Lösungen F & R 2: Arithmetische und geometrische Folgen

Klasse 155c / AGe

1. Wir finden:

   (a) $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots \quad \Rightarrow \quad$ AF mit $d = 13$

   (b) $1,\ 4,\ 16,\ 64,\ 264,\ \ldots \quad \Rightarrow \quad$ GF mit $q = 13$

   (c) $17,\ 14,\ 11,\ 9,\ 6,\ 3,\ \ldots \quad \Rightarrow \quad$ weder AF noch GF!

   (d) $2,\ 3,\ 4.5,\ 6.75,\ 9,\ 13.5,\ \ldots \quad \Rightarrow \quad$ weder AF noch GF!

   (e) $12,\ 6,\ 3,\ 1.5,\ \ldots \quad \Rightarrow \quad$ GF mit $q = \dfrac{1}{2}$

   (f) $\dfrac{1}{18},\ -\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{2},\ -1.5,\ 4.5\ \ldots \quad \Rightarrow \quad$ GF mit $q = -3$

2. Für den Schritt d resp. den Quotienten q und für das 8. Folgenglied erhalten wir jeweils:

   (a) $a_1 = 6 \quad$ und $\quad a_{k+1} = a_k + 8 \quad \Rightarrow \quad$ AF mit $d = 8$ und $a_8 = 62$

   (b) $1,\ 1.1,\ 1.21,\ 1.331\,, \ldots \quad \Rightarrow \quad$ GF mit $q = 1.1$ und $a_8 = 1.9487171$

   (c) $a_k = 5 + (k-1) \cdot 7 \quad \Rightarrow \quad$ AF mit $d = 7$ und $a_8 = 54$

   (d) $-8,\ 12,\ -18,\ 27,\ \ldots \quad \Rightarrow \quad$ GF mit $q = -\dfrac{3}{2}$ und $a_8 = \dfrac{3^7}{2^4} = \dfrac{2187}{16} = 136.6875$

   (e) $3.2,\ 5.1,\ 7,\ \ldots \quad \Rightarrow \quad$ AF mit $d = 1.9$ und $a_8 = 16.5$

   (f) $0.05,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.4,\ \ldots \quad \Rightarrow \quad$ GF mit $q = 2$ und $a_8 = 6.4$

3. Für die explizite Definition der AFs und für das jeweils gesuchte Glied erhalten wir:

   (a) $a_3 = 5,\ a_5 = 6,\ a_{20} = ? \quad \Rightarrow \quad 2d = a_5 - a_3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad d = \dfrac{1}{2}$

   $\Rightarrow \quad a_1 = a_3 - 2d = 5 - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad a_n = 4 + (n-1) \cdot \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{20} = \dfrac{27}{2}$

   (b) $a_{10} = 12,\ a_{20} = 18,\ a_4 = ? \quad \Rightarrow \quad 10d = a_{20} - a_{10} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad d = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

   $\Rightarrow \quad a_1 = a_{10} - 9d = 12 - 9 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{33}{5} \quad \Rightarrow \quad a_n = \dfrac{33}{5} + (n-1) \cdot \dfrac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad a_4 = \dfrac{42}{5}$

4. Für die explizite Definition der GFs und das jeweils gesuchte Glied a_7 erhalten wir:

   (a) $a_1 = 64,\ a_2 = 96 \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{96}{64} = \dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n = 64 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_7 = 3^6 = 729$

   (b) $a_2 = 8,\ a_5 = 216 \quad \Rightarrow \quad q^3 = \dfrac{a_5}{a_2} = \dfrac{216}{8} = 27 \quad \Leftrightarrow \quad q = 3 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{a_2}{q} = \dfrac{8}{3}$

   $\Rightarrow \quad a_n = \dfrac{8}{3} \cdot 3^{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_7 = \dfrac{8}{3} \cdot 3^6 = 8 \cdot 3^5 = 1944$

   (c) $a_7 = 100,\ a_{10} = -12.5 \quad \Rightarrow \quad q^3 = \dfrac{a_{10}}{a_7} = \dfrac{-12.5}{100} = -\dfrac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad q = -\dfrac{1}{2}$

