Lösungen F & R 4: Geometrische Reihen

Klasse 155c / AGe

1. Wir stellen zunächst fest: $a_1 = 2$ und $q = \frac{1}{2}$. Für den Index des letzten Gliedes erhalten wir aus der expliziten Definition desselben:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \overset{!}{=} \frac{1}{1024} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{n = 12}$$

Nun schreiben wir s_{12} und $s_{13} = q \cdot s_{13}$ auf und subtrahieren diejenige Partialsumme mit dem grösseren Index von derjenigen mit dem kleineren Index:

$$\begin{aligned} s_{12} &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1024} \\ s_{13} = \frac{1}{2} \cdot s_{12} &= \qquad 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot s_{12} - s_{12} = \frac{1}{2048} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \cdot s_{12} = \frac{1 - 4096}{2048} = -\frac{4095}{2048} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{s_{12} = \frac{4095}{1024}}}$$

2. Als Erstes muss jeweils bestimmt werden, bis zu welchen Index n überhaupt summiert wird! Danach verwenden wir die Partialsummenformel $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$

(a) $2 + 10 + 50 + \ldots + 31\,250 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2,\, q = 5 \quad \Rightarrow \quad 31\,250 = 2 \cdot 5^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{n = 7}$

$$\Rightarrow \quad s_7 = 2 \cdot \frac{5^7 - 1}{5 - 1} = 2 \cdot \frac{78\,125 - 1}{4} = \frac{78\,124}{2} = \underline{\underline{39\,062}}$$

(b) $-2 + 10 - 50 + \ldots - 31\,250 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -2,\, q = -5 \quad \Rightarrow \quad 31\,250 = -2 \cdot (-5)^{n-1}$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{n = 7} \quad \Rightarrow \quad s_7 = -2 \cdot \frac{(-5)^7 - 1}{-5 - 1} = -2 \cdot \frac{-78\,125 - 1}{-6} = -\frac{78\,126}{3} = \underline{\underline{-26\,063}}$$

(c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{4096} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2},\, q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4096} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{n = 12}$

$$\Rightarrow \quad s_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4096} - 1}{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{4096} = \underline{\underline{\frac{4095}{4096}}}$$

(d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots - \frac{1}{4096} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2},\, q = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4096} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{n = 12} \quad \Rightarrow \quad s_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{12} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4096} - 1}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4096}\right) = \underline{\underline{\frac{4095}{12\,288}}}$$

(e) $\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \ldots - 81 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{27},\, q = -3 \quad \Rightarrow \quad -81 = \frac{1}{27} \cdot (-3)^{n-1}$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{n = 8} \quad \Rightarrow \quad s_8 = \frac{1}{27} \cdot \frac{(-3)^8 - 1}{-3 - 1} = \frac{1}{27} \cdot \frac{6561 - 1}{-4} = -\frac{6560}{4 \cdot 27} = \underline{\underline{-\frac{1640}{27}}}$$

(f) $\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + \ldots + 81 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \sqrt{3},\, q = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 81 = \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{n = 8}$

$$\Rightarrow \quad s_8 = \sqrt{3} \cdot \frac{\left(\sqrt{3}\right)^8 - 1}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} \cdot \frac{81 - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{80\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{240 + 80\sqrt{3}}{3 - 1} = \underline{\underline{120 + 40\sqrt{3}}}$$

3. **Vorweg:** Die Zahlen in diesen Aufgaben sind aufgrund der hohen Potenzen nicht sonderlich angenehm. Die Zahlen in der Prüfung werden sicherlich einfacher zu rechnen sein!

   (a) Der Ausdruck hinter dem Summenzeichen muss jeweils als die explizite Darstellung der Glieder einer geometrischen Folge, also als $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$ interpretiert werden. In dieser Aufgabe ist offensichtlich $a_1 = 1$. Damit folgt:

   $$s_{11} = \sum_{i=1}^{11} (-4)^{i-1} = 1 \cdot \frac{(-4)^{11} - 1}{-4-1} = \frac{-4\,194\,304 - 1}{-5} = \frac{4\,194\,305}{5} = \underline{\underline{838\,861}}$$

   (b) Damit hinter dem Summenzeichen tatsächlich die Form $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ steht, muss hier zuerst noch umgeformt werden. Dazu verwenden wir die ersten beiden Potenzgesetze:

   $$\begin{aligned} s_8 &= \sum_{k=1}^{8} 2 \cdot 3^k = \sum_{k=1}^{8} 2 \cdot 3^{k-1+1} = \sum_{k=1}^{8} 2 \cdot 3^{k-1} \cdot 3^1 = \sum_{k=1}^{8} 6 \cdot 3^{k-1} \\ &= 6 \cdot \frac{3^8 - 1}{3-1} = 6 \cdot \frac{6561 - 1}{2} = 3 \cdot 6560 = \underline{\underline{19\,680}} \end{aligned}$$

