unterstrass.edu
WO WERTE SCHULE MACHEN

DIFFERENTIALRECHNUNG

ein Mathematik-Skript für die Klasse 155c

Alex Gertsch

Zürich im August 2025

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die Ableitung einer Funktion

Die **Differentialrechnung** darf mit Fug und Recht als Grundpfeiler der modernen Mathematik bezeichnet werden. Sie wurde im 17. Jahrhundert entwickelt, mitunter durch **Sir Isaac Newton** (1643 – 1727), der für seine Mechanik potentere mathematische Hilfsmittel benötigte, aber auch durch **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716), einen führenden deutschen Mathematiker seiner Zeit.[1]

Im Grunde geht es darum eine Mathematik zur Verfügung zu haben, mit der die **aktuelle Veränderungsrate** einer Grösse beschrieben wird, die von einer anderen Grösse abhängt. Eine solche Veränderungsrate hat in der Anwendung sehr oft eine eigene Bedeutung, wie wir im Laufe dieses Skripts an verschiedenen Beispielen sehen werden. Wieso dieses Konzept der Veränderung so stark ist und so viele neue Möglichkeiten in sich birgt, werden wir allerdings erst gegen Ende des Themas wirklich anschneiden können. Vorher geht es für uns vor allem darum, das wichtigste neue mathematische Objekt, also eben die Veränderungsrate oder im Fachjargon die **Ableitung** einer Funktion, gut zu erfassen. Wir müssen erfahren, wie diese Ableitung funktioniert, welche Rechenregeln dafür gelten und welche elementaren Überlegungen und Rechnungen damit angestellt werden können. Dabei erweitern wir unser Wissen über Funktionen im Allgemeinen, aber auch über den einen oder anderen Funktionstyp im Speziellen.

Aber nun eins nach dem andern...

1.1 Der Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

In diesem Abschnitt bereiten wir die in Abschnitt 1.2 folgende Definition der **Ableitung** formal vor, indem wir altes Wissen wieder auffrischen und ein wenig anders formulieren.

Gegeben seien zwei Punkte P und Q auf dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$. Durch diese beiden Punkte legen wir eine **Sekante** s. Das ist eine Gerade, die den G_f in P und Q schneidet.[2] Wir interessieren uns für die **Sekantensteigung** m_s. Wie bei jeder Geraden, von der wir zwei Punkte kennen, so können wir auch im Fall von s schreiben (**Steigungsdreieck** zwischen P und Q):

$$\textbf{Sekantensteigung:} \qquad m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \tag{1.1}$$

Natürlich hängt m_s davon ab, welche beiden Punkte $P, Q \in G_f$ wir gewählt haben. Diese Wahl der Punkte wollen wir formal ein bisschen anders beschreiben, woraus dann auch eine neue Schreibweise für m_s folgt.

[1] Heute geht man davon aus, dass Leibniz und Newton die Differentialrechnung einigermassen gleichzeitig und unabhängig voneinander erfunden haben und beiden der Ruhm dafür gebührt. Damals gab es über diesen Punkt allerdings heftige Streitigkeiten.

[2] *Sekante* $\widehat{=}$ Schneidende.

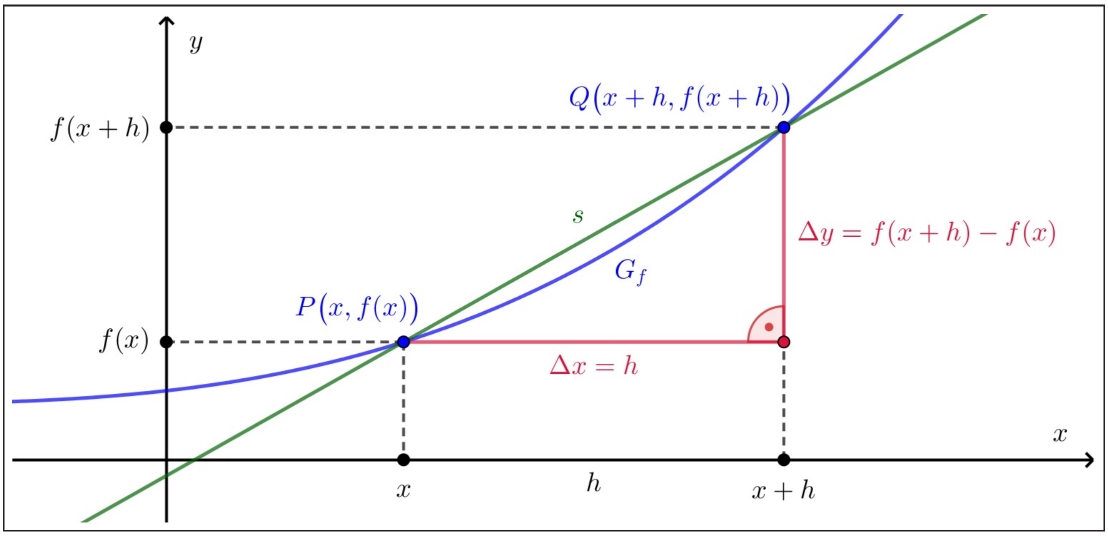


Abbildung 1.1: Der Differenzenquotient als Sekantensteigung.

Wir betrachten Abb. 1.1 und halten für die Punkte P und Q fest:

- Die x-Koordinate des Punktes P wollen wir einfach als x bezeichnen, also $x_P \equiv x$. Da P auf G_f sitzt, muss seine y-Koordinate durch $f(x)$ gegeben sein: $P\big(x, f(x)\big)$.
- Die x-Koordinate des Punktes Q ist um den Schritt $h := \Delta x$ grösser als die x-Koordinate von P, also $x_Q = x + h$. Da auch Q auf G_f liegt, ist seine y-Koordinate durch $f(x_Q) = f(x+h)$ gegeben: $Q\big(x+h, f(x+h)\big)$.

Mit dieser Neudeklaration der Koordinaten von P und Q notieren wir die Seiten des Steigungsdreiecks an s zwischen P und Q und damit eben die Steigung m_s aus Gleichung (1.1) neu wie folgt:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Rechts steht im Zähler die Differenz zweier Funktionswerte: $f(x+h) - f(x)$. Bezeichnen wir diese Differenz als Δf, so notieren wir nochmals neu:

$$\textbf{Differenzenquotient:} \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.2}$$

Dieses $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ist der sogenannte **Differenzenquotient von f an der Stelle x**. Nach wie vor entspricht er der Steigung m_s einer Sekante s, die durch die Punkte $P(\big(x, f(x)\big)$ und $Q\big(x+h, f(x+h)\big)$ auf dem G_f gelegt wird.

Beispiel: Gegeben sei die quadratische Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$. Dann folgt für ihren Differenzenquotienten an der Stelle x:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(x+h)^2 - 3(x+h) + 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1\right)}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^2 + xh + \frac{1}{2}h^2 - 3x - 3h + 1 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1}{h} = \frac{xh - 3h + \frac{1}{2}h^2}{h} = \underline{x - 3 + \frac{1}{2}h}\end{aligned}$$

Z.B. ergäbe sich über der Stelle $x = 4$ mit dem Schritt $h = 2$ eine Sekantensteigung m_s von:

$$m_s = \frac{\Delta f}{\Delta x} = 4 - 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

1.2 Die Definition der Ableitungsfunktion $f'(x)$

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ mit Funktionsgraph G_f. Nun wollen wir fragen:

"Mit welcher Steigung passiert der Graph G_f einen bestimmten Punkt $P \in G_f$?"

