Lösungen F & R 3: Arithmetische Reihen

Klasse 155c / AGe

1. (a) AF der ungeraden Zahlen. $d = 2 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{99-1}{2} + 1 = 50 \quad \Rightarrow \quad s_{50} = \frac{50}{2}(1+99) = \underline{\underline{2500}}$.
   (b) $d = 6 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{191-53}{6} + 1 = 24 \quad \Rightarrow \quad s_{24} = \frac{24}{2}(53+191) = 12 \cdot 244 = \underline{\underline{2928}}$.
   (c) $a_{45} = \frac{1}{2} + (45-1) \cdot \frac{1}{5} = \frac{5+88}{10} = \frac{93}{10} \quad \Rightarrow \quad s_{45} = \frac{45}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{93}{10}\right) = \frac{45}{2} \cdot \frac{98}{10} = 9 \cdot \frac{49}{2} = \underline{\underline{\frac{441}{2}}}$.
   (d) $d = \frac{a_{33}-a_2}{31} = \frac{11.6-48.8}{31} = \frac{-37.2}{31} = -1.2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 - d = 48.8 + 1.2 = 50$
   und $a_{50} = a_{33} + 17 \cdot d = 11.6 - 17 \cdot 1.2 = -8.8 \quad \Rightarrow \quad s_{50} = \frac{50}{2} \cdot (50 - 8.8) = 25 \cdot 41.2 = \underline{\underline{1030}}$.

2. (a) $d = 11 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1111-330}{11} + 1 = 72 \quad \Rightarrow \quad s_{72} = \frac{72}{2}(330+1111) = \underline{\underline{51\,876}}$.
   (b) Kleinste dreistellige Zahl, die durch 7 teilbar ist: $a_1 = 105$.
   Grösste dreistellige Zahl, die durch 7 teilbar ist: 994 (Rep.: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$).
   $d = 7 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{994-105}{7} + 1 = 128 \quad \Rightarrow \quad s_{128} = \frac{128}{2} \cdot (105 + 994) = \underline{\underline{70\,336}}$.
   (c) $\frac{1000}{17} \approx 58.8 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 59 \cdot 17 = 1003$ und $\frac{9999}{17} \approx 588.2 \quad \Rightarrow \quad a_n = 588 \cdot 17 = 9996$.
   $d = 17 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{9996-1003}{17} + 1 = 530 \quad \Rightarrow \quad s_{530} = \frac{530}{2} \cdot (1003 + 9996) = \underline{\underline{2\,914\,735}}$.
   (d) $a_1 = a_{18} - 17d = 66 - 17 \cdot 7 = 66 - 119 = -53 \quad \Rightarrow \quad a_{20} = a_{18} + 2d = 66 + 14 = 80$
   $\Rightarrow \quad s_{20} = \frac{20}{2} \cdot (-53 + 80) = 10 \cdot 27 = \underline{\underline{270}}$.
   (e) $a_n = n \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{n}{2} \cdot (1+n) \stackrel{!}{=} 19\,900 \quad \Leftrightarrow \quad n(n+1) = 39\,800$
   $\Leftrightarrow \quad n^2 + n - 39\,800 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n+200)(n-199) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{n = 199}}$.

