

Lösungen F & R 6: Vermischte Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Klasse 155c / AGe

1. Beschrieben wird die AF $a_1 = 1006$, $a_2 = 1016$, $a_3 = 1026$, ..., $a_n = 9996$.

Darin sind $a_1 = 1006$ und $d = 10$. Somit finden wir für den Index n des letzten Gliedes:

$$\text{Anzahl Schritte: } n - 1 = \frac{a_n - a_1}{10} = \frac{9996 - 1006}{10} = \frac{8990}{10} = 899 \Rightarrow \text{Anzahl Glieder: } \underline{\underline{n = 900}}$$

2. (a) $3, -6, 12, -24, 48, \dots \Rightarrow$ GF mit $a_1 = 3$, $q = -2$

$$\text{expl. Def.: } \underline{a_k = 3 \cdot (-2)^{k-1}} \quad \text{und} \quad \text{rek. Def.: } \underline{a_k = a_{k-1} \cdot (-2)} \quad \text{mit } a_1 = 3$$

$$a_{15} = 3 \cdot (-2)^{14} = \underline{\underline{49152}}$$

- (b) $2, -4, 6, -8, 10, \dots \Rightarrow$ weder AF noch GF!

$$\text{expl. Def.: } \underline{a_k = (-1)^{k+1} \cdot 2k} \quad \text{rek. Def.: } \underline{a_k = \begin{cases} -a_{k-1} - 2 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -a_{k-1} + 2 & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}} \quad \text{mit } a_1 = 2$$

$$a_{15} = (-1)^{15+1} \cdot 2 \cdot 15 = \underline{\underline{30}}$$

- (c) $1, 2, 4, 8, 15, \dots \Rightarrow$ weder AF noch GF! Sehr unklar, wie es weitergehen soll...

- (d) $-765, -654, -543, -432, \dots \Rightarrow$ AF mit $a_1 = -765$, $d = 111$

$$\text{expl. Def.: } \underline{a_k = -765 + (k-1) \cdot 111} \quad \text{und} \quad \text{rek. Def.: } \underline{a_k = a_{k-1} + 111} \quad \text{mit } a_1 = -765$$

$$\Rightarrow a_{15} = -765 + (15-1) \cdot 111 = \underline{\underline{789}}$$

3. Wir benutzen direkt die jeweiligen Partialsummenformeln und im Falle der AR auch die explizite Schreibweise für das n -te Glied:

- (a) $37 + 30 + 23 + \dots \Rightarrow a_1 = 37$, $d = -7$

$$\Rightarrow s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d) = n \cdot a_1 + \frac{dn(n-1)}{2} = 37n - \frac{7n(n-1)}{2} = \underline{\underline{37n - \frac{7n(n-1)}{2}}}$$

- (b) $16 + 12 + 9 + \dots \Rightarrow a_1 = 16$, $q = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 16 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4} - 1} = 16 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{4}} = \underline{\underline{64 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}}$$

4. Notiere die Summe mittels des Summenzeichens Σ und rechne sie danach aus:

- (a) $15 + 18 + 21 + \dots + 84 \Rightarrow$ AF mit $a_1 = 15$, $d = 3 \Rightarrow n = \frac{84 - 15}{3} + 1 = 24$

$$\Rightarrow s_{24} = \sum_{k=1}^{24} (a_1 + (k-1) \cdot d) = \sum_{k=1}^{24} (15 + 3(k-1)) = \frac{24}{2} (15 + 84) = 12 \cdot 99 = \underline{\underline{1188}}$$