Allerdings: Bisher war der Begriff **Steigung** für Geraden reserviert. Was verstehen wir genau unter der Steigung des Graphen in einem Punkt? Wenn ich obige Frage anders formuliere, ist das geklärt:

"Wie gross ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P \in G_f$?"

Der Graph ist im Punkt P genau so steil wie die dortige Tangente. Wir definieren also:

Steigung des G_f in einem Punkt P := Steigung der Tangente an den G_f in P

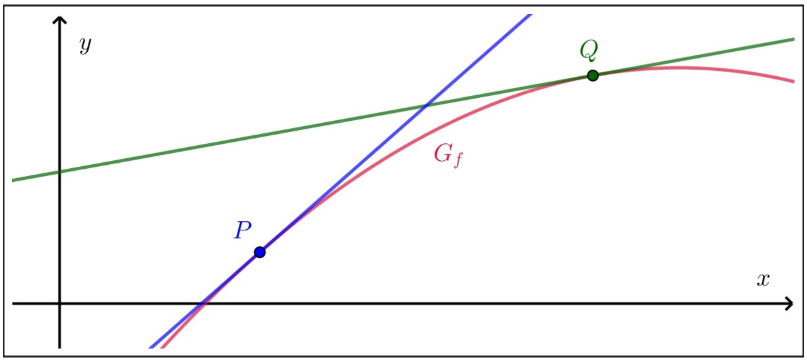


Abbildung 1.2: Wie steil der Funktionsgraph G_f durch einen Punkt P auf ihm verläuft, ist durch die Steigung der Tangente an G_f in P gegeben. Im gezeigten Fall ist der G_f in P steiler als in Q, weil ganz offensichtlich die Steigung der Tangente in P grösser ist als die Steigung der Tangente in Q.

Die Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigung

Wir wollen jetzt herausfinden, wie sich die Tangentensteigung im Punkt $P \in G_f$ berechnen lässt. Betrachten wir dazu Abb. 1.3.

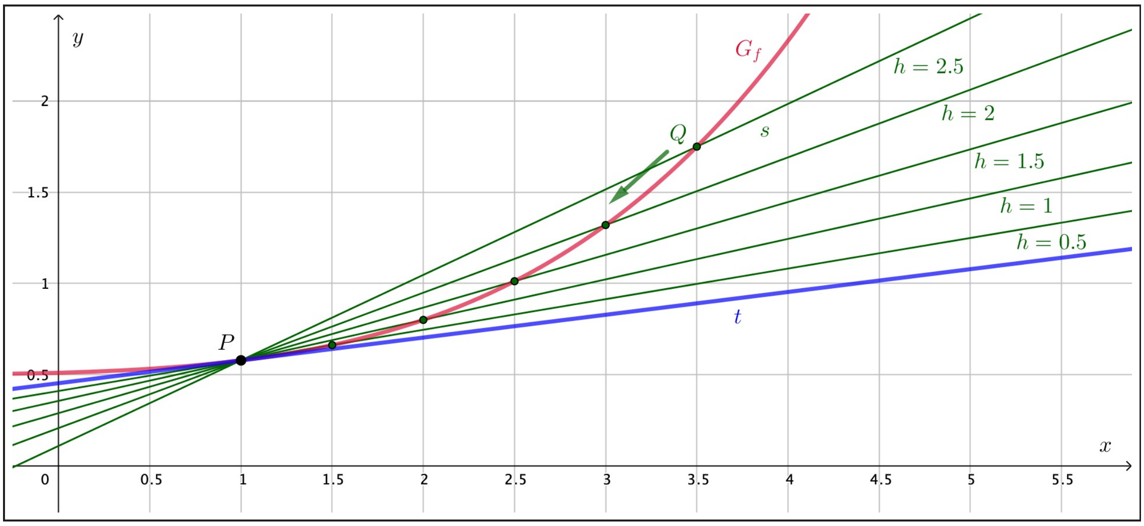


Abbildung 1.3: Verkleinern wir h, so nähert sich die Sekante s immer mehr der Tangente t an.

Beobachtung: Lassen wir den horizontalen Schritt h immer kleiner werden, so rückt Q auf dem G_f immer näher an P heran. Dadurch nähert sich die Sekante s durch P immer mehr der Tangente t in P an – und für uns besonders wichtig: **Die Sekantensteigung m_s wird dabei immer mehr zur Tangentensteigung m_t!**

Im Bsp. von Abb. 1.3 hat der kleinste gezeigte Schritt den Wert $h = 0.5$, aber es ist ganz klar, dass wir mit dieser Verkleinerung noch weiter gehen können, z.B. $h = 0.1$, $h = 0.001$, $h = 0.000\,001$, etc. Im Prinzip können wir h beliebig klein werden lassen ($h \to 0$), solange es nicht ganz gleich null wird, denn dann wäre $Q = P$ und die Sekante wäre nicht mehr definiert.

Lassen wir h immer kleiner werden, $h \to 0$, so kommt die Sekantensteigung m_s der Tangentensteigung m_t beliebig nahe. Sie wird zwar nie genau gleich der Tangentensteigung sein, aber m_t muss der **Grenzwert (Limes)** sein, gegen den m_s strebt:[3]

$$\lim_{h\to 0} m_s = m_t$$

Und damit sind wir bereits am Ziel, denn mit dem **Differenzenquotienten** $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ aus Gleichung (1.2) haben wir ja einen von h abhängigen Ausdruck für die Sekantensteigung m_s zur Verfügung und brauchen nur noch dessen Grenzwert für $h \to 0$ zu bilden, um die Tangentensteigung m_t zu erhalten:

$$m_t = \lim_{h\to 0} m_s = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.3}$$

Beispiel: Ich verwende die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$, von der wir im Beispiel auf Seite 2 bereits den Differenzenquotienten an der Stelle x mit Schritt h bestimmt hatten:

$$m_s = \frac{\Delta f}{\Delta x} = x - 3 + \frac{1}{2}h$$

Nun bestimmen wir die Tangentensteigung m_t über der Stelle x, indem wir den Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$ bilden:

$$m_t = \lim_{h\to 0} m_s = \lim_{h\to 0} \left(x - 3 + \frac{1}{2}h \right) = \underline{x - 3}$$

Damit ergibt sich beispielsweise über der Stelle $x = 4$ eine Tangentensteigung von $m_t = 4 - 3 = 1$.

Die Tangentensteigung als Ableitungsfunktion $f'(x)$

Bei gegebener Funktion $f(x)$ wollen wir angeben, wie steil der Funktionsgraph G_f über dieser Stelle x verläuft. D.h., zu jedem x soll eine eindeutige Tangentensteigung m_t berechnet werden. Wir fassen somit die Tangentensteigung als Funktion von x auf. Diese zu einer Funktion $f(x)$ gehörende **Steigungsfunktion** ist so wichtig, dass sie einen eigenen Namen erhält. Wir bezeichnen sie als die **Ableitung $f'(x)$** (sprich: "f Strich von x").

Beispiel: Im obigen Beispiel haben wir für die Tangentensteigung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$ über einer beliebigen Stelle x den Ausdruck $m_t = x - 3$ erhalten. Die Steigungsfunktion resp. eben die Ableitung $f'(x)$ ist in diesem Fall also gegeben durch:

$$f'(x) = x - 3$$

Damit können wir die Steigung des Funktionsgraphen G_f resp. die Steigung der Tangente an G_f über jeder Stelle x sehr rasch berechnen. An der Stelle $x = 4$ ergibt sich, wie bereits gesehen, $f'(4) = 4 - 3 = 1$, über der Stelle $x = -2$ beträgt die Ableitung $f'(-2) = -2 - 3 = -5$, etc.

