

Übung F & R 6: Vermischte Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Klasse 155c / AGe

1. Wie viele vierstellige natürliche Zahlen enden auf die Ziffer 6?
2. Ist die Folge arithmetisch, geometrisch oder weder noch? Weshalb? Berechne jeweils das 15. Glied und gib die rekursive und die explizite Definition der Folge an.

(a) $3, -6, 12, -24, 48, \dots$

(b) $2, -4, 6, -8, 10, \dots$

(c) $1, 2, 4, 8, 15, \dots$

(d) $-765, -654, -543, -432, \dots$

3. Bestimme das allgemeine Glied s_n der Partialsummenfolge (s_n) , die zur...

(a) AR $37 + 30 + 23 + \dots$ gehört.

(b) GR $16 + 12 + 9 + \dots$ gehört.

4. Notiere die Summe mittels des Summenzeichens Σ und rechne sie danach aus:

(a) $15 + 18 + 21 + \dots + 84$

(b) $4 + 12 + 36 + \dots + 972$

(c) $15\,360 - 23\,040 + 34\,560 - \dots - 1\,328\,602.5$

(d) $17 + 11 + 5 - 1 - \dots - 31 - 37$

5. Berechne aus den gegebenen Informationen einer AF die gesuchten Grössen.

(a) Gegeben: $a_1 = 9, a_2 = 11$. Gesucht: a_{48} und s_{48} .

(b) Gegeben: $a_1 = 34, d = -6$. Gesucht: Index $i \in \mathbb{N}$ für $a_i = -80$.

(c) Gegeben: $a_8 = -2, a_{24} = 12$. Gesucht: a_1 und der Wert von $\sum_{k=8}^{24} a_k$.

6. (a) Wie viele Glieder der AF $10, 18, \dots$ sind kleiner als 1000?
(b) Wie viele der Glieder der Folge mit $u_1 = 4, u_{k+1} = u_k + 1.25$ sind kleiner als 10^4 ?
7. (a) Bei welcher dreigliedrigen AF mit der Differenz $d = 12$ beträgt die Summe ihrer drei Glieder 345?
(b) Es gibt beliebig viele dreigliedrige GF mit der Eigenschaft, dass das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ den Wert 27 000 hat. Bei allen möglichen GF mit dieser Eigenschaft hat das mittlere Glied a_2 jedoch stets den gleichen Wert. Welchen?
8. (a) Eine AF beginnt mit 3, endet mit 37 und hat die Summe 400. Wie viele Glieder hat die Folge?
(b) Eine AF mit Differenz $d = 3$ beginnt mit 5 und endet mit 302. Wie viele Glieder hat die Folge?
9. Die AF $975, 957, \dots$ besteht aus lauter positiven Gliedern. Wie viele Glieder kann diese AF höchstens umfassen und welchen Wert nimmt in diesem Fall das letzte Glied an?

10. Berechne aus den gegebenen Informationen einer GF die gesuchten Grössen:

(a) Gegeben: $a_4 = 0.5, q = 0.25$. Gesucht: a_1 und s_9 .

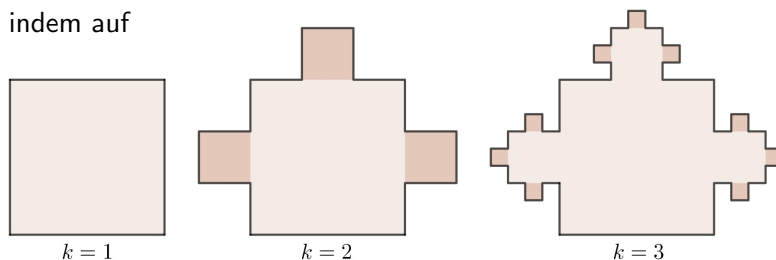
(b) Gegeben: $a_1 = 3645, q = 3$. Gesucht: Index $i \in \mathbb{N}$ mit $a_i = 98\,415$.

(c) Gegeben: $a_{11} = 162, a_{15} = 1458$. Gesucht: q und a_1 .

(d) Gegeben: $a_7 = \frac{729}{32}$ und $q = \frac{3}{4}$. Gesucht: s_∞ .

11. (a) Wie viele Glieder der GF $1000, 999, \dots$ sind grösser als 1?
(b) Wie viele Glieder der Folge (u_n) mit $u_1 = 1024, u_k = \frac{1}{2} \cdot u_{k-1}$ sind grösser als 0.001?
(c) Wie viele Glieder der Folge mit $a_k = 4 \cdot 3^{k-1}$ müssen mindestens addiert werden, wenn diese Summe grösser als 1000 werden soll?
12. Berechne den Grenzwert der nicht abbrechenden GR $2\sqrt{3} + \sqrt{6} + \dots$

13. Das *Fraktal* rechts wird iterativ konstruiert, indem auf drei der vier Seiten ein Quadrat mit $\frac{1}{3}$ der Seitenlänge angefügt wird. Dieser Konstruktionsschritt wird auf den neu entstandenen Quadraten fortgesetzt und beliebig oft wiederholt. Das erste Quadrat soll die Seitenlänge 1 haben.