- (b) $4 + 12 + 36 + \dots + 972 \Rightarrow$ GF mit $a_1 = 4$, $q = 3 \Rightarrow n = \log_3\left(\frac{972}{4}\right) + 1 = 6$

$$\Rightarrow s_6 = \sum_{k=1}^6 (a_1 \cdot q^{k-1}) = \sum_{k=1}^6 (4 \cdot 3^{k-1}) = 4 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 4 \cdot \frac{729 - 1}{2} = 2 \cdot 728 = \underline{\underline{1456}}$$

$$(c) \quad 15\,360 - 23\,040 + 34\,560 - \dots - 1\,328\,602.5 \Rightarrow \text{GF mit } a_1 = 15\,360, q = \frac{-23\,040}{15\,360} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow n = \log_{-3/2} \left(\frac{-1\,328\,602.5}{15\,360} \right) + 1 = 12$$

$$\Rightarrow s_{12} = \sum_{k=1}^{12} \left(15\,360 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right)^{k-1} \right) = 15\,360 \cdot \frac{\left(-\frac{3}{2} \right)^{12} - 1}{-\frac{3}{2} - 1} = 15\,360 \cdot \frac{\frac{3^{12}}{2^{12}} - 1}{-\frac{5}{2}} = \underline{\underline{-791\,017.5}}$$

$$(d) \quad 17 + 11 + 5 - 1 - \dots - 31 - 37 \Rightarrow \text{AF mit } a_1 = 17, d = -6 \Rightarrow n = \frac{-37 - 17}{-6} + 1 = 10$$

$$\Rightarrow s_{10} = \sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1) \cdot d) = \sum_{k=1}^{10} (17 - 6(k-1)) = \frac{10}{2} (17 - 37) = 5 \cdot (-20) = \underline{\underline{-100}}$$

$$5. (a) \quad a_1 = 9, a_2 = 11 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 2 \Rightarrow a_{48} = a_1 + 47d = 9 + 47 \cdot 2 = \underline{\underline{103}}$$

$$\Rightarrow s_{48} = \frac{48}{2} (9 + 103) = 24 \cdot 112 = \underline{\underline{2688}}$$

$$(b) \quad a_1 = 34, d = -6, a_i = -80 \Rightarrow i = \frac{a_i - a_1}{d} + 1 = \frac{-80 - 34}{-6} + 1 = 19 + 1 = \underline{\underline{20}}$$

$$(c) \quad a_8 = -2, a_{24} = 12 \Rightarrow d = \frac{a_{24} - a_8}{16} = \frac{12 - (-2)}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_8 - 7d = -2 - 7 \cdot \frac{7}{8} = \frac{-16 - 49}{8} = \underline{\underline{-\frac{65}{8}}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=8}^{24} a_k = \frac{17}{2} (a_8 + a_{24}) = \frac{17}{2} \cdot (-2 + 12) = \frac{17}{2} \cdot 10 = \underline{\underline{85}}$$

$$6. (a) \quad 10, 18, \dots \Rightarrow a_1 = 10, d = 8 \Rightarrow n_{\text{grenz}} = \frac{1000 - 10}{8} + 1 = \frac{990}{8} + 1 = 124.75$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{134 \text{ Glieder sind kleiner als } 1000}}$$

$$(b) \quad u_1 = 4, u_{k+1} = u_k + 1.25 \Rightarrow \text{AF mit } d = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$n_{\text{grenz}} = \frac{10^4 - 4}{1.25} + 1 = \frac{9996}{1.25} + 1 = 7997.8 \Rightarrow \underline{\underline{7997 \text{ Glieder sind kleiner als } 10\,000}}$$

7. (a) Ohne allzu gross zu rechnen können wir sagen: Der Durchschnitt der drei Zahlen muss $\frac{345}{3} = 115$ sein. Dann ist aber 115 gerade die mittlere der drei Zahlen und die dreigliedrige Folge muss somit 103, 115, 127 lauten.

(b) Ist a_2 die mittlere der drei Zahlen, so ist $a_1 = \frac{a_2}{q}$ und $a_3 = a_2 \cdot q$ die dritte Zahl, wenn es sich um eine GF handeln soll. Nun folgern wir:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{a_2}{q} \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot q = a_2^3 \stackrel{!}{=} 27\,000 \Rightarrow a_2 = \sqrt[3]{27\,000} = \underline{\underline{30}}$$

8. (a) Wir benutzen die Summenformel zur Ermittlung der Anzahl Folgenglieder:

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (3 + 37) = 20n \stackrel{!}{=} 400 \Leftrightarrow \underline{\underline{n = 20}}$$