[3] Zur Erinnerung: $\lim$ steht für *Limes* = lat. Grenze.

Halten wir das allgemein fest:

Definition der Ableitungsfunktion $f'(x)$

Die **Ableitungsfunktion** *oder einfach die* **Ableitung** $f'(x)$ *einer Funktion* $f(x)$ *ist gegeben durch:*

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.4}$$

Grundverständnis der Ableitung

Die Ableitung $f'(x)$ liefert als Wert die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen G_f über der Stelle x.

Wir werden uns an anderer Stelle (Anhang B) Gedanken zu dieser Definition machen müssen, denn es ist nicht einfach selbstverständlich, dass die darin enthaltene Grenzwertbildung für alle Funktionen f resp. für alle Stellen x möglich ist. Dazu muss der Ausdruck $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für $h \to 0$ ja eben gegen einen bestimmten Wert konvergieren – der Funktionsgraph muss über der Stelle x eine eindeutige Tangente aufweisen!

Beim Beispiel oben war das kein Problem, denn die Parabel zu $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$ besitzt über jeder beliebigen Stelle x eine eindeutige Tangente mit ganz bestimmter Steigung. Das Verfahren muss funktionieren. Da dies bei den meisten von uns benutzten Funktionen der Fall ist, erlauben wir uns die Betrachtung von Spezialfällen auf später zu verschieben.

Beispiel: Betrachten wir zum Abschnittsende noch ein zweites Beispiel. Gesucht seien die Steigungen der Tangenten an den Graphen von $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x + 1$ (kubische Funktion) über den Stellen $x = 0$, $x = 2$ und $x = 4$.

Wir berechnen die Ableitung von $f(x)$, indem wir zuerst den Differentenquotienten bilden und soweit wie möglich vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{6}(x+h)^3 - 2(x+h) + 1 - \left(\frac{1}{6}x^3 - 2x + 1\right)}{h} \\
&= \frac{\frac{1}{6}\left(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3\right) - 2x - 2h + 1 - \frac{1}{6}x^3 + 2x - 1}{h} \\
&= \frac{\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2h + \frac{1}{2}xh^2 + \frac{1}{6}h^3 - 2x - 2h + 1 - \frac{1}{6}x^3 + 2x - 1}{h} \\
&= \frac{\frac{1}{2}x^2h + \frac{1}{2}xh^2 + \frac{1}{6}h^3 - 2h}{h} = \underline{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xh + \frac{1}{6}h^2 - 2}
\end{aligned}$$

Nun lassen wir h gegen null gehen und erhalten so die Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xh + \frac{1}{6}h^2 - 2\right) = \underline{\frac{1}{2}x^2 - 2}$$

Schliesslich brauchen wir nur noch die angegebenen Stellen in die Ableitungsfunktion einzusetzen:

Steigung über der Stelle $x = 0$: $\quad f'(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 = -2$

Steigung über der Stelle $x = 2$: $\quad f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 = 2 - 2 = 0$

Steigung über der Stelle $x = 4$: $\quad f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 2 = 8 - 2 = 6$

1.3 Der Graph der Ableitungsfunktion – Horizontalstellen

Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ist selber wieder eine "vollwertige" Funktion im mathematischen Sinne: Sie weist einer Stelle x einen eindeutigen Funktionswert $f'(x)$ zu. D.h., wir können zu $f'(x)$ auch wieder einen Funktionsgraphen zeichnen.

Schauen wir dazu die Beispiele aus den letzten beiden Abschnitten an. Abb. 1.4 zeigt oben jeweils den Graphen der Funktion $f(x)$ und darunter den Graphen der zugehörigen Ableitung $f'(x)$.

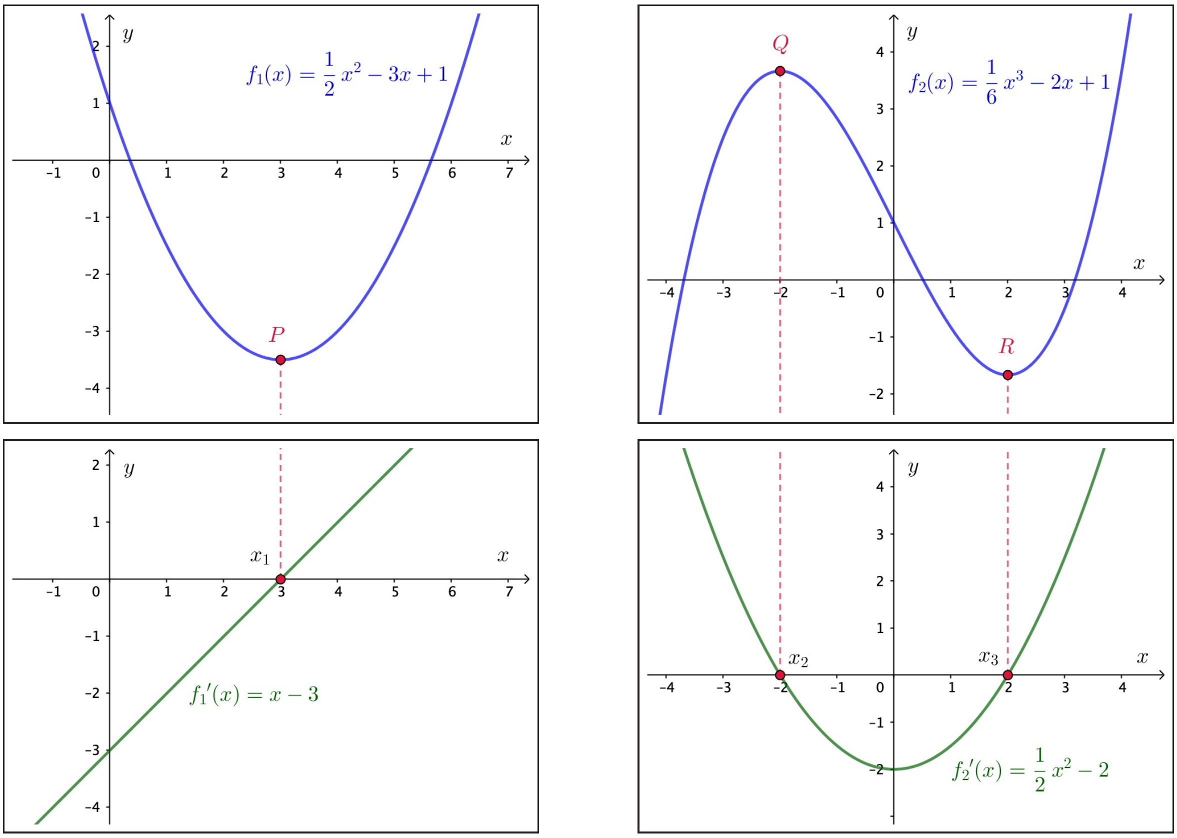


Abbildung 1.4: Zwei Beispiele für die Graphen von Funktion $f(x)$ und Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Anmerkungen zu Abbildung 1.4

Fallen/Steigen: Betrachten wir zuerst den Graphen zu $f_1(x)$, also die Parabel links oben. Von links oben kommend fällt G_{f_1} bis zum Punkt P. Auf diesem ganzen Bereich ist folglich die Steigung und somit eben auch die Ableitungsfunktion $f_1'(x)$ negativ. Je näher wir P kommen, desto weniger stark fällt G_{f_1}. Die Ableitung nähert sich folglich von unten dem Wert 0 an.

