

Def.: Unter einer (Zahlen-)Folge verstehen wir eine Aneinanderreihung, Aufzählung oder Auflistung endlich oder unendlich vieler Zahlen.

Die einzelnen Zahlen der Folge bezeichnen wir als ihre **Glieder**. Sie werden mit einem ganzzahligen **Index** durchnummeriert, der typischerweise bei 0 oder 1 startet. Für diesen Index werden besonders oft die Buchstaben i , k , l , m und n verwendet.

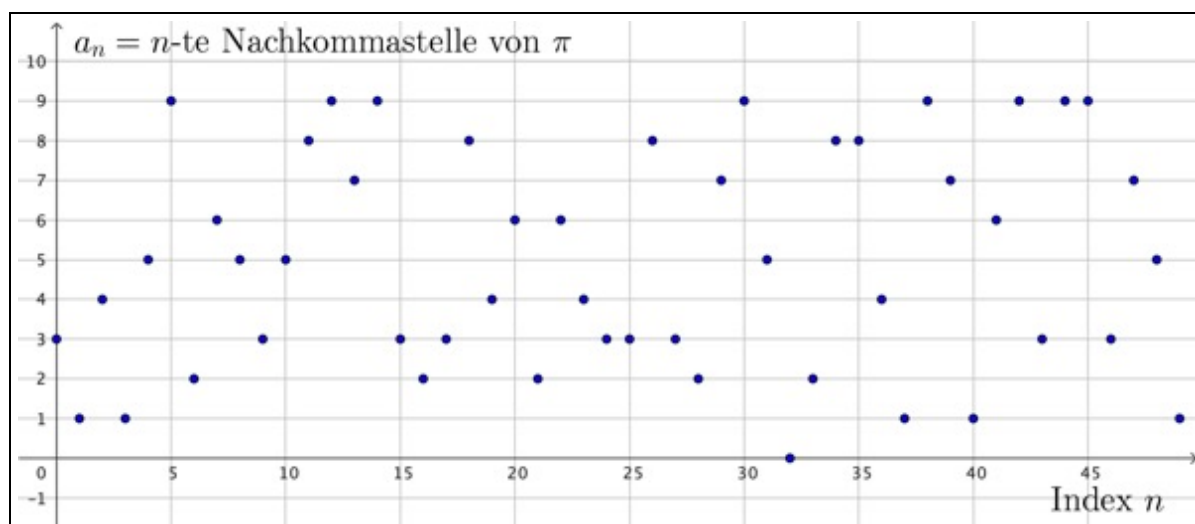
Zur Bezeichnung einer Folge insgesamt notieren wir z.B. (a_n) , für die einzelnen Glieder dann z.B. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{155}$, etc.

Folgen können grundsätzlich beliebige Aneinanderreihungen von Zahlen sein. Hier z.B. die Folge aller Dezimalstellen der Kreiszahl π :

$$\pi = 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,41971\,69399\,37510\,\dots$$

Index n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	etc.
Glied a_n (Bezeichnung)	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	...
Glied a_n (Wert)	3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	...

Die Folge der Dezimalstellen von π erscheint in gewisser Weise "zufällig", wie auch ihre grafische Darstellung zeigt:



In der Regel interessieren wir uns aber für Folgen, bei denen es eine klare rechnerische Vorschrift gibt, wie das n -te Glied a_n entsteht. Dazu hier einige Beispiele, bei denen wir selber die weiteren Glieder errahnen können, wenn wir von gewissen.

Index n	1	2	3	4	5	6	7	8
Folge (a_n)	2	5	8	11				
(b_n)	2	4	8	16				
(c_n)	2.1	3.2	4.3	5.4				
(d_n)	30	3	0.3	0.03				
(e_n)	100	95	90	85				
(f_n)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$				
(g_n)	70	77	77.7	77.77				
(h_n)	0	3	8	15				
(i_n)	5	2	8	-1	11			
(j_n)	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{31}{16}$			
(k_n)	1	4	9	16				
(l_n)	0.95	0.0095	0.000095					
(m_n)	1	3	6	10				
(n_n)	0.95	0.9595	0.959595					
(o_n)	1	-8	27	-64				
(p_n)	1	1	2	3	5	8		
(q_n)	5	6	5.5	5.75	5.625			
(r_n)	2	7	15	26	40			
(s_n)	256	16	4	2				
(t_n)	24	12	6	3				
(u_n)	1	4	10	20	35	56		
(v_n)	1	2	6	24	120			
(w_n)	11	13	17	19	23	29		
(x_n)	1	3	12	60	360			
(y_n)	2	3	8	63				

Zwei Arten der Rechendefinition einer Folge

Die meisten von uns betrachteten Folgen gehorchen einer genauen Vorschrift, wie das n -te Folgenglied zu berechnen ist. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

Explizite Definition: Die Folge wird dadurch definiert, dass genau angegeben wird, wie sich das n -te Folgenglied a_n **aus dem Index n** berechnen lässt.

Beispiele:

- Folge (b_n) = exponentielle Zahlenfolge:

$$\text{Explizite Definition: } b_n = 2^n$$

- Folge (k_n) = Folge der Quadratzahlen:

$$\text{Explizite Definition: } k_n = n^2$$

Rekursive Definition: Die Folge wird dadurch definiert, wie sich das n -te Folgenglied **aus vorangehenden Gliedern** berechnen lässt. Natürlich müssen hinreichend viele Anfangsglieder angegeben sein.