(b) Dies ist eine schon oft vorgekommene Grundaufgabe zu AFs:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Leftrightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{302 - 5}{3} + 1 = \frac{297}{3} + 1 = \underline{\underline{100}}$$

9. Es ist $a_1 = 975$ und $d = -18$. Wir schauen, wie viele positive Glieder diese Folge maximal beinhalten kann:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow n = \frac{0 - a_1}{d} + 1 = \frac{0 - 975}{-18} + 1 = \frac{325}{6} + 1 \approx 55.83$$

Somit kann die AF maximal 55 Glieder umfassen. Wenn es 55 Glieder sind, so lautet das Letzte:

$$a_{55} = a_1 + (55-1) \cdot d = 975 - 54 \cdot 18 = 975 - 972 = \underline{\underline{3}}$$

$$10. \quad (a) \quad a_4 = 0.5 = \frac{1}{2}, q = 0.25 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \underline{\underline{32}} \Rightarrow s_9 = \frac{32}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{32}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{128}{3}}}$$

$$(b) \quad a_1 = 3645, q = 3, a_i = 98415 \Rightarrow a_i = a_1 \cdot q^{i-1} = 3645 \cdot 3^{i-1} \stackrel{!}{=} 98415 \\ \Leftrightarrow i-1 = \log_3\left(\frac{98415}{3645}\right) = \log_3(27) = 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{i=4}}$$

$$(c) \quad a_{11} = 162, a_{15} = 1458 \Rightarrow q^4 = \frac{a_{15}}{a_{11}} = \frac{1458}{162} = 9 \Leftrightarrow \underline{\underline{q = \pm\sqrt{3}}} \\ \Rightarrow a_1 = \frac{a_{11}}{q^{10}} = \frac{162}{243} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$$(d) \quad a_7 = \frac{729}{32}, q = \frac{3}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{a_7}{q^6} = \frac{\frac{729}{32}}{\left(\frac{3}{4}\right)^6} = \frac{3^6}{2^5} \cdot \frac{4^6}{3^6} = 2^7 = 128 \\ \Rightarrow s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{128}{1-\frac{3}{4}} = \frac{128}{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{512}}$$

11. (a) Es ist $a_1 = 1000$ und $q = \frac{999}{1000}$, woraus wir mit der expliziten Darstellung der GF folgern:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1000 \cdot \left(\frac{999}{1000}\right)^{n-1} \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow n = \log_{\frac{999}{1000}}\left(\frac{1}{1000}\right) + 1 \approx 6905.3$$

Somit sind die ersten 6905 Glieder der GF grösser als 1.

(b) Mit $u_1 = 1024$ und $q = \frac{1}{2}$ gehen wir genau gleich vor wie bei (a):

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1024000}\right) + 1 \approx 20.97$$

Folglich sind die ersten 20 Glieder dieser GF grösser als 0.001.

(c) Mit $a_1 = 4$ und $q = 3$ benutzen die Partialsummenformel zur Berechnung des Grenzindex:

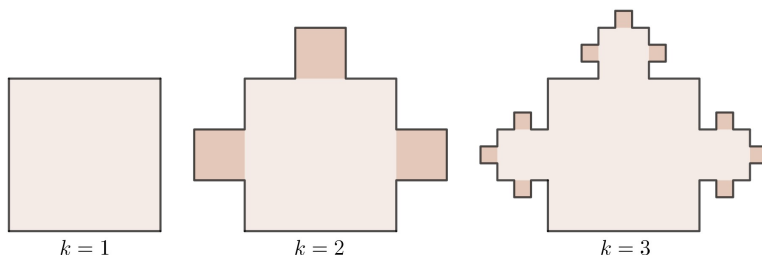
$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 4 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 2(3^n - 1) \stackrel{!}{=} 1000 \Leftrightarrow 3^n = 501 \Leftrightarrow n = \log_3(501) \approx 5.7$$

Somit müssen nur 6 Glieder aufsummiert werden, damit die Summe grösser als 1000 wird.

12. Es ist $a_1 = 2\sqrt{3}$ und $q = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Damit folgt für den Grenzwert der unendlichen GR:

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{4-2} = \underline{\underline{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}}$$

13.