   $\Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{a_7}{q^6} = \dfrac{100}{\left(-\frac{1}{2}\right)^6} = 6400 \quad \Rightarrow \quad a_n = 6400 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

5. Vom ersten bis zum 2775. Glied sind es 2774 Schritte, woraus folgt:

   (a) $2774d = a_{2775} - a_2 = 524\,288 - 2 = 524\,286 \quad \Leftrightarrow \quad d = 189$

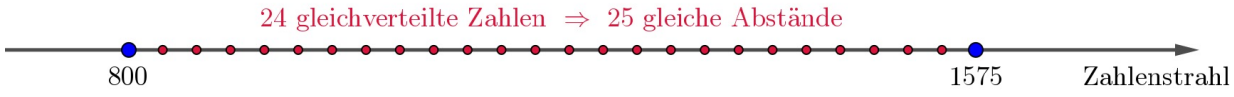
   $\Rightarrow \quad \underline{\underline{a_n = 2 + (n-1) \cdot 189}}$ resp. $\underline{\underline{a_n = a_{n-1} + 189}}$ mit $\underline{\underline{a_1 = 2}}$

   (b) $\underline{\underline{a_1 = 2,\ a_2 = 191,\ a_3 = 380}}$

6. Der Faktor q von a_1 zu a_2 muss derselbe sein wie von a_2 zu a_3, wenn es sich um eine GF handeln soll. Zusammen mit $a_2 = a_1 + 17$ und $a_3 = a_2 + 34 = a_1 + 51$ folgt daraus:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + 17}{a_1} \quad \text{und} \quad q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_1 + 51}{a_1 + 17}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{a_1 + 17}{a_1} \overset{!}{=} \frac{a_1 + 51}{a_1 + 17} \quad \Leftrightarrow \quad (a_1 + 17)^2 = a_1(a_1 + 51) \quad \Leftrightarrow \quad a_1^2 + 34a_1 + 17^2 = a_1^2 + 51a_1$$
$$\Leftrightarrow \quad 34a_1 + 17^2 = 51a_1 \quad \Leftrightarrow \quad 17a_1 = 17^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a_1 = 17}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a_2 = 34}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{a_3 = 68}}$$

7. Wenn 24 Zahlen mit lauter gleichen Abständen eingeschoben werden sollen, sodass eine AF entsteht, so sind zwischen den Zahlen 800 und 1575 genau 25 gleiche Abstände vorhanden:



   Wir setzen $a_1 = 800$. Dann ist nun eben $a_{26} = 1575$ und es folgt:

$$25d = a_{26} - a_1 = 1575 - 800 = 775 \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{775}{25} = 31$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{a_n = 800 + (n-1) \cdot 31}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{a_n = a_{n-1} + 31}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{a_1 = 800}}$$

8. Wir berechnen den Schritt und bestimmen die explizite Definition der AF:

$$2d = a_3 - a_1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{7} = \frac{7 - 11}{77} = -\frac{4}{77} \quad \Leftrightarrow \quad d = -\frac{2}{77} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{7} - (n-1) \cdot \frac{2}{77}$$

   Damit folgt nun für den Index n, der uns auf den Wert 0 bringen würde:

$$\frac{1}{7} - (n-1) \cdot \frac{2}{77} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{7} = (n-1) \cdot \frac{2}{77} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11}{2} = n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{13}{2} = 6.5$$

   Das "sechseinhalbte" Glied wäre also genau gleich 0. Somit sind $\underline{\underline{\text{sechs Glieder}}}$ grösser als 0.

9. Das drei Glieder sind $a_1 = m - d$, $a_2 = m$ und $a_3 = md$. Mit den beiden Aussagen folgt daraus:

$$\left| \begin{array}{c} a_1 + a_2 + a_3 = 30 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 318 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} (m-d) + m + (m+d) = 30 \\ (m-d)^2 + m^2 + (m+d)^2 = 318 \end{array} \right|$$
$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 3m = 30 \\ m^2 - 2md + d^2 + m^2 + m^2 + 2md + d^2 = 318 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} m = 10 \\ 3m^2 + 2d^2 = 318 \end{array} \right|$$
$$\Rightarrow \quad 300 + 2d^2 = 318 \quad \Leftrightarrow \quad 2d^2 = 18 \quad \Leftrightarrow \quad d^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad d = \pm 3$$

   Somit ist entweder $\underline{\underline{a_1 = 10 - 3 = 7,\ a_2 = 10 \text{ und } a_3 = 10 + 3 = 13}}$,
   oder aber $\underline{\underline{a_1 = 10 + 3 = 13,\ a_2 = 10 \text{ und } a_3 = 10 - 3 = 7}}$.