Rechts von P steigt G_{f_1} immer stärker an. Dort ist die Steigung resp. die Ableitung $f_1'(x)$ positiv und wächst immer weiter an.

Rechts oben sehen wir: Der Graph G_{f_2} fällt zwischen den Punkten Q und R. Auf diesem Bereich ist die Ableitung $f_2'(x)$ negativ. In beiden Aussenbereichen ($x < x_1$ und $x > x_3$) steigt G_{f_2} immer stärker an. Die Steigung ist positiv und wird immer grösser.

Halten wir allgemein fest:

$$\boxed{\begin{array}{r} \textbf{Graph von } f(x) \textbf{ steigt} \;\widehat{=}\; \textbf{Ableitung } f'(x) \textbf{ ist positiv} \\ \textbf{Graph von } f(x) \textbf{ fällt} \;\widehat{=}\; \textbf{Ableitung } f'(x) \textbf{ ist negativ} \end{array}}$$

Lokale Horizontalstellen und Extrema: x_1, x_2 und x_3 sind die sogenannten **Horizontalstellen** von $f_1(x)$ und $f_2(x)$. D.h., in den Punkten P, Q und R über diesen Stellen verlaufen die Graphen genau waagrecht. An diesen Stellen ist folglich die Steigung gleich 0 und die Ableitungsfunktionen weisen Nullstellen auf: $f_1'(x_1) = 0$, $f_2'(x_2) = 0$ und $f_2'(x_3) = 0$.

Weiter bemerken wir, dass zu diesen Horizontalstellen entweder ein **lokales Maximum** oder **Minimum** gehört. D.h., in einer nicht allzu grossen Umgebung von P – wir sagen: **lokal** – hat die Funktion $f_1(x)$ an der Stelle x_1 den kleinsten Funktionswert – eben ein Minimum. Die Funktion $f_2(x)$ nimmt in Q resp. bei x_2 einen lokalen **Maximalwert** (= Maximum) und in R resp. bei x_3 einen lokalen **Minimalwert** (= Minimum) an.

x_1, x_2 und x_3 sind somit **lokale Extremalstellen** von $f_1(x)$ und $f_2(x)$. Das geht aber nur, weil die Funktionsgraphen dort horizontal verlaufen. Wäre das nicht der Fall, so würden die Graphen über diesen Stellen in die eine Richtung weiter ansteigen und in die andere Richtung abfallen, was direkt gegen ein **Extremum** sprechen würde. Wir merken uns:

Notwendige Bedingung für eine lokales Extremum

Soll die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) aufweisen, so muss x_0 eine Horizontalstelle von $f(x)$ sein, ihre Ableitung muss dort also eine Nullstelle haben: $f'(x_0) = 0$.

Wir sagen: $f'(x_0) = 0$ *ist eine* **notwendige Bedingung** *für ein lokales Extremum von $f(x)$ an der Stelle x_0.*

Erläuterung zu "notwendig": $f'(x_0)$ ist eine notwendige Bedingung dafür, dass $f(x)$ bei x_0 ein lokales Extremum[4] aufweist. Das bedeutet: Nur falls $f'(x_0) = 0$ ist, **kann** x_0 eine lokale Extremalstelle von $f(x)$ sein, muss es aber nicht. Umgekehrt ist aber klar: Wenn x_0 eine lokale Extremalstelle von $f(x)$ ist, so muss auf jeden Fall $f'(x_0) = 0$ sein. Und nochmals umgekehrt gilt: Ist $f'(x_0) \neq 0$, so kann $f(x)$ bei x_0 keine lokale Extremalstelle haben:

$$\begin{aligned} x_0 \text{ ist lokale Extremalstelle von } f(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad x_0 \text{ ist keine lokale Extremalstelle von } f(x) \end{aligned}$$

$f'(x_0) = 0$ ist also einfach ein wichtiges Indiz dafür, dass x_0 eine lokale Extremalstelle von $f(x)$ sein könnte. Es bräuchte allerdings weitere Informationen, um sicher zu sein.

Abb. 1.5 zeigt den Fall einer **Sattelstelle** bei $x = 2$, wo ebenfalls $f'(2) = 0$ ist, aber kein lokales Extremum vorliegt.

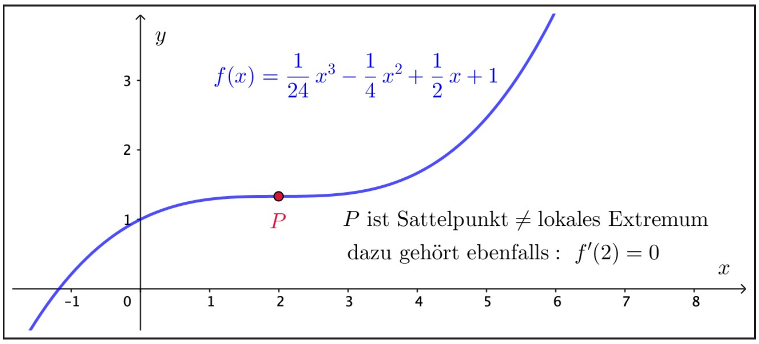


Abbildung 1.5: Beispiel Horizontalstelle ohne lokales Extremum.

[4] Plural von Extremum: Extrema.

Globale Extrema: Zurück zu Abb. 1.4 auf Seite 6. x_1 stellt für die Funktion $f_1(x)$ auch eine **globale** Minimalstelle dar, denn es gibt keine andere Stelle x mit kleinerem Funktionswert. Dagegen sind x_2 und x_3 keine globalen Extremalstellen von $f_2(x)$, denn es gibt in den Aussenbereichen durchaus Stellen x mit grösserem resp. kleineren Funktionswert. Tatsächlich besitzt $f_2(x)$ keine globalen Extrema, also keine Stellen x, wo für die gesamte Funktion absolut der höchste oder der niedrigste Funktionswert angenommen wird.

Funktionsgrade beim Ableiten: An dieser Stelle wollen wir zudem kurz bemerken, dass aus einer quadratischen Funktion beim Ableiten eine lineare Funktion entsteht (Parabel $\mapsto$ Gerade). Und aus einer kubischen Funktion (höchste Potenz: x^3) wird eine quadratische Funktion.

Diesen Zusammenhang werden wir bald tiefer ergründen und festhalten: "Der Grad der Ableitungsfunktion $f'(x)$ ist jeweils um 1 geringer als der Grad der ursprünglichen Funktion $f(x)$."

Kapitel 2

Erste Ableitungsregeln

Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ zu bestimmen war bis anhin eine relativ aufwändige Sache: Differenzenquotienten ansetzen, diesen vereinfachen und danach den Limes für $h \to 0$ bilden. Müssen wir immer diese mühsame Prozedur anwenden, wenn wir eine Ableitung ermitteln möchten?

Die Antwort lautet: Nein! Tatsächlich war das Kapitel 1 vor allem dafür vorgesehen, dass wir genau verstehen, wie diese Ableitungsfunktion definiert wird. In der Anwendung ist diese Definition aber zu umständlich. Stattdessen werden wir uns nun merken, wie die Ableitungen einiger elementarer Funktionstypen aussehen. Damit und mit Hilfe ein paar allgemein gültiger **Ableitungsregeln** werden wir in der Lage sein praktisch jede beliebige Funktion $f(x)$ einigermassen zügig abzuleiten.