- (a) Vorüberlegung: Die Folge der Flächeninhalte muss konvergieren, denn die abgedeckte Fläche wird ja offensichtlich nicht unendlich gross. (Wir könnten ein Rechteck (mit endlicher Fläche) rund um die Figur zeichnen, dessen Ränder durch die Konstruktion nie überschritten würden!)

Notieren wir die Summen der Flächeninhalte und berechnen wir daraus den Grenzwert:

$$\begin{aligned} s_\infty &= \underbrace{1^2}_{=a_1} + \underbrace{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2}_{=a_2} + \underbrace{3^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2}_{=a_3} + \dots = \underbrace{1}_{=s_1} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{=s_2} + \underbrace{\frac{1}{9}}_{=s_3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

- (b) Versuchen wir eine ähnliche Summenbildung für die Folge der Umfänge, wobei ich die untere Seite des Quadrats ganz abspalte:

$$\begin{aligned} s_\infty &= 1 + \underbrace{3 \cdot 1}_{=a_1} + \underbrace{3 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)}_{=a_2} + \underbrace{3^2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right)}_{=a_3} + \dots = 1 + \underbrace{3}_{=s_1} + \underbrace{2}_{=s_2} + \underbrace{2}_{=s_3} + \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 + (n-1) \cdot 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + 2n = \infty \end{aligned}$$

Die Reihe der Umfänge divergiert also. Es liegt somit eine endliche Fläche mit unendlich grossem Umfang vor!

14. (a) Es ist $s_1 = a_1 = \frac{1}{10}$ und aus der Satzbeschreibung folgern wir:

$$\begin{aligned} s_\infty &= \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{10(1-q)} \stackrel{!}{=} q - \frac{7}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{1-q} \stackrel{!}{=} 10q - \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2 = (1-q)(20q-7) \\ &\Leftrightarrow 20q^2 - 27q + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow q_{1/2} = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 20 \cdot 9}}{2 \cdot 20} = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 720}}{40} = \frac{27 \pm 3}{40} = \underline{\underline{\frac{3}{4} \text{ oder } \frac{3}{5}}} \end{aligned}$$

Das ist ein leicht erstaunliches Resultat, das wir doch rasch überprüfen möchten:

$$\text{Fall 1: } a_1 = \frac{1}{10}, q = \frac{3}{4} \Rightarrow s_\infty = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{1} = \frac{2}{5}$$

$$\text{und } q - \frac{7}{20} = \frac{3}{4} - \frac{7}{20} = \frac{15}{20} - \frac{7}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \quad \checkmark$$

$$\text{Fall 2: } a_1 = \frac{1}{10}, q = \frac{3}{5} \Rightarrow s_\infty = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{und } q - \frac{7}{20} = \frac{3}{5} - \frac{7}{20} = \frac{12}{20} - \frac{7}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$

Es gibt also tatsächlich zwei funktionierende Werte für q .

- (b) Bereits im Ansatz der Fragestellung klingt diese Aufgabe nach einem 2x2-Gleichungssystem. Wir formulieren:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} s_\infty = 9 \\ a_1 + a_2 = 5 \end{array} \right| &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{a_1}{1-q} = 9 \\ a_1 + a_1 \cdot q = 5 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1 = 9(1-q) \\ a_1 = \frac{5}{1+q} \end{array} \right| \Rightarrow 9(1-q) = \frac{5}{1+q} \\ &\Rightarrow 9(1-q^2) = 5 \Leftrightarrow 1-q^2 = \frac{5}{9} \Leftrightarrow q^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow q = \pm \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Offenbar gibt es zwei Lösungen. Wir wollen jeweils a_1 und a_2 bestimmen, aber am besten auch gleich noch die Richtigkeit der Lösung überprüfen:

Fall 1: $q = \frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = 9(1-q) = 9\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3 \Rightarrow a_2 = q \cdot a_1 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$
 $\Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 3, a_2 = 2}}$

damit ist $s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{2}{3}} = 3 \cdot \frac{3}{1} = 9 \quad \checkmark$ und $a_1 + a_2 = 3 + 2 = 5 \quad \checkmark$