Beispiele:

- Folge (b_n) = exponentielle Zahlenfolge:

$$\text{Rekursive Definition: } b_n = 2 \cdot b_{n-1} \quad \text{mit } b_1 = 2$$

- Folge (p_n) = *Fibonacci-Zahlen*:

$$\text{Rekursive Definition: } p_n = p_{n-2} + p_{n-1} \quad \text{mit } p_1 = 1 \quad \text{und } p_2 = 1$$

Am Beispiel der Folge (b_n) sehen wir, dass dieselbe Folge oft sowohl explizit, als auch rekursiv definiert werden kann.

4. Grenzwert, Konvergenz, Divergenz

Idee: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heisst **Grenzwert** der Folge (a_n) ($n \in \mathbb{N}$), wenn die Glieder a_n für wachsendes n dem Wert a “beliebig nahe kommen und beliebig nahe bleiben”. Wir notieren:

$$a_n \longrightarrow a \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty \quad \text{oder kurz:} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (\text{lim} = \text{Limes} = \text{lat. Grenze})$$

Beispiele: In unseren Anfangsbeispielen gab es schon zahlreiche Folgen, die gegen einen Grenzwert strebten, z.B. die Folgen (d_n) , (f_n) , (l_n) , (q_n) , etc. Hier nochmals drei Beispiele:

$$(a_n) : \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$(b_n) : \quad 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \dots \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3}$$

$$(c_n) : \quad 7, 6, 5.5, 5.25, 5.125, \dots \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 5$$

Obige Formulierung “beliebig nahe kommen und beliebig nahe bleiben” ist mathematisch noch nicht sonderlich präzise. Wir wollen den Begriff des Grenzwertes nun ganz genau definieren.

Definition: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heisst **Grenzwert** der Folge (a_n) ($n \in \mathbb{N}$), wenn es zu jedem noch so schmalen Streifen der Breite $\varepsilon > 0$ um den Grenzwert a herum einen Index k gibt, ab dem dann wirklich alle Folgenglieder a_n mit $n > k$ innerhalb dieses Streifens liegen.

Allgemeine Definition der Reihe

Gegeben sei eine beliebige Folge (a_k) , also $a_1, a_2, a_3, \dots$

Die Summe über die ersten n Glieder der Folge (a_k) bezeichnen wir als die **n -te Partial- oder Teilsumme s_n** :

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Die Folge (s_n) dieser Partialsummen s_n , also $s_1, s_2, s_3, \dots$, heisst sinngemäss **Partialsummenfolge** oder einfach **Reihe**.

Wohlgemerkt: Reihen sind auch Folgen! Die rekursive Beschreibung lautet:

$$s_n = s_{n-1} + a_n$$

Die explizite Definition von s_n steht bereits oben. Mittels Summenzeichen lässt sie sich auch so notieren:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

In Worten: "Die n -te Partialsumme s_n ist die Summe über alle Folgenglieder a_k vom Index $k = 1$ bis zum Index $k = n$."

Hier zur Verdeutlichung die ersten paar Folgeglieder einer Reihe – links ganz allgemein und rechts als konkretes Beispiel basierend auf der Folge $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$, also auf $a_k = \frac{1}{2^k}$:

Reihe (s_n) allgemein

$$s_1 = \sum_{k=1}^1 a_k = a_1$$

$$s_2 = \sum_{k=1}^2 a_k = a_1 + a_2$$

$$s_3 = \sum_{k=1}^3 a_k = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^4 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

etc.

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

am konkreten Beispiel

$$s_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$s_3 = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

etc.

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = ?$$

Im Beispiel rechts ergibt sich also die Reihe $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$ usw. So wird nochmals deutlich: Eine Reihe (s_n) ist auch eine Folge, eben eine Partialsummenfolge.

Da Reihen auch Folgen sind, werden wir in Kürze auch danach fragen, ob eine bestimmte Reihe konvergiert oder divergiert, ob sich also die Partialsummenfolge (s_n) für $n \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert s strebt oder eben nicht...

Summenformel für die arithmetische Reihe (AR)

Ist die Folge, auf der wir eine Reihe aufbauen, eine arithmetische Folge (AF), so entsteht daraus eine **arithmetische Reihe (AR)**. Wie wir bereits hergeleitet haben, gilt nun für die n -te Partialsumme s_n einer solchen arithmetischen Folge, also für das n -te Glied der arithmetischen Reihe (s_n):

$$n\text{-tes Glied der AR resp. } n\text{-te Partialsumme: } s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Diese Formel können wir unter Verwendung der expliziten Definition $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ der zugrunde liegenden AF auch noch anders notieren:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d) = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d) = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$$

$$\text{kurz: } s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$$

Diese Formel ist genau dann hilfreich, wenn man anstelle des letzten Gliedes a_n den Schritt d kennt.

Bereits jetzt ist klar: Jede arithmetische Reihe ist *divergent*, denn für $n \rightarrow \infty$ werden unendlich viele weitere Glieder hinzuaddiert, deren Betrag immer grösser wird. Es gilt also:

$$(a_k) \text{ ist eine AF} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \pm \infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{AR ist divergent!}$$