Wir starten mit den Ableitungsregeln, die wir bei unseren Beispielen in Kapitel 1 und in der zugehörigen Übungsserie zum Teil bereits kennengelernt haben.

2.1 Ableitungsregel für additive Konstanten

Voraussetzung Die Funktion $f(x)$ sei die Summe aus einer von x abhängigen Funktion $u(x)$ und einer beliebigen Konstante $c \in \mathbb{R}$, also: $f(x) = u(x) + c$.

Regel

$$f(x) = u(x) + c \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = u'(x)$$

In Worten **Eine additive Konstante fällt beim Ableiten einfach weg.**

Beispiel Es sei $f(x) = x^3 + 5$, also $u(x) = x^3$ und $c = 5$. Damit folgt:

$$f(x) = u(x) + c = x^3 + 5 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = u'(x) = 3x^2$$

Graphische Erklärung Die Addition einer Konstanten c führt lediglich zu einer vertikalen Verschiebung des Graphen einer Funktion $u(x)$. Die Steigungswerte bleiben dabei über allen Stellen x gleich. Die Ableitung bleibt unverändert $u'(x)$.

Beweis Es sei $f(x) = u(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Mit der Ableitungsdefinition (1.4) folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) + c - \big(u(x) + c\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) + c - u(x) - c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) \end{aligned}$$

q.e.d.

2.2 Ableitungsregel für multiplikative Konstanten

Voraussetzung Die Funktion $f(x)$ sei das Produkt aus einer beliebigen Konstante $c \in \mathbb{R}$ und einer von x abhängigen Funktion $u(x)$, also: $f(x) = c \cdot u(x)$.

Regel

$$f(x) = c \cdot u(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = c \cdot u'(x)$$

In Worten **Eine multiplikative Konstante bleibt beim Ableiten einfach erhalten.**

Beispiel Es sei $f(x) = 5 \cdot x^3$, also $c = 5$ und $u(x) = x^3$. Damit folgt:

$$f(x) = c \cdot u(x) = 5x^3 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = c \cdot u'(x) = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$$

Graphische Erklärung Die vertikale Streckung eines Funktionsgraphen bei der Multiplikation mit einem bestimmten Faktor c bewirkt, dass auch die Steigung an jedem Punkt des Graphen um den Faktor c vergrössert wird.

Beweis Es sei $f(x) = c \cdot u(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$. Mit der Ableitungsdefinition (1.4) folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c \cdot u(x+h) - c \cdot u(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c \cdot \big(u(x+h) - u(x)\big)}{h} = c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = c \cdot u'(x) \end{aligned}$$

q.e.d.

Dabei haben wir verwendet, dass gilt: $\lim_{h\to a} \big[\, c \cdot f(h) \,\big] = c \cdot \lim_{h\to a} f(h)$.

2.3 Ableitungsregel für Summen und Differenzen von Funktionen

Voraussetzung Die Funktion $f(x)$ sei die Summe oder Differenz aus zwei von x abhängigen Funktionen $u(x)$ und $v(x)$.

Regel

$$f(x) = u(x) \pm v(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

In Worten **Die Ableitung einer Summe resp. Differenz zweier Funktionen ist gleich der Summe resp. Differenz der Ableitungen dieser Funktionen.**

Beispiel Es sei $f(x) = x^3 - x^2$, also $u(x) = x^3$ und $v(x) = x^2$. Dann folgt:

$$f(x) = u(x) - v(x) = x^3 - x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) - v'(x) = 3x^2 - 2x$$

Graphische Erklärung Die Steigungen zweier Funktionsgraphen addieren sich, wenn wir ihre Funktionsgleichungen zusammenzählen.

Beweis Es sei $f(x) = u(x) \pm v(x)$. Mit der Ableitungsdefinition (1.4) folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) \pm v(x+h) - \big(u(x) \pm v(x)\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \pm \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) \pm v'(x) \end{aligned}$$

q.e.d.

N.B.: $\lim_{h\to a} \big[\, f(h) \pm g(h) \,\big] = \lim_{h\to a} f(h) \pm \lim_{h\to a} g(h)$.

2.4 Ableitungsregel für Potenzfunktionen

Voraussetzung Es sei $f(x) = x^n$ eine Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten $x \in \mathbb{N}$.

Regel
$$f(x) = x^n \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

In Worten **Die Ableitung einer Potenzfunktion mit Exponent n ist selber wieder eine Potenzfunktion mit Exponent $n-1$. Dabei erscheint der alte Exponent n in der Ableitung als Voraktor.**

Beispiele $\left[x^2\right]' = 2x \qquad \left[x^3\right]' = 3x^2 \qquad \left[x^4\right]' = 4x^3 \qquad \left[x^5\right]' = 5x^4 \qquad \ldots$

$\left[x^{150}\right]' = 150x^{149} \qquad \left[x^{n+4}\right]' = (n+4) \cdot x^{n+3}$

Insbesondere gilt auch: $f(x) = x = x^1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$

Graphische Erklärung Die Aussage dieser Regel graphisch zu verstehen ist nicht ganz einfach. Wir werden uns zu einem späteren Zeitpunkt näher damit beschäftigen.

Beweis Es sei $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Mit der Ableitungsdefinition (1.4) folgt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

An dieser Stelle gibt es ein Problem: Wie können wir $(x+h)^n$ ausmultiplizieren, wenn wir den Exponenten n gar nicht genau festlegen?

Antwort: Dieses Ausmultiplizieren muss gar nicht vollständig erfolgen!

Es genügt, die ersten beiden Terme zu kennen. Der ganze Rest wird bei der Limesbildung ohnehin wegfallen! Schauen wir uns einmal die Ausmultiplikation für die ersten paar Exponenten $n = 1, 2, 3, \ldots$ an und verallgemeinern dann:

$$\begin{aligned}
(x+h)^1 &= & x + h \quad &= x + h \\
(x+h)^2 &= & x^2 + 2xh + h^2 \quad &= x^2 + 2xh + h^2 \\
(x+h)^3 &= & x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \quad &= x^3 + 3x^2h + O(h^2) \\
(x+h)^4 &= & x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 \quad &= x^4 + 4x^3h + O(h^2) \\
(x+h)^n &= & \ldots \quad &= \underline{x^n + n \cdot x^{n-1}\,h + O(h^2)}
\end{aligned}$$

$O(h^2)$ steht für den Rest der Summe, in dem nur Summanden mit mindestens quadratischem h auftauchen – wir sprechen von *Termen höherer Ordnung*.

Im Nenner des Differenzenquotienten wird einmal durch den Faktor h geteilt. Jeder Summand, der in $O(h^2)$ enthalten ist, wird nach dieser Division immer noch mindestens einen Faktor h enthalten und somit bei der anschliessenden Limesbildung $h \to 0$ verschwinden. Aus $O(h^2)$ wird bei der Division durch h also $O(h)$. Und dieses $O(h)$ verschwindet für $h \to 0$.

Mit $(x+h)^n = x^n + n \cdot x^{n-1}\,h + O(h^2)$ schliessen wir den Beweis ab:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + n \cdot x^{n-1}\,h + O(h^2) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{n \cdot x^{n-1}\,h + O(h^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[n \cdot x^{n-1} + O(h) \right] = n \cdot x^{n-1}
\end{aligned}$$

q.e.d.