Fall 2: $q = -\frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = 9(1-q) = 9\left(1 + \frac{2}{3}\right) = 15 \Rightarrow a_2 = q \cdot a_1 = -\frac{2}{3} \cdot 15 = -10$
 $\Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 15, a_2 = -10}}$

damit ist $s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{15}{1+\frac{2}{3}} = 15 \cdot \frac{3}{5} = 9 \quad \checkmark$ und $a_1 + a_2 = 15 - 10 = 5 \quad \checkmark$

- (c) Wir betrachten die unendliche GR $(x-3) + \frac{1}{x-3} + \dots$ mit $x \neq 3$.

- i. Für den Faktor q erhalten wir aus den ersten beiden Gliedern:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{x-3}}{x-3} = \frac{1}{(x-3)^2}$$

Soll die Reihe konvergieren, so muss $|q| < 1$ sein. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(x-3)^2} \right| &= \frac{1}{|x-3|^2} < 1 \Leftrightarrow 1 < |x-3|^2 \Leftrightarrow 1 < |x-3| \\ &\Leftrightarrow \underline{\underline{x \in \mathbb{R} \setminus [2; 4] = x \in \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ oder } x > 4\}}} \end{aligned}$$

Die einzelnen Umformungen mit den Beträgen wollen genau überlegt sein, aber am Ende ergibt die Aussage sofort Sinn, auch wenn man diese Umformungsschritte nicht so genau nachvollzogen hat: Liegt x ausserhalb des Intervalls $[2; 4]$, so liegt $x-3$ ausserhalb des Intervalls $[-1, 1]$. Damit ist dann automatisch $(x-3)^2 > 1$ und somit eben auch $\frac{1}{(x-3)^2} < 1$ – und das ist genau die Bedingung, die für die Konvergenz der Reihe erfüllt sein muss.

- ii. Ist nun also $x < 2$ oder $x > 4$, so liegt Konvergenz vor, weil $\frac{1}{(x-3)^2} < 1$. In diesem Fall erhalten wir für die unendliche Summe:

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x-3}{1-\frac{1}{(x-3)^2}} = \frac{x-3}{\frac{(x-3)^2-1}{(x-3)^2}} = \frac{(x-3)^3}{x^2-6x+8} = \frac{(x-3)^3}{(x-2)(x-4)} \quad \text{q.e.d.}$$

- iii. Wir setzen die unendliche Summe von eben gleich $x+2$:

$$\begin{aligned} s_\infty &= \frac{(x-3)^3}{(x-2)(x-4)} \stackrel{!}{=} x+2 \Leftrightarrow (x-3)^3 = (x+2)(x-2)(x-4) \\ &\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = x^3 - 4x^2 - 4x + 16 \Leftrightarrow 5x^2 - 31x + 43 = 0 \\ &\Rightarrow x_{1/2} = \frac{31 \pm \sqrt{31^2 - 4 \cdot 5 \cdot 43}}{2 \cdot 5} = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 860}}{10} = \frac{31 \pm \sqrt{101}}{10} \approx 2.095 \text{ oder } 4.105 \end{aligned}$$

Da x aber nicht im Intervall $[2; 4]$ liegen darf, weil sonst die unendliche Summe s_∞ gar nicht existiert, kommt als einzige Lösung nur $x = \underline{\underline{\frac{31+\sqrt{101}}{10} \approx 4.105}}$ in Frage.