- (a) Konvergiert die Folge der Flächeninhalte? Falls ja: Zu welchem Wert?
 (b) Konvergiert die Folge der Umfänge? Falls ja: Zu welchem Wert?
14. (a) Eine unendliche GR beginnt mit $\frac{1}{10}$ und ihre Summe ist um $\frac{7}{20}$ kleiner als der Faktor q . Wie gross ist q ?
 (b) Die Summe einer unendlichen GR beträgt 9, die Summe ihrer ersten beiden Glieder 5. Wie heissen diese ersten beiden Glieder?
 (c) Eine unendliche GR beginnt mit $(x-3) + \frac{1}{x-3} + \dots$, wobei $x \neq 3$ sein soll.
 i. Für welche Werte von x konvergiert die Reihe?
 ii. Zeige, dass im konvergenten Fall gilt: $s_\infty = \frac{(x-3)^3}{(x-2)(x-4)}$.
 iii. Für welchen Wert von x ist $s_\infty = x + 2$?

15. **Zusatzaufgabe:** Periodische Dezimalbrüche und unendliche GR

- (a) Rep.: Jeder **Bruch** $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ lässt sich in einen **Dezimalbruch** umwandeln. Dabei besitzen nicht-abbrechender Dezimalbrüche stets eine **Periodizität**:

$$\text{Bsp.: } \frac{7}{6} = 1.166\ 666\dots = 1.1\overline{6} \quad \text{oder} \quad \frac{12}{7} = 1.714\ 285\ 714\ 285\dots = 1.\overline{714\ 285}$$

Wandle die folgenden Brüche gleichermassen in Dezimalbrüche um (ohne TR!): $\frac{7}{4}$, $\frac{31}{3}$, $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{11}$.

- (b) Vom Bruch zum Dezimalbruch muss also lediglich dividiert werden ("Stöcklirechnen"). Die Umwandlung endlicher Dezimalbrüche in einen Bruch ist ähnlich rasch erledigt:

$$\text{Bsp.: } 2.375 = \frac{2375}{1000} \xrightarrow{\text{Kürzen!}} \frac{19}{8} \quad \text{oder} \quad 0.0262 = \frac{262}{10000} \xrightarrow{\text{Kürzen!}} \frac{131}{5000}$$

Bearbeite ebenso die endlichen Dezimalbrüche 3.125, 0.444, 0.37 und 1.128.

- (c) Periodische Dezimalbrüche haben wir mit einem raffinierten "Trick" in einen Bruch verwandelt:

$$x = 0.\overline{13} \Leftrightarrow 100x = 13.\overline{13} \Rightarrow 99x = 13.\overline{13} - 0.\overline{13} = 13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{99}$$

Erinnert dich dieser Trick an ein geschicktes Vorgehen, das wir letztthin im Unterricht gesehen haben?

- (d) Neuerdings kommen wir der Sache aber auch sehr direkt mit einer unendlichen GR auf die Spur:

$$0.\overline{13} = 0.131\ 313\dots = \frac{13}{100} + \frac{13}{10\ 000} + \frac{13}{1\ 000\ 000} + \dots = \text{unendl. GR mit } a_1 = \frac{13}{100}, q = \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow 0.\overline{13} = s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{13}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{13}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{13}{99}$$

Bestimme ebenso die Bruchschreibweisen von $5.\overline{5}$, $0.\overline{125}$, $0.\overline{13}$, $2.\overline{54}$, $0.2\overline{57}$ und $0.4\overline{81}$.

16. **Schwieriger!** P und Q sind Seitenmittelpunkte eines Quadrates mit Seitenlänge 10.

Bestimme die Länge der Zickzackstrecke $P-A_1-A_2-A_3-\dots$ und vergleiche sie mit der Länge von $\overline{PZ}$.

Tipp: Überlege dir zunächst genau, weshalb die Längen von $a_1, a_2, a_3, \dots$ eine GF bilden (geometrisches Argument: ähnliche Dreiecke!).

Benutze nun das Koordinatensystem und gib darin die Gleichungen der Geraden g, h, i und j an, um die Schnittpunkte A_1 und A_2 zu bestimmen. Wie erhältst du aus deren Koordinaten die Längen von a_1 und a_2 ?