Eine wichtige Erweiterung

Zwar haben wir die Regel für Potenzfunktionen nur für natürliche Exponenten $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, sie gilt aber für alle reellen Exponenten ausser 0:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Obwohl wir das im Moment nicht beweisen können, werden wir trotzdem damit arbeiten und so Potenzfunktionen mit gebrochenen Exponenten (= Wurzelfunktionen) und mit negativen Exponenten (= gebrochenrationale Funktionen) ableiten! Dazu bald mehr.

Zur Erinnerung

Potenzschreibweise für Brüche und Wurzeln:

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \qquad \text{und} \qquad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

2.5 Die ersten paar Ableitungsregeln im Überblick

Regel für additive Konstanten

Eine additive Konstante fällt beim Ableiten einfach weg:

$$f(x) = u(x) + c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \tag{2.1}$$

Regel für multiplikative Konstanten

Eine multiplikative Konstante bleibt beim Ableiten einfach erhalten:

$$f(x) = c \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = c \cdot u'(x) \tag{2.2}$$

Regel für Summen und Differenzen von Funktionen

Die Ableitung einer Summe oder einer Differenz zweier Funktionen ist die Summe resp. Differenz der Ableitungen der beiden Funktionen:

$$f(x) = u(x) \pm v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \pm v'(x) \tag{2.3}$$

Regel für Potenzfunktionen

Die Ableitung einer Potenzfunktion mit Exponent n ist selber wieder eine Potenzfunktion mit Exponent $n-1$. Dabei erscheint der alte Exponent n in der Ableitung als Vorfaktor:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \tag{2.4}$$

Kapitel 3

Kurvendiskussion mit Polynomen

In diesem Kapitel lernen wir eine grosse und wichtige Familie von Funktionen kennen, die sogenannten **Polynome**. Jede Polynomfunktion ist eine mit Vorfaktoren gewichtete Summe aus natürlichen Potenzen der Variable x (inkl. x^0), so kompliziert das im Moment klingen mag, Polynome sind uns schon recht vertraut, denn konstante, lineare, quadratische und kubische Funktionen gehören auch zu dieser Funktionenfamilie.

Polynome abzuleiten ist enorm einfach. Unsere ersten paar Ableitungsregeln aus Kapitel 2 reichen dafür. Daher eignen sich die Polynome gut um aufzuzeigen, wie wir ganz allgemein Funktionen mittels Differentialrechnung untersuchen wollen. Eine solche Funktionsanalyse nennt man **Kurvendiskussion**. Wir lernen in diesem Kapitel also die Kurvendiskussion bei Polynomen kennen. Dieses Prozedere werden wir später noch erweitern und dann auch auf andere Funktionstypen übertragen.

3.1 Die Familie der Polynomfunktionen

Zunächst wollen wir direkt definieren, was unter einem Polynom zu verstehen sein soll:

Definition der Polynomfunktionen (Polynome)

Eine **Polynomfunktion vom Grad n** *– kurz: ein* **Polynom vom Grad n** *– ist eine Funktion $f(x)$, die sich als eine gewichtete Summe über die natürlichen Potenzen der Variable x (von x^0 bis x^n) schreiben lässt:*

$$\begin{gathered} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \\ \text{mit} \quad a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a_n \neq 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Die Vorfaktoren $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ heissen **Koeffizienten** *des Polynoms. Sie gewichten die verschiedenen im Polynom enthaltenen Potenzen von x.*

Anmerkungen

- Polynome werden oft auch als **ganzrationale Funktionen** bezeichnet. Der Einfachheit halber bleiben wir aber beim ebenso richtigen Namen Polynom.
- Betrachten wir zu allererst einfach ein paar Beispiele von Polynomen:

  $$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 4 \qquad f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \pi x + \sqrt{2}$$

  $$f(x) = 1 - 10x + 100x^2 - 1000x^4 + 10\,000x^8 \qquad f(x) = 150 + 150x^{150}$$

  Es spielt keine Rolle, ob ich beim Aufschreiben des Polynoms mit der höchsten oder mit der niedrigsten Potenz von x beginne. Je nach Anwendung ist das eine oder das andere praktischer.

- Den Exponenten der höchsten in einem Polynom enthaltenen Potenz von x bezeichnet man als dessen **Grad**. Daher muss natürlich bei einem Polynom vom Grad n verlangt werden, dass $a_n \neq 0$ ist, sonst würde die Potenz x^n ja gar nicht mehr im Polynom vorkommen.

  Die Grade der vier Beispielpolynome oben sind also $n = 4$, $n = 2$, $n = 8$ und $n = 150$.

- Auch das konstante Glied a_0 und das lineare Glied a_1x stehen für Potenzen von x, denn wir können schreiben: $a_0 = a_0x^0$ und $a_1x = a_1x^1$.

- Bisher und auch künftig haben wir es besonders häufig mit Polynomen der niedrigsten vier Grade $n = 0, 1, 2, 3$ zu tun. Sie besitzen eigene Funktionsnamen und wir verwenden typischerweise auch ein bestimmtes Set von Parameternamen für die Koeffizienten:

Grad	Funktionstyp	als allgemeines Polynom	typisches Parameterset
$n = 0$	**konstant**	$f(x) = a_0$	$= c$
$n = 1$	**linear**	$f(x) = a_0 + a_1x$	$= mx + q$
$n = 2$	**quadratisch**	$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$	$= ax^2 + bx + c$
$n = 3$	**kubisch**	$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$	$= ax^3 + bx^2 + cx + d$

3.2 Graphen von Polynomen skizzieren

Je höher der Grad n eines Polynoms $f(x)$ ist, desto komplizierter und kurvenreicher fällt der zugehörige Funktionsgraph G_f in der Regel aus. Wie lässt sich ein solcher Graph ohne technische Hilfsmittel zuverlässig skizzieren?

Das Verhalten im Aussenbereich ($|x| \to \infty$)

Die Graphen von Polynomen (mit Grad $n \geq 1$) streben ins positiv oder negativ Unendliche, wenn x gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ geht ($|x| \to \infty$). D.h., der Graph eines Polynoms kommt links im Diagramm von oben oder von unten her ins Bild und verschwindet rechts auch wieder nach oben oder nach unten. Dieses Verhalten in den **Aussenbereichen** des Graphen wird durch lediglich zwei Aspekte festgelegt:

- Ist der Grad n ($\widehat{=}$ höchste Potenz) des Polynoms gerade oder ungerade?
- Ist der Koeffizient a_n der höchsten Potenz x^n positiv oder negativ?

Das Verhalten im Aussenbereich wird also ausschliesslich durch das Glied mit der höchsten Potenz festgelegt (a_nx^n). Das ist auch nicht so erstaunlich, denn für Zahlen x mit grossen Beträgen ist der Betrag von x^n viel grösser als die Beträge aller kleinerer Potenzen. Im Aussenbereich ($|x| \to \infty$) ist somit die höchste Potenz dominant und es lassen sich vier Fälle unterscheiden:

- **n gerade, a_n positiv:** G_f kommt links von oben und verschwindet rechts wieder dorthin.
- **n gerade, a_n negativ:** G_f kommt links von unten und verschwindet rechts wieder dorthin.
- **n ungerade, a_n positiv:** G_f kommt links von unten und verschwindet rechts nach oben.
- **n ungerade, a_n negativ:** G_f kommt links von oben und verschwindet rechts nach unten.