   Ja, das sind zwei echt verschiedene Lösungen, aber natürlich sind sie eng miteinander verwandt!

10. Mit der Idee, dass die drei Glieder in der Form $a_1 = \frac{m}{q}$, $a_2 = m$ und $a_3 = mq$ geschrieben werden können, erhalten wir aus den zwei Aussagen:

$$\left|\begin{array}{c} a_1 + a_2 + a_3 = 9 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = -216 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{c} \frac{m}{q} + m + mq = 9 \\ \frac{m}{q} \cdot m \cdot mq = -216 \end{array}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{c} m\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 9 \\ m^3 = -216 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{c} \frac{1+q+q^2}{q} = \frac{9}{m} \\ m = -6 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{1+q+q^2}{q} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2 + 2q + 2q^2 = -3q$$

$$\Leftrightarrow \quad 2q^2 + 5q + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2q+1)(q+2) = 0$$

Somit kommen die beiden Lösungen $q = -\frac{1}{2}$ und $q = -2$ in Frage. In beiden Fällen ist $m = -6$:

- Mit $q = -\frac{1}{2}$ ist $\underline{\underline{a_1 = 12,\ a_2 = -6 \text{ und } a_3 = 3}}$.
- Mit $q = -2$ ist die Reihenfolge gerade umgekehrt: $\underline{\underline{a_1 = 3,\ a_2 = -6 \text{ und } a_3 = -12}}$.

11. Der Abstand d zwischen zwei benachbarten Zahlen muss stets gleich gross sein, wenn es sich um eine AF handeln soll. Daher muss mit $a_1 = m$, $a_2 = m^2 + 3$ und $a_3 = 4m^2 - 2m$ gelten:

$$d = a_2 - a_1 \overset{!}{=} a_3 - a_2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + 3 - m = 4m^2 - 2m - \left(m^2 + 3\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2m^2 - m - 6$$

$$\Leftrightarrow \quad (2m+3)(m-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{m = -\frac{3}{2}}} \text{ oder } \underline{\underline{m = 2}}$$

Wir erhalten zwei mögliche Folgen:

- Mit $m = -\frac{3}{2}$ ist $d = m^2 + 3 - m = \frac{9}{4} + 3 + \frac{3}{2} = \frac{27}{4}$ und somit beginnt die Folge mit: $-\frac{3}{2}$, $\frac{21}{4}$, 12, $\ldots$
- Mit $m = 2$ ist $d = m^2 + 3 - m = 4 + 3 - 2 = 5$, sodass der Folgenstart so aussieht: 2, 7, 12, $\ldots$

12. Aus den ersten beiden Gliedern der GF folgt der Faktor: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{8}$. Damit lautet die explizite Beschreibung der Folge:

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{n-1}$$

Wir können nun den nicht-natürlichen Index n bestimmen, für den diese Folge genau gleich 10^{12} wird:

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{n-1} \overset{!}{=} 10^{12} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{9}{8}\right)^{n-1} = \frac{10^{12}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \qquad n - 1 = \log_{9/8}\left(\frac{10^{12}}{8}\right) \approx 216.94 \qquad \Leftrightarrow \qquad n \approx 217.94$$

Somit sind die ersten $\underline{\underline{217 \text{ Glieder}}}$ kleiner 10^{12}.