   (c) Die hier gegebene Summe startet nicht beim Index $n = 1$, sondern bei $n = 0$. Das sollten wir korrigieren, damit wir die Partialsummenformel anwenden können. Wir nehmen einen *Indexwechsel* vor, quasi eine *Substitution*, und definieren: $k = n + 1$ resp. $n = k - 1$. Damit läuft die Summe nun von $k = 1$ (vorher $n = 0$) bis $k = 8$ (vorher $n = 7$) und innerhalb der Summe müssen wir das n eben durch $k - 1$ ersetzen:

   $$\sum_{n=0}^{7} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} = \sum_{k=1}^{8} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1+2}$$

   Nun muss der Ausdruck hinter dem Summenzeichen wiederum der expliziten Darstellung $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ einer geometrischen Folge entsprechen. Das bedeutet, wir nehmen den Ausdruck $\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1+2}$ entsprechend auseinander:

   $$\begin{aligned} s_8 &= \sum_{k=1}^{8} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1+2} = \sum_{k=1}^{8} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \sum_{k=1}^{8} \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^8 - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{4}{9} \cdot \frac{\frac{256}{6561} - 1}{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{256}{6561}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{6305}{6561} = \underline{\underline{\frac{25\,220}{19\,683}}} \end{aligned}$$

4. Aus der Vorgabe von a_4 und q ermitteln wir zuerst a_1:

   $$a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{18}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = 18 \cdot 3^3 = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$$

   Nun ermitteln wir den Index n zu $s_n = 728$, wofür wir die Summenformel für die n-te Partialsumme nach n aulösen müssen. Ich mache das hier mal formal, auch wenn wir von Anfang an Zahlen einsetzen könnten:

   $$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s_n(q-1)}{a_1} = q^n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s_n(q-1)}{a_1} + 1 = q^n \quad \Leftrightarrow \quad n = \log_q\left(\frac{s_n(q-1)}{a_1} + 1\right)$$

   Nun setzen wir die Zahlen in diese Gleichung für n ein und erhalten zunächst n, danach auch a_n:

   $$n = \log_{1/3}\left(\frac{728\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{486} + 1\right) = \log_{1/3}\left(-\frac{728 \cdot 2}{3 \cdot 486} + 1\right) = \log_{1/3}\left(-\frac{728}{729} + 1\right) = \log_{1/3}\left(\frac{1}{729}\right) = \underline{\underline{5}}$$

   $$\Rightarrow \quad a_5 = a_1 \cdot q^4 = 486 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \underline{\underline{6}}$$

5. Es ist $a_1 = 15$ und $q = \frac{16}{15}$. Wiederum müssen wir aus einer vorgegebenen Grösse der Partialsumme den Index n bestimmen. Ich verwende dazu das formale Resultat für n aus Aufgabe 4 und setze die Partialsumme gleich eine Milliarde. So erhalten wir zunächst ein nicht-natürliches n:

$$n = \log_q\left(\frac{s_n(q-1)}{a_1} + 1\right) = n = \log_{16/15}\left(\frac{1\,000\,000\,000\,\left(\frac{16}{15} - 1\right)}{15} + 1\right) \approx 237.18$$

Somit ist die Partialsumme nach $\underline{\underline{\text{ab } n = 238}}$ grösser als eine Milliarde.

6. Offensichtlich handelt es sich bei der Folge $3,\ 33,\ 333,\ 3333,\ \ldots$ um eine geometrische Reihe. Es werden die Glieder der geometrischen Folge $3,\ 30,\ 300$, etc. aufsummiert. Diese Folge lautet explizit definiert: $a_k = 3 \cdot 10^{k-1}$. Die Partialsumme lässt sich mittels Summenzeichen sehr kompakt explizit notieren, wobei genau über diese explizite Form der zugehörigen Folge summiert werden muss, von $k = 1$ bis $k = n$:

$$s_n = 3 + 30 + 300 + 3000 + \ \ldots \ + 3 \cdot 10^{n-1} = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 10^{k-1}}}$$

Rekursiv können wir schreiben:

$$\underline{\underline{s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_1 \cdot q^{n-1}}}$$

Diese rekursive Definition ist aber nur halbwegs brauchbar und streng genommen auch nicht wirklich rekursiv, denn neben dem vorangehenden Glied s_{n-1} wird eben auch noch der Index n zur Berechnung von s_n benötigt.