Abb. 3.1 oben auf der nächsten Seite zeigt die Skizzierungsansätze für diese vier Fälle.

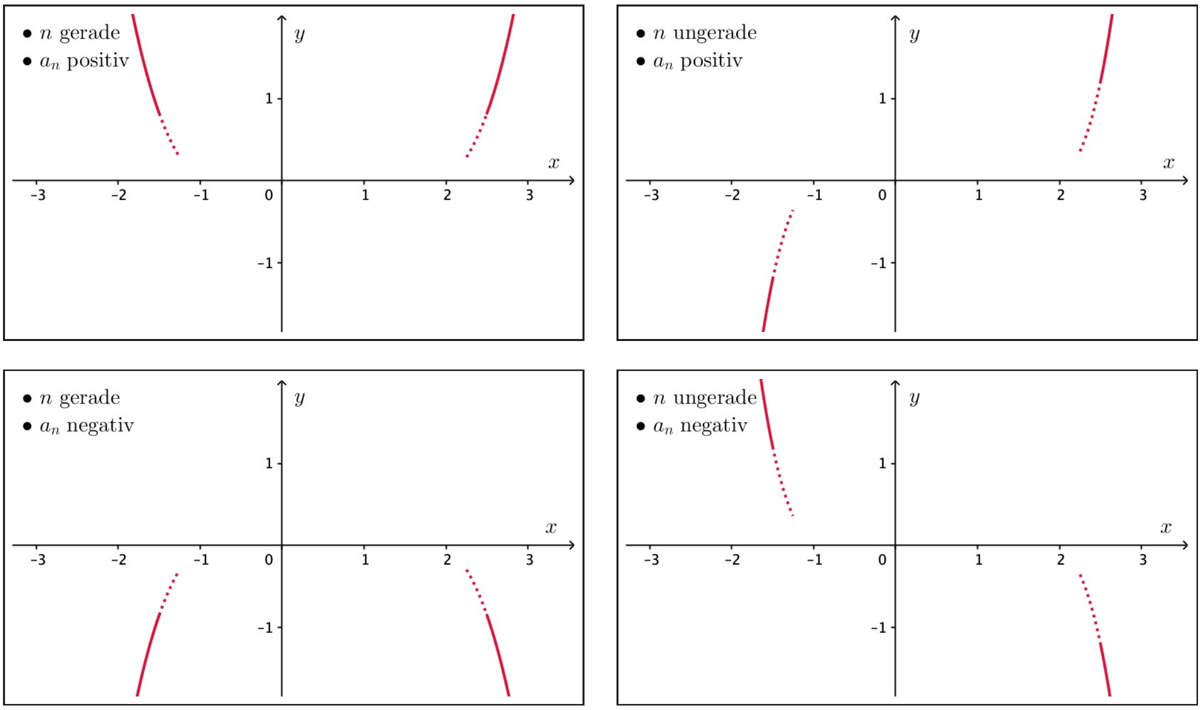


Abbildung 3.1: Das Verhalten eines Polynoms in den Aussenbereichen.

Das "Innenleben" der Funktion

Wenn wir aufgrund des höchsten Potenzgliedes $a_n x^n$ wissen, von wo der Graph kommt und wohin er geht, fehlt uns noch sein "Innenleben", also der Verlauf des G_f bei kleinen Beträgen von x.

Im Prinzip können wir dafür ein paar Stellen x in die Funktiongleichung $f(x)$ einsetzen und die so erhaltenen Funktionswerte in vertikaler Richtung über der jeweiligen Stelle x im Koordinatensystem abtragen. Auf diese Weise erhalten wir verschiedene Punkte $\big(x, f(x)\big)$, die in der Regel relativ bald ein grobes Gesamtbild des Graphen G_f ergeben. Abb. zeigt ein Beispiel zu diesen Vorgehen.

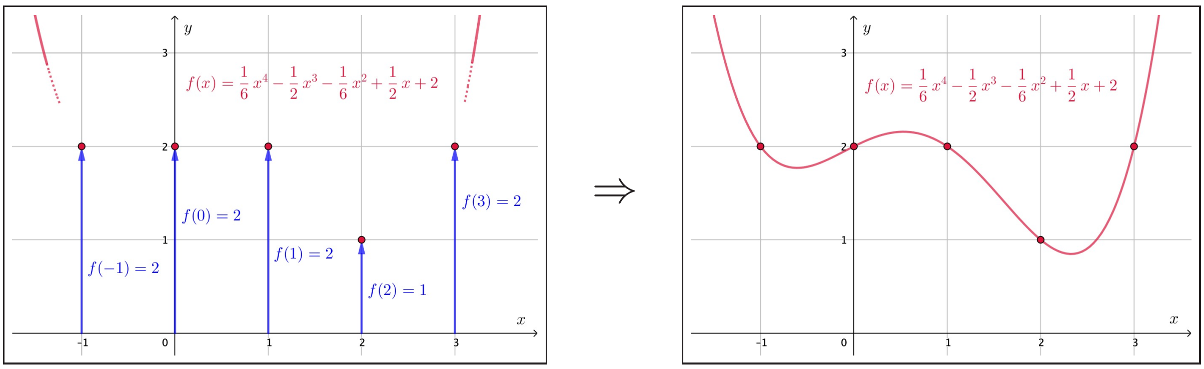


Abbildung 3.2: Skizzieren eines Polynomgraphen ohne Differentialrechnung.

Dieses Vorgehen ist zwar in Ordnung, allerdings kann man sich damit nie ganz sicher sein, ob man die **speziellen Punkte** des Graphen resp. der Funktion richtig erfasst hat. Dazu gehören insbesondere die **Nullstellen**, wie neuerdings auch die **Horizontalpunkte**.

In Abb. 3.2 ist z.B. nicht so klar, ob das lokale Maximum zwischen $x = 0$ und $x = 1$ genau bei $x = \frac{1}{2}$ zu liegen kommt. Man würde diese Dinge aber gerne genau wissen. Es ist daher klüger, diese speziellen Stellen einer Funktion zuerst zu berechnen und den Funktionsgraphen erst hinterher zu skizzieren.

Musteraufgabe zum Skizzieren eines Polynomgraphen

Gegeben sei das folgende Polynom, dessen Graph wir skizzieren möchten:

$$f(x) = \frac{3}{4}\,x^4 - \frac{7}{2}\,x^3 + \frac{15}{4}\,x^2$$

Nullstellen? Für welche Stellen x ist $f(x) = 0$, was sind also die **Nullstellen** von $f(x)$?

Läge das Polynom in seiner faktorisieren Form vor, so liessen sich die Nullstellen direkt daraus ablesen. Wir sehen uns hier aber mit einer ausmultiplizierten Form konfrontiert. Schauen wir einmal, wie weit wir mit einem Faktorisierungsversuch kommen. Zunächst lässt sich $\frac{1}{4}\,x^2$ ausklammern, sodass der Restterm lauter ganzzahlige Koeffizienten aufweist:

$$f(x) = \frac{3}{4}\,x^4 - \frac{7}{2}\,x^3 + \frac{15}{4}\,x^2 = \frac{1}{4}\,x^2\big(3x^2 - 14x + 15\big) \overset{!}{=} 0$$

Damit liegt eine Nullstelle sicher bei $x = 0$. Weitere Nullstellen müssten Lösungen der quadratischen Gleichung $3x^2 - 14x + 15 = 0$ sein. Diese Nullstellen zu bestimmen stellt aber kein Problem mehr dar. Schliesslich haben wir Zweiklammeransätze bei quadratischen Ausdrücken ausgiebig trainiert und schlimmstenfalls könnten wir es auch mit der Mitternachtsformel probieren. Es ist:

$$3x^2 - 14x + 15 = (3x - 5)(x - 3) = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)(x - 3)$$

Damit kennen wir nun alle Nullstellen von $f(x)$, nämlich $x = 0$, $x = \frac{5}{3}$ und $x = 3$.

