{Jahr 2005} \quad \Rightarrow \quad t = -5\,\mathrm{a} \quad \Rightarrow \quad S(-5\,\mathrm{a}) = 1400\,\mathrm{GWh} \cdot \left(\frac{47}{14}\right)^{\frac{-5\,\mathrm{a}}{10\,\mathrm{a}}} \approx \underline{\underline{764\,\mathrm{GWh}}}$$

(b) Für die Zeitspanne ab 2010 erhalten wir: (2.5 P)

$$
\begin{aligned}
& S(t) = 1400\,\mathrm{GWh} \cdot \left(\frac{47}{14}\right)^{\frac{t}{10\,\mathrm{a}}} \stackrel{!}{=} 10\,000\,\mathrm{GWh} && \mid : 1400\,\mathrm{GWh} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{47}{14}\right)^{\frac{t}{10\,\mathrm{a}}} = \frac{100}{14} && \mid \log_{47/14}(\ldots) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{t}{10\,\mathrm{a}} = \log_{47/14}\left(\frac{100}{14}\right) && \mid \cdot (10\,\mathrm{a}) \\
\Leftrightarrow \quad & t = 10\,\mathrm{a} \cdot \log_{47/14}\left(\frac{100}{14}\right) \approx 16.23\,\mathrm{a}
\end{aligned}
$$

Somit wird die $10\,000\,\mathrm{GWh}$-Marke im Jahr 2027 (oder 2026) erreicht. (0.5 P)

6. *Eine Funktionsgleichung bestimmen (3 Punkte)*

Zunächst lesen wir die Asymptotenhöhe ab: $D = 5$. (0.5 P)

Aus den beiden Punkten resp. aus deren Differenzen zur Asymptotenhöhe schliessen wir auf den Veränderungsfaktor: (1 P)

$$a^{\frac{x}{X_a}} = \left(\frac{2}{6}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x}$$

Nun fehlt uns noch der Parameter f_0. Wir sehen aber bereits, dass er $f_0 = -2$ betragen muss, denn der eine Punkt sitzt auf der y-Achse. (0.5 P)

Insgesamt ergibt sich also: (0.5 P)

$$f(x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x} + 5$$