3. *Arithmetische Reihen im "Alltag"*

   (a) Oberste Reihe: $a_1 = 12$ Baumstämme. Von Reihe zu Reihe $d = 1$ Baumstamm mehr und es sind $n = 8$ Reihen. Folglich besteht die 8. Reihe aus $a_8 = 19$ Baumstämmen und für die Anzahl Baumstämme insgesamt folgt:
   $$s_8 = \frac{8}{2} \cdot (12 + 19) = 4 \cdot 31 = \underline{\underline{124}}$$
   (b) Eine Turmuhr schlägt um 1 Uhr einmal, um 2 Uhr zweimal, um 3 Uhr dreimal. Das geht so weiter bis 12 Uhr. Danach wiederholt sich die Sache bis 24 Uhr. Folglich sind es
   $$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 12) = 2 \cdot \frac{12}{2}(1 + 12) = 12 \cdot 13 = \underline{\underline{156}}$$
   (c) Die Folge (a_k) der zurückgelegten Fallstrecken in Metern lautet: 4.9, 14.7, 24.5, 34.3, usw. Explizit notiert ist das:
   $$a_k = 4.9 + (k-1) \cdot 9.8$$
   In der zehnten Sekunde werden somit $a_{10} = 4.9 + 9 \cdot 9.8 = \underline{\underline{93.1\,\mathrm{m}}}$ zurückgelegt. Für die gesamte Fallstrecke ergibt sich:
   $$s_{10} = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_{10}) = \frac{10}{2} \cdot (4.9 + 93.1) = 5 \cdot 98 = \underline{\underline{490\,\mathrm{m}}}$$
   (d) Der Rasenmäher überstreicht Viertelkreisbögen mit jeweils konstantem Radius. Die Abfolge der Radien (in Meter) lautet: 42, 41.6, 41.2, 40.8, etc., explizit ausgedrückt also:
   $$r_n = r_1 + (n-1) \cdot d = 42 - (n-1) \cdot 0.4$$
   25 Runden bedeuten 100 Halbkreisbögen. Der hundertste Radius beträgt: $r_{100} = 42 - 99 \cdot 0.4 = 2.4$. Die Formel für den Viertelkreisbogen lautet $u = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot r$. Damit folgt für die abgefahrene Strecke:
   $$s_{100} = u_1 + \ldots + u_{100} = \frac{\pi}{2} \cdot (r_1 + \ldots + r_{100}) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{100}{2} \cdot (42 + 2.4) = \underline{\underline{1110\pi\,\mathrm{m}}} \approx \underline{\underline{3487\,\mathrm{m}}}$$

4. (a) Wir schreiben die beiden Angaben in ein Gleichungssystem und bearbeiten dieses sukzessive:

$$\left| \begin{array}{c} s_7 = 21 \\ s_8 = 25 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} \frac{7}{2} \cdot (a_1 + a_7) = 21 \\ \frac{8}{2} \cdot (a_1 + a_8) \end{array} \right|$$

Dabei sind aber $a_7 = a_1 + 6d$ und $a_8 = a_1 + 7d$, woraus weiter folgt:

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} \frac{7}{2} \cdot (a_1 + a_1 + 6d) = 21 \\ \frac{8}{2} \cdot (a_1 + a_1 + 7d) \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 7a_1 + 21d = 21 \\ 8a_1 + 28d = 25 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} a_1 + 3d = 3 \\ 8a_1 + 28d = 25 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 8a_1 + 24d = 24 \\ 8a_1 + 28d = 25 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 4d = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{d = \frac{1}{4}}} \quad \Rightarrow \quad a_1 + \frac{3}{4} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a_1 = \frac{9}{4}}}$$

Damit ist $a_{30} = a_1 + 29d = \frac{9}{4} + 29 \cdot \frac{1}{4} = \frac{38}{4}$ und somit folgt:

$$s_{30} = \frac{30}{2} \cdot (a_1 + a_{30}) = \frac{30}{2} \cdot \left(\frac{9}{4} + \frac{38}{4} \right) = 15 \cdot \frac{47}{4} = \underline{\underline{\frac{705}{4}}} = \underline{\underline{176.25}}$$

(b) Wir gehen wieder ähnlich vor wie bei (a):

$$\left| \begin{array}{c} s_5 = 165 \\ s_{15} = 120 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} \frac{5}{2} (a_1 + a_5) = 165 \\ \frac{15}{2} (a_1 + a_{15}) = 120 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} \frac{5}{2} (a_1 + a_1 + 4d) = 165 \\ \frac{15}{2} (a_1 + a_1 + 14d) = 120 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 5a_1 + 10d = 165 \\ 15a_1 + 105d = 120 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} a_1 + 2d = 33 \\ a_1 + 7d = 8 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 5d = -25 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{d = -5}}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 - 10 = 33 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a_1 = 43}}$$