15. (a) Wir erhalten die folgenden Dezimalbrüche:

$$\frac{7}{4} = \underline{\underline{1.75}} \quad \frac{31}{3} = \underline{\underline{10.\overline{3}}} \quad \frac{5}{9} = \underline{\underline{0.\overline{5}}} \quad \frac{7}{11} = \underline{\underline{0.\overline{63}}}$$

- (b) Wir notieren jeweils über mit einer Zehnerpotenz im Nenner und kürzen, falls möglich:

$$3.125 = \frac{3125}{1000} = \frac{25}{\underline{\underline{8}}} \quad 0.444 = \frac{444}{1000} = \frac{111}{250} \quad 0.37 = \frac{37}{\underline{\underline{100}}} \quad 1.128 = \frac{1128}{1000} = \frac{141}{\underline{\underline{125}}}$$

- (c) Der periodische Dezimalbruch kann als geometrische Reihe notiert werden:

$$x = 0.\overline{13} = 0.13 + 0.0013 + 0.000013 + \dots$$

Wenn wir mit 100 multiplizieren, so entspricht dies der Multiplikation mit dem Verkleinerungsfaktor q dieser GR! Eine solche Multiplikation mit dem Faktor q hatten wir ebenfalls bei der Herleitung der Formel für die Partialsumme einer GR vorgenommen:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \\ \Rightarrow s_n \cdot q &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \\ \Rightarrow (q-1) \cdot s_n &= a_1 \cdot q^n - a_1 = a_1(q^n - 1) \quad \Rightarrow s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit q ist also bei der Berechnung der Summe – egal ob endlich oder unendlich – das Mittel der Wahl.

- (d) Mit der Summenformel für die unendliche GR erhalten wir:

$$\begin{aligned} 5.\overline{5} &= \sum_{k=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{10} \right)^{k-1} = \frac{5}{1 - \frac{1}{10}} = 5 \cdot \frac{10}{9} = \underline{\underline{\frac{50}{9}}} \\ 0.\overline{125} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{125}{1000} \left(\frac{1}{1000} \right)^{k-1} = \frac{\frac{125}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{125}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = \underline{\underline{\frac{125}{999}}} \\ 0.1\overline{3} &= 0.1 + 0.0\overline{3} = \frac{1}{10} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{100} \left(\frac{1}{10} \right)^{k-1} = \frac{1}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{3}{100} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10} + \frac{3}{90} = \frac{3}{30} + \frac{1}{30} = \underline{\underline{\frac{2}{15}}} \\ 2.\overline{54} &= 2 + 0.\overline{54} = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{54}{100} \left(\frac{1}{100} \right)^{k-1} = 2 + \frac{\frac{54}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{54}{100} \cdot \frac{100}{99} = 2 + \frac{54}{99} = 2 + \frac{28}{99} = \underline{\underline{\frac{208}{99}}} \\ 0.25\overline{7} &= 0.25 + 0.00\overline{7} = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{1000} \left(\frac{1}{10} \right)^{k-1} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{7}{1000}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{4} + \frac{7}{900} = \underline{\underline{\frac{58}{225}}} \\ 0.4\overline{81} &= 0.4 + 0.0\overline{81} = \frac{4}{10} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{81}{1000} \left(\frac{1}{100} \right)^{k-1} = \frac{2}{5} + \frac{\frac{81}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{2}{5} + \frac{81}{990} = \frac{2}{5} + \frac{9}{110} = \underline{\underline{\frac{53}{110}}} \end{aligned}$$

16. Diese Aufgabe ist recht anspruchsvoll, weil die Bestimmung der ersten beiden Strecke a_1 und a_2 und somit des Faktors q relativ viel mathematisches Vorwissen abverlangen.

Überlegen wir zuerst, weshalb die Längen der Strecken $a_1, a_2, a_3, \dots$ eine geometrische Folge bilden.

- Die Dreiecke $\triangle PA_1Z, \triangle A_1A_2Z, \triangle A_2A_3Z, \triangle A_3A_4Z$, etc. sind alle ähnlich zueinander, denn sie besitzen sichtbar zwei gleich Winkel, nämlich den rechten Winkel und den spitzen Winkel bei Z .
- Damit sind aber auch automatisch die Dreiecke $\triangle PA_1A_2, \triangle A_1A_2A_3, \triangle A_2A_3A_4, \triangle A_3A_4A_5$, etc. ähnlich zueinander, denn auch sie beinhalten nun offensichtlich zwei gleiche Winkel.

iii. Daraus folgt, dass die Seitenverhältnisse in all diesen Dreiecken $\triangle PA_1A_2$, $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_2A_3A_4$, $\triangle A_3A_4A_5$, etc. dieselben sind. Und somit folgt eben:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \dots$$