7. Wir notieren die ersten paar Glieder der im Text definierten Folge:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = m\\
&a_3 = 2 \cdot a_2 - a_1 = 2m - 1\\
&a_4 = 2 \cdot a_3 - a_2 = 2(2m-1) - m = 4m - 2 - m = 3m - 2\\
&a_5 = 2 \cdot a_4 - a_3 = 2(3m-2) - (2m-1) = 6m - 4 - 2m + 1 = 4m - 3\\
&a_6 = 2 \cdot a_5 - a_4 = 2(4m-3) - (3m-2) = 8m - 6 - 3m + 2 = 5m - 4
\end{aligned}$$

Es sieht sehr nach einer arithmetischen Folge aus, denn die Zahlen x und y in der Summe $x \cdot m + y$ verändern sich gleichmässig. Dann müsste für das k-te Glied gelten:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

Wir können nun zwei der obigen Fälle einsetzen und so die Parameter a_1 und d in Abhängigkeit von m bestimmen. Dabei ist der erste Fall ganz simpel, nämlich $\underline{a_1 = 1}$. Nun können wir beispielsweise a_4 verwenden, um auch noch d in Abhängigkeit von m anzugeben:

$$a_4 = a_1 + 3d = 1 + 3d \stackrel{!}{=} 3m - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3d = 3m - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{d = m - 1}$$

Somit lautet die explizite Form für das allgemeine Glied a_k:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d = 1 + (k-1) \cdot (m-1) = 1 + km - k - m + 1 = \underline{\underline{2 - m - k + km}}$$

8. Zur Bestimmung der gesuchten Grössen benutzen wir konsequent die expliziten Formeln für das n-te Folgeglied und die n-te Partialsumme:

(a) $a_4 = 27,\ q = 0.3 = \dfrac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{a_4}{q^3} = \dfrac{27}{\left(\frac{3}{10}\right)^3} = 27 \cdot \dfrac{10^3}{3^3} = 10^3 = \underline{\underline{1000}}$

$$\Rightarrow \quad s_9 = a_1 \cdot \frac{q^9}{q-1} = 1000 \cdot \frac{\left(\frac{3}{10}\right)^9 - 1}{\frac{3}{10} - 1} = 1000 \cdot \frac{\frac{3^9 - 10^9}{10^9}}{\frac{3-10}{10}} = 1000 \cdot \frac{3^9 - 10^9}{10^9} \cdot \frac{10}{3-10}$$
$$= \frac{10^9 - 3^9}{10^5(10-3)} = \frac{1\,000\,000\,000 - 19\,683}{100\,000 \cdot 7} = \frac{999\,980\,317}{700\,000} = \underline{\underline{\frac{142\,854\,331}{100\,000}}} = \underline{\underline{1428.54331}}$$

(b) $a_1 = \dfrac{1}{5},\ q = 2,\ s_i = 26\,214.2 \quad \Rightarrow \quad s_i = a_1 \cdot \dfrac{q^i - 1}{q-1} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{2^i - 1}{2-1} = \dfrac{2^i - 1}{5} \stackrel{!}{=} 26\,214.2$

$$\Leftrightarrow \quad 2^i - 1 = 131\,071 \quad \Leftrightarrow \quad 2^i = 131\,072 \quad \Leftrightarrow \quad i = \log_2(131\,072) = \underline{\underline{17}}$$

(c) $a_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{40},\ q = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a_{10} = a_1 \cdot q^9 = \dfrac{\sqrt{6}}{40} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^9 = \dfrac{\sqrt{6}}{40} \cdot 16\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{5} \cdot 2\sqrt{2} = \underline{\underline{\dfrac{4\sqrt{3}}{5}}} \approx 1.386$

$$\Rightarrow \quad s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q-1} = \frac{\sqrt{6}}{40} \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{10} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{6}}{40} \cdot \frac{32 - 1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \underline{\underline{\frac{62\sqrt{3} + 31\sqrt{6}}{40}}} \approx 4.583$$