(c) Ermittle jeweils das letzte Glied x:

i. $$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \big(a_1 + a_1 + (n-1)\, d \big) = \frac{n}{2} (2a_1 + nd - d) = \frac{d}{2} n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2} \right) n$$

$$\Rightarrow \quad 621 = \frac{13}{2} n^2 + \left(-116 - \frac{13}{2} \right) n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{13}{2} n^2 - \frac{245}{2} n - 621 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 13n^2 - 245n - 1242 = 0$$

$$\Rightarrow \quad n_{1/2} = \frac{245 \pm \sqrt{245^2 + 4 \cdot 13 \cdot 1242}}{2 \cdot 13} = \frac{245 \pm 353}{26} = -\frac{54}{13} \text{ oder } 23$$

$$\Rightarrow \quad n = 23 \quad \Rightarrow \quad x = a_{23} = a_1 + 22d = -116 + 22 \cdot 13 = \underline{\underline{170}}$$

ii. $$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \big(a_1 + a_1 + (n-1)\, d \big) = \frac{n}{2} (2a_1 + nd - d) = \frac{d}{2} n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2} \right) n$$

$$\Rightarrow \quad 161 = -\frac{9}{2} n^2 + \left(206 + \frac{9}{2} \right) n \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{9}{2} n^2 + \frac{421}{2} n - 161 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9n^2 - 421n + 322 = 0$$

$$\Rightarrow \quad n_{1/2} = \frac{421 \pm \sqrt{421^2 - 4 \cdot 9 \cdot 322}}{2 \cdot 9} = \frac{421 \pm 407}{18} = \frac{7}{9} \text{ oder } 46$$

$$\Rightarrow \quad n = 46 \quad \Rightarrow \quad x = a_{46} = a_1 + 45d = 206 - 45 \cdot 9 = \underline{\underline{-199}}$$

(d) Die Summe der ersten n Glieder ist s_n, während die Summe der folgenden n Glieder durch $s_{2n} - s_n$ beschrieben wird. Gemäss Aufgabenstellung soll nun gelten:

$$2 \cdot s_n \overset{!}{=} s_{2n} - s_n \qquad \text{also:} \quad 3 \cdot s_n = s_{2n}$$

Nun setzen wir hier den allgemeinen Ausdruck für die n-te resp. $2n$-te Partialsumme ein:

$$3 \cdot \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{2n}{2}(a_1 + a_{2n}) \quad \Leftrightarrow \quad 3n(a_1 + a_n) = 2n(a_1 + a_{2n})$$
$$\Leftrightarrow \quad 3(a_1 + a_n) = 2(a_1 + a_{2n})$$

Das n-te Glied a_n resp. das $2n$-te Glied lassen sich durch die explizite Beschreibung der Folge (a_n) ausdrücken. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 3\big(a_1 + a_1 + (n-1)d\big) = 2\big(a_1 + a_1 + (2n-1)d\big) \\
&\Leftrightarrow \quad 3\big(2a_1 + (n-1)d\big) = 2\big(2a_1 + (2n-1)d\big) \\
&\Leftrightarrow \quad 6a_1 + 3nd - 3d = 4a_1 + 4nd - 2d \quad \Leftrightarrow \quad nd = 2a_1 - d \\
&\Leftrightarrow \quad n = \frac{2a_1 - d}{d} = \frac{2 \cdot 20 - 4}{4} = \frac{36}{4} = \underline{\underline{9}}
\end{aligned}$$

Wir können dieses Resultat auch noch kurz überprüfen:

$$a_9 = a_1 + 8d = 20 + 8 \cdot 4 = 52 \quad \Rightarrow \quad s_9 = \frac{9}{2}(20 + 52) = 9 \cdot 36 = 324$$
$$a_{18} = a_1 + 17d = 20 + 17 \cdot 4 = 88 \quad \Rightarrow \quad s_{18} = \frac{18}{2}(20 + 88) = 9 \cdot 108 = 972$$

Nun ist $s_{18} - s_9 = 648$, was effektiv das Doppelte von $s_9 = 324$ ist.