Für die Punkte P und Q gilt: $P(0,5)$ und $Q(5,0)$. Nun wollen wir die Koordinaten von A_1 bestimmen. Dazu geben wir die Geradengleichungen der beiden Geraden g und i an:

$$g: y = 2(x - x_Q) + y_Q = 2(x - 5) + 0 = 2x - 10 \quad \text{und} \quad i: y = -\frac{1}{2}(x - x_P) + y_P = -\frac{1}{2}x + 5$$

Dabei habe ich verwendet, dass sich die Gerade mit Steigung m , die durch einen bestimmten Punkt $B(x_B, y_B)$ verläuft, stets beschreiben lässt durch $y = m(x - x_B) + y_B$. Dass die Steigungen von g und i die Werte 2 und $\frac{1}{2}$ aufweisen, kann man direkt aus der Grafik ablesen.

Durch Gleichsetzen obiger Geradengleichungen ergibt sich die x -Koorindate des Schnittpunktes A_1 , aus der dann auch die y -Koordinate bestimmt werden kann:

$$2x - 10 = -\frac{1}{2}x + 5 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 15 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow y = 2 \cdot 6 - 10 = 2 \Rightarrow A_1(6, 2)$$

Mit dem Satz des Pythagoras bestimmen wir die Distanz zwischen den beiden Punkten P und A_1 , also die Länge a_1 : der Zickzacklinie:

$$a_1 = \sqrt{(x_{A_1} - x_P)^2 + (y_{A_1} - y_P)^2} = \sqrt{(6 - 0)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Zur Berechnung von a_2 benötigen wir zusätzlich die Koordinaten des Punktes A_2 . Zu deren Bestimmung schneiden wir die Geraden h und j miteinander. Deren Geradengleichungen lauten:

$$h: y = \frac{1}{2}(x - x_P) + y_P = \frac{1}{2}x + 5 \quad \text{und} \quad j: y = -2(x - x_{A_1}) + y_{A_1} = -2(x - 6) + 2 = -2x + 14$$

Dass die Steigung von j den Wert -2 hat, wissen wir, weil j senkrecht zu h steht und weil zwei für die Steigungen zweier senkrecht zueinander stehender Geraden stets gilt:

$$m_h \cdot m_j \stackrel{!}{=} -1 \Rightarrow \text{also: } m_j = -\frac{1}{m_h} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen liefert die Koordinaten von A_2 :

$$\frac{1}{2}x + 5 = -2x + 14 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{18}{5} = 3.6 \Rightarrow y = -2 \cdot \frac{18}{5} + 14 = \frac{34}{5} = 6.8 \Rightarrow A_2(3.6, 6.8)$$

Damit erhalten wir für die Länge von a_2 :

$$\begin{aligned} a_2 &= \sqrt{(x_{A_2} - x_{A_1})^2 + (y_{A_2} - y_{A_1})^2} = \sqrt{(3.6 - 6)^2 + (6.8 - 2)^2} = \sqrt{2.4^2 + 4.8^2} \\ &= \sqrt{2.4^2(1^2 + 2^2)} = 2.4\sqrt{5} = \frac{12}{5}\sqrt{5} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein Verkleinerungsfaktor von:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{12}{5}\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

Nun können wir mit der Summenformel der unendlichen GR die Länge der Zickzacklinie bestimmen:

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{3\sqrt{5}}{1 - \frac{4}{5}} = \underline{\underline{15\sqrt{5}}}$$

Für die Strecke $\overline{PZ}$ ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{PZ} = \sqrt{(x_Z - x_P)^2 + (y_Z - y_P)^2} = \sqrt{(10 - 0)^2 + (10 - 5)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Somit beträgt das Verhältnis der Länge der Zickzacklinie zur Länge von $\overline{PZ}$:

$$s_\infty : \overline{PZ} = (15\sqrt{5}) : (5\sqrt{5}) = \underline{\underline{3:1}}$$

Die Zickzacklinie ist also genau dreimal so lang wie die Strecke $\overline{PZ}$.