13. Wir gehen prinzipiell genau gleich vor wie bei der vorigen Aufgabe:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2021}{2022} \qquad \Rightarrow \qquad a_n = 2022 \cdot \left(\frac{2021}{2022}\right)^{n-1}$$

Nun ermitteln wir den nicht-natürlichen Grenzindex n:

$$a_n = 2022 \cdot \left(\frac{2021}{2022}\right)^{n-1} \overset{!}{=} 1291 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{2021}{2022}\right)^{n-1} = \frac{1291}{2022}$$

$$\Leftrightarrow \qquad n - 1 = \log_{2021/2022}\left(\frac{1291}{2022}\right) \approx 906.97 \qquad \Leftrightarrow \qquad n \approx 907.97$$

Damit sind die ersten $\underline{\underline{907 \text{ Glieder}}}$ grösser als 1291.

14. Wir geben zunächst die explizite Darstellung der GF an:

$$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n-1} = 1 \cdot \left(\frac{1.1}{1}\right)^{n-1} = 1.1^{n-1}$$

Nun können wir für die beiden Grenzfälle $a_n = 1000$ und $a_n = 10\,000$ das jeweilige nicht-natürliche n bestimmen:

$$1.1^{n-1} = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad n-1 = \log_{1.1}(1000) \approx 72.48 \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 73.48$$
$$1.1^{n-1} = 10\,000 \quad \Leftrightarrow \quad n-1 = \log_{1.1}(10\,000) \approx 96.64 \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 97.64$$

Folglich liegen die Folgeglieder von $n = 74$ bis $n = 97$ innerhalb der angegebenen Grenzen. Das sind 24 Glieder.

15. Einerseits muss der Abstand zwischen a_1 und a_2 gleich gross sein wie der Abstand zwischen a_2 und a_3, wenn es sich um eine AF handeln soll:

$$d = a_2 - a_1 \overset{!}{=} a_3 - a_2$$

Andererseits muss von a_1 nach a_2 mit demselben Faktor multipliziert werden wie von a_2 nach a_3:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \overset{!}{=} \frac{a_3}{a_2}$$

Das sind erstmal zwei Gleichungen für drei Unbekannte. Damit ist das Gleichungssystem noch unterbestimmt, was zunächst darauf hindeutet, dass es sogar mehrere, vielleicht sogar unendlich viele Zahlentripel a_1, a_2 und a_3 gibt, die diese Anforderungen erfüllen. Schauen wir mal, was dabei rauskommt:

$$\left| \begin{array}{c} a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \\ \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} a_3 = 2a_2 - a_1 \\ a_3 = \frac{a_2^2}{a_1} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 2a_2 - a_1 = \frac{a_2^2}{a_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a_1}a_2^2 - 2a_2 + a_1 = 0$$

Zu hinterst steht eine quadratische Gleichung in a_2 mit a_1 als Parameter. Bevor wir sie einfach in die Mitternachtsformel einsetzen – was durchaus auch ginge – versuchen wir es mit einer binomischen Formel. Dazu multiplizieren wir zuerst mit a_1:

$$\Rightarrow \quad a_2^2 - 2a_1a_2 + a_1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a_2 - a_1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1$$

Damit ist die Sache nun allerdings klar: Die beiden Zahlen a_1 und a_2 müssen genau gleich gross sein. Dann ist $d = a_2 - a_1 = 0$ und $q = \frac{a_2}{a_1} = 1$. Somit gilt: $a_1 = a_2 = a_3$.

Die Antwort lautet im Prinzip also "Ja". Es gibt Zahlentripel, die gleichzeitig eine AF und eine GF bilden. Es gibt sogar unendlich viele solche Tripel. Allerdings bestehen sie stets aus drei gleichen Zahlen. In diesem Sinne ist die Antwort wieder sehr unspektakulär, ja fast langweilig.

16. Es muss gelten:

$$u = q \cdot 1 = q \qquad \text{und} \qquad v = q \cdot u = q^2 \qquad \text{sowie} \qquad 10 = q \cdot v = q^3$$

Aus der dritten Gleichung folgt direkt:

$$q^3 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt[3]{10} \approx 2.154$$

Damit erhalten wir $u = \sqrt[3]{10} \approx 2.154$ und $v = (\sqrt[3]{10})^2 \approx 4.642$.

Auf ganze Zahlen gerundet lautet die Folge 1, 2, 5, 10. Im Alltag kennen wir diese Abfolge von Werten aus dem Bereich der Münzen und Noten. Diese Gliederung scheint für das monetäre System sinnvoll zu sein.