(e) Für die n-te Partialsumme schreiben wir:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Dabei können wir wiederum a_n durch die explizite Notation der Folge ausdrücken:

$$s_n = \frac{n}{2}\big(a_1 + a_1 + (n-1)d\big) = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = -105n + \frac{7}{2}n^2 - \frac{7}{2}n$$

Diese Summe ist zunächst ganz bestimmt negativ, dann wird sie aber irgendwann positiv. Für den nicht notwendigerweise natürlichen Grenzindex n finden wir:

$$s_n = 0 \quad \Rightarrow \quad -105n + \frac{7}{2}n^2 - \frac{7}{2}n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -30n + n^2 - n = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad vn^2 - 31n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n(n-31) = 0$$

Das bedeutet, bei $n = 31$ erreicht s_n genau den Wert 0. Somit sind <u>30 Glieder</u> negativ.

(f) Wir gehen vor wie bei den Aufgaben (a) und (b):

$$\left|\begin{array}{l} s_{132}=330 \\ s_{133}=133 \end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l} \frac{132}{2}\,(a_1+a_{132})=330 \\ \frac{133}{2}\,(a_1+a_{133})=133 \end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l} \frac{132}{2}\,(a_1+a_1+131d)=330 \\ \frac{133}{2}\,(a_1+a_1+132d)=133 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{c} 2a_1+131d=5 \\ a_1+66d=1 \end{array}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{c} 2a_1+131d=5 \\ 2a_1+132d=2 \end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{d=-3}}$$

$$\Rightarrow\quad a_1+66\cdot(-3)=1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{a_1=199}}$$

Nun können wir eine Formel für die n-te Partialsumme notieren:

$$s_n=\frac{n}{2}\,(a_1+a_n)=\frac{n}{2}\,\big(a_1+a_1+(n-1)\,d\big)=n\cdot a_1+\frac{n(n-1)}{2}\,d=\frac{d}{2}\,n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)\,n$$

Dies ist eine quadratische Funktion des Indexes n. Da d in unserem Fall negativ ist, ist der zugehörige Graph eine nach unten geöffnete Parabel. Somit besitzt die Funktion ein Maximum.
Dieses bestimmen wir nun am anschaulichsten, nachdem wir die Werte für a_1 und d eingesetzt haben:

$$s_n=\frac{d}{2}\,n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)\,n=-\frac{3}{2}\,n^2+\left(199+\frac{3}{2}\right)\,n=-\frac{3}{2}\,n^2+\frac{401}{2}\,n$$

Jetzt können wir die Maximalstelle $n_{\max}$ ermitteln (x-Koordinate des Scheitelpunktes):

$$n_{\max}=\frac{-b}{2a}=-\frac{\frac{401}{2}}{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{401}{6}=66\,\frac{5}{6}$$

Der natürliche Index mit der grössten Summe ist also $\underline{\underline{n=67}}$. Zur Vervollständigung berechne ich diesen maximalen Wert auch gleich noch, wobei zunächst das 66. Glied zu bestimmen ist:

$$a_{67}=a_1+66\cdot d=199+66\cdot(-3)=1$$

An dieser Stelle wird nochmals klar, weshalb der Index mit maximaler Summe etwa 67 sein muss. Bis zu diesem Index sind die Glieder, die aufsummiert werden, positiv, danach sind sie eben negativ und die Summe verkleinert sich wieder.
Der maximale Partialsummenwert lautet nun:

$$s_{67}=\frac{67}{2}\,(a_1+a_{67})=\frac{67}{2}\,(199+1)=67\cdot100=6700$$

Zum Abschluss noch der Graph zu unserer Summenfunktion s_n: