

Lösungen F & R 5: Unendliche geometrische Reihen

Klasse 155c / AGe

1. Wir erhalten die folgenden Resultate:

$$(a) \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots \Rightarrow a_1 = 1, q = \frac{1}{4} \Rightarrow s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$(b) \quad 5 + \frac{3}{2} + \frac{9}{20} + \dots \Rightarrow a_1 = 5, q = \frac{3}{10} \Rightarrow s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{3}{10}} = \frac{5}{\frac{7}{10}} = \frac{50}{7}$$

$$(c) \quad 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \dots \Rightarrow a_1 = 3, q = -\frac{1}{2} \Rightarrow s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

$$(d) \quad 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \dots \Rightarrow a_1 = 1, q = -\frac{2}{3} \Rightarrow s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$(e) \quad 2 + \sqrt{2} + 1 + \dots \Rightarrow a_1 = 2, q = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2-1} = 4+2\sqrt{2}$$

$$(f) \quad 8 - 4\sqrt{3} + 6 - \dots \Rightarrow a_1 = 8, q = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{8}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{16}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{32+16\sqrt{3}}{4-3} = 32+16\sqrt{3}$$

2. (a) Wir stellen die Summenformel um und erhalten für a_1 :

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Leftrightarrow a_1 = s_\infty(1-q) = 5 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

(b) Nun lösen wir nach q auf:

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Leftrightarrow 1-q = \frac{a_1}{s_\infty} \Leftrightarrow q = 1 - \frac{a_1}{s_\infty} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

(c) Wir bestimmen zuerst wieder a_1 und daraus dann a_{10} :

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Leftrightarrow a_1 = s_\infty(1-q) = 32 \left(1 - \frac{5}{8}\right) = 32 \cdot \frac{3}{8} = 12 \\ \Rightarrow a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 12 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^9 = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5^9}{2^{27}} = \frac{3 \cdot 5^9}{2^{25}} \approx 0.1746$$

(d) Wir lösen wieder ganz direkt nach q auf:

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Leftrightarrow 1-q = \frac{a_1}{s_\infty} \Leftrightarrow q = 1 - \frac{a_1}{s_\infty} = 1 - \frac{a_1}{4a_1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

3. Geometrisch Unendliches...

- (a) Hat das äusserste Quadrat die Seitenlänge $\ell_1 = 10$, so ist dies gleichzeitig der Durchmesser d_1 des äussersten Kreises. Dieser Durchmesser ist aber auch gerade wieder die Diagonalenlänge des nächsten Quadrates. Da beim Quadrat die Beziehung $d = \ell \cdot \sqrt{2}$ zwischen Seitenlänge und ℓ und Diagonale d gilt, folgern wir für den Verkleinerungsfaktor vom äussersten Quadrat zum nächsten:

$$\ell_2 = \frac{d_1}{\sqrt{2}} = \frac{\ell_1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wir folgern für die unendliche Summe aller Quadratumfange:

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \cdot 10 = 40 \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \quad s_\infty &= \frac{40}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{80 + 40\sqrt{2}}{2 - 1} = \underline{\underline{(80 + 40\sqrt{2}) \text{ cm}}} \end{aligned}$$

Derselbe Verkleinerungsfaktor $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt nun natürlich auch für die Kreisdurchmesser oder -radien. Geometrisch ist q als Streck- resp. Stauchungsfaktor zu verstehen. Werden Längen mit diesem Faktor q verkleinert, so werden Flächen hingegen mit dem Faktor $q^2 = \frac{1}{2}$ kleiner. Damit erhalten wir für die Summe der Kreisflächen:

$$a_1 = \pi \cdot r_1^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad s_\infty = \frac{25\pi}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\underline{50\pi \text{ cm}^2}}$$

- (b) i. Von Dreieck zu Dreieck halbiert sich sowohl die Grundseite g , als auch die Höhe h . Folglich wird die Fläche bei jedem Schritt durch geviertelt ($q = \frac{1}{4}$). Damit ist die Berechnung der Gesamtfläche rasch ausgeführt, nachdem die Fläche des ersten Dreiecks einmal bestimmt ist:

$$a_1 = \frac{g_1 \cdot h_1}{2} = \frac{8 \cdot 16}{2} = 64 \quad \Rightarrow \quad s_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{64}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{64}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{256}{3}}}$$

- ii. Wir berechnen die ersten paar Strecken, um zu verstehen, wie verkleinert wird:

$$\ell_1 = \text{Strecke von } A_1 \text{ nach } A_2 = \sqrt{16^2 + 16^2} = \sqrt{16^2(1+1)} = 16\sqrt{2}$$

$$\ell_2 = \text{Strecke von } A_2 \text{ nach } A_3 = \sqrt{16^2 + 8^2} = \sqrt{8^2(2^2 + 1^2)} = 8\sqrt{5}$$

$$\ell_3 = \text{Strecke von } A_3 \text{ nach } A_4 = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{8^2(1+1)} = 8\sqrt{2}$$

$$\ell_4 = \text{Strecke von } A_4 \text{ nach } A_5 = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{4^2(2^2 + 1^2)} = 4\sqrt{5}$$

Wir sehen, dass die Länge beim Übergang von ℓ_1 nach ℓ_3 genau halbiert wird, ebenso von ℓ_2 nach ℓ_4 , aber eben nicht von ℓ_1 nach ℓ_2 resp. von ℓ_3 nach ℓ_4 . Die Folge $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$ ist also nicht geometrisch, wohl aber sind es die beiden Teilfolgen $\ell_1, \ell_3, \ell_5, \dots$ und $\ell_2, \ell_4, \ell_6, \dots$.

In der Konsequenz müssen wir diese beiden Teilfolgen separat betrachten und je eine unendliche Summe berechnen. Zusammen ergibt sich so die gesuchte Länge des gesamten Streckenzugs:

$$\begin{aligned} s_{\infty,1} &= \frac{16\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 32\sqrt{2} \quad \text{und} \quad s_{\infty,2} = \frac{8\sqrt{5}}{1 - \frac{1}{2}} = 16\sqrt{5} \\ s_\infty &= s_{\infty,1} + s_{\infty,2} = \underline{\underline{32\sqrt{2} + 16\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

- (c) i. Es sind $\ell_1 = 4$ und $q = \frac{3}{4}$. Daraus folgt:

$$s_\infty = \frac{4}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{16}}$$

- ii. Die Spiralpunkte streben dem Spiralzentrum $Z(x_Z, y_Z)$ zu. Für dessen x -Koordinate sind nur die Beiträge horizontaler Spiralabschnitte entscheidend, denn nur dabei verändert sich an der x -Koordinate der Punkte etwas. Der Faktor beträgt nun allerdings $q = -\left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{9}{16}$. Das Vorzeichen kommt daher, dass es abwechselungsweise nach rechts nach links geht:

$$x_Z = 4 - 4 \cdot \frac{9}{16} + 4 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^2 + \dots = \frac{4}{1 - \left(-\frac{9}{16}\right)} = \frac{4}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{4}{\frac{16+9}{16}} = \frac{64}{25}$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich für die y -Koordinate des Spiralzentrums:

$$y_Z = 3 - 3 \cdot \frac{9}{16} + 3 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^2 + \dots = \frac{3}{1 - \left(-\frac{9}{16}\right)} = \frac{3}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{3}{\frac{16+9}{16}} = \frac{48}{25}$$

Somit befindet sich das Spiralzentrum bei $\underline{\underline{Z\left(\frac{64}{25}, \frac{48}{25}\right) = (2.56, 1.92)}}$.