(d) $a_1 = \dfrac{1}{6},\ q = 1 - \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad a_6 = a_1 \cdot q^5 = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right)^5 = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - 5\sqrt{3} + 10\left(\sqrt{3}\right)^2 - 10\left(\sqrt{3}\right)^3 + 5\left(\sqrt{3}\right)^4 - \left(\sqrt{3}\right)^5\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left(1 - 5\sqrt{3} + 30 - 30\sqrt{3} + 45 - 9\sqrt{3}\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(76 - 44\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{\frac{38 - 22\sqrt{3}}{3}}} \approx -0.0350$$

$$\Rightarrow \quad s_6 = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\left(1 - \sqrt{3}\right)^6 - 1}{1 - \sqrt{3} - 1}$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - 6\sqrt{3} + 15\left(\sqrt{3}\right)^2 - 20\left(\sqrt{3}\right)^3 + 15\left(\sqrt{3}\right)^4 - 6\left(\sqrt{3}\right)^5 + \left(\sqrt{3}\right)^6 - 1}{-\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - 6\sqrt{3} + 45 - 60\sqrt{3} + 135 - 54\sqrt{3} + 27 - 1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{207 - 120\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \left(120 - \frac{207}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(120 - \frac{207\sqrt{3}}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{40 - 23\sqrt{3}}{2}}} \approx 0.0814$$

9. Aus $a_1 = 3$ und $q = 2$ bestimmen wir den Grenzindex n, für den die Partialsumme gleich $100\,000$ wird:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1} = 3\left(2^n - 1\right) \stackrel{!}{=} 100\,000 \quad \Leftrightarrow \quad 2^n - 1 = \frac{100\,000}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2^n = \frac{100\,000}{3} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = \log_2\left(\frac{100\,000}{3} + 1\right) \approx 15.025$$

Damit ist der natürliche Index n, ab dem die Partialsumme s_n grösser als $100\,000$ ist, gleich 16. Für a_{16}, also für das gesuchte x, ergibt sich:

$$x = a_{16} = a_1 \cdot q^{15} = 3 \cdot 2^{15} = \underline{\underline{98\,304}}$$

10. Es ist $a_1 = 1$ und $a_{10} = 2$. Daraus folgt für den Vergrösserungsfaktor q:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 \quad \Leftrightarrow \quad q^9 = \frac{a_{10}}{a_1} = \frac{2}{1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt[9]{2} \approx 1.08006$$

Für die zehnte Partialsumme folgt somit:

$$s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} = \frac{\left(\sqrt[9]{2}\right)^{10}-1}{\sqrt[9]{2}-1} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt[9]{2}-1}{\sqrt[9]{2}-1}}} \approx 14.491$$

Im Prinzip kann man den doppelt unterstrichenen algebraischen Ausdruck schon noch weiter bearbeiten, sodass der Nenner wurzelfrei wird. Das haben wir aber nur für Quadratwurzeln angeschaut und wollen es hier daher nicht durchexerzieren.

11. *Das Sierpinski-Dreieck.*

(a) Aus den gezeigten Figuren lesen wir ab, dass gilt:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{4} \cdot A = \frac{1}{4} \cdot 4 = \underline{\underline{1}} \\
a_2 &= a_1 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot a_1 = a_1 + \frac{3}{4} \cdot a_1 = a_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right) = 1 + \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{7}{4} = 1.75}} \\
a_3 &= a_2 + 9 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot a_1 = a_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{37}{16} = 2.3125}}
\end{aligned}$$

Wir entdecken eine geometrische Reihe mit $a_1 = 1$ und $q = \frac{3}{4}$. (In unserer angestammten Notation müssten dann die Flächen oben nicht mit a_1, a_2, a_3, etc., sondern besser mit s_1, s_2, s_3, etc. angeschrieben sein.) Die Formel für das n-te Folgeglied lautet somit:

$$a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{4}} = \underline{\underline{4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}}$$

Für a_4 (resp. eben eigentlich s_4) finden wir damit:

$$a_4 = 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4\right) = 4 \cdot \frac{256 - 81}{256} = \underline{\underline{\frac{175}{64} = 2.734375}}$$

(b) Der Grenzwert für $n \to \infty$ lässt sich leicht bilden:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 4 \cdot (1 - 0) = \underline{\underline{4}}$$

Das bedeutet, die Dreiecke werden am Ende "die ganze Fläche" des grossen Dreiecks einnehmen!

(c) Wir lösen mittels Logarithmieren:

$$4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \overset{!}{=} 3.99 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 - \frac{3.99}{4} = \frac{1}{400} \quad \Leftrightarrow \quad n = \log_{3/4}\left(\frac{1}{400}\right) \approx 20.83$$

Somit ist die Fläche a_n <u>ab $n = 21$</u> grösser als 3.99.

(d) Bei jedem Schritt wird jedes bisherige braune Dreieck in vier kleinere Dreiecke unterteilt, von denen drei wieder braun sind. Somit lautet die Anzahl N an braunen Dreiecke in Abhängigkeit des Indexes n ganz simpel:

$$\underline{\underline{N_n = 3^n}}$$