Hier der Vollständigkeit halber die komplett faktorisierte Form von $f(x)$:

$$f(x) = \frac{3}{4}\,x^4 - \frac{7}{2}\,x^3 + \frac{15}{4}\,x^2 = \frac{3}{4}\,x^2\left(x - \frac{5}{3}\right)(x - 3)$$

Alle Klammern, aber auch die einzelnen Faktoren x sind sogenannte **Linearfaktoren** der Form $(x - x_k)$, in denen die Nullstellen x_k direkt ersichtlich sind ($x = (x - 0)$).

Hinweis: Die Nullstellenbestimmung wird für Polynome vom Grad $n \geq 3$ in vielen Fällen nicht so ohne Weiteres möglich sein, weil dafür kubische oder Gleichungen noch höheren Grades zu lösen sind. Ich werde jeweils einen Hinweis geben, wenn es einmal nicht gehen sollte.

Horizontalpunkte? Um herauszufinden, in welchen Punkten der Graph horizontal verläuft, gehen wir wie folgt vor:

i. Funktion ableiten

$$f(x) = \frac{3}{4}\,x^4 - \frac{7}{2}\,x^3 + \frac{15}{4}\,x^2 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 3x^3 - \frac{21}{2}\,x^2 + \frac{15}{2}\,x$$

ii. Ableitung gleich Null setzen und Horizontalstellen ermitteln

Verläuft der Funktionsgraph über einer Stelle x horizontal, so muss dort die Ableitung verschwinden. D.h., zur Bestimmung der Horizontalstellen müssen wir die Gleichung $f'(x) = 0$ lösen. Dazu faktorisieren wir die Ableitungsfunktion. Wir klammern zunächst $\frac{3}{2}\,x$ aus und faktorisieren dann weiter:

$$f'(x) = 3x^3 - \frac{21}{2}\,x^2 + \frac{15}{2}\,x = \frac{3}{2}\,x\big(2x^2 - 7x + 5\big) = \frac{3}{2}\,x(2x - 5)(x - 1) \overset{!}{=} 0$$

Es gibt somit drei Horizontalstellen: $x = 0$, $x = 1$ und $x = \frac{5}{2}$.

iii. y-Koordinaten der Horizontalpunkte ermitteln

Die drei Horizontalstellen sind ins ursprüngliche Polynom einzusetzen. Dies geht wegen dem Kürzen häufig rascher mit der faktorisierten Form von $f(x)$:

$$f(0) = \frac{3}{4} \cdot 0^2 \cdot \left(0 - \frac{5}{3}\right) \cdot (0 - 3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (0, 0)$$

$$f(1) = \frac{3}{4} \cdot 1^2 \cdot \left(1 - \frac{5}{3}\right) \cdot (1 - 3) = \ldots = 1 \qquad \Rightarrow \qquad (1, 1)$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{2} - 3\right) = \ldots = -\frac{125}{64} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{5}{2}, -\frac{125}{64}\right)$$

Nun verfügen wir über recht umfangreiche analytische Informationen zum Graphen von $f(x)$. Neben den Nullstellen bei $x = 0$, $x = \frac{5}{3}$ und $x = 3$ und den eben bestimmten Horizontalpunkten wissen wir nämlich zudem, dass es sich um ein Polynom 4. Grades (gerade!) handelt. Dabei besitzt das Glied mit der höchsten Potenz $\frac{3}{4}x^4$ ein positives Vorzeichen. Der G_f muss links also von oben her kommen und rechts wieder nach oben verschwinden.

Mit all diesen Anhaltspunkten kann beim Zeichnen des Graphen eigentlich nichts mehr schiefgehen (siehe Abb. 3.3).

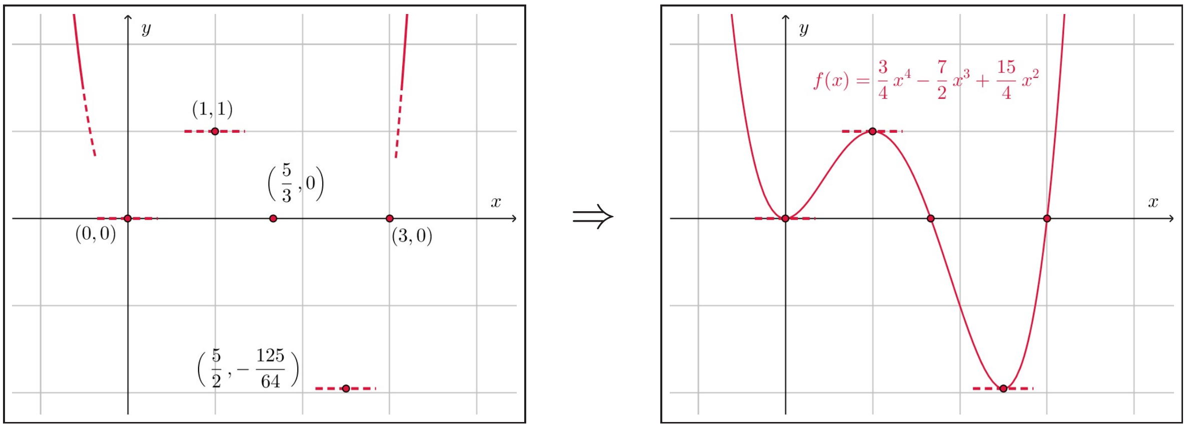


Abbildung 3.3: Skizzieren eines Polynomgraphen mittels Differentialrechnung.

Auftakt zur Kurvendiskussion

Mit obigem Beispiel haben wir erste Aspekte dieser sogenannten **Kurvendiskussion** kennengelernt. Damit meint man die rechnerisch untermauerte Analyse des Graphen zu einer gegebenen Funktion.

Wir werden diese Analyse in den nächsten Kapiteln noch um ein paar Punkte erweitern und natürlich auch auf andere Funktionstypen als nur auf Polynome anwenden.

Kapitel 4

Die zweite Ableitung $f''(x)$

4.1 Repetition zum Verständnis von Funktion und Ableitung

Ist eine Funktion $f(x)$ gegeben, so ergibt sich der zugehörige **Funktionsgraph** G_f in einem x-y-Koordinatensystem dadurch, dass über jeder Stelle x auf der x-Achse der zugehörige Funktionswert $f(x)$ in y-Richtung abgetragen wird. Jeder Punkt $P \in G_f$ hat also Koordinaten der Form $\big(x, f(x)\big)$. Das war uns bereits vor dem Thema Differentialrechnung bekannt.

Neu haben wir gesehen, dass sich zur Funktion $f(x)$ eine eindeutige **Ableitungsfunktion** $f'(x)$ bilden lässt. Auch dieses $f'(x)$ enthält eine grafische Aussage: Über der Stelle x, also im Punkt $\big(x, f(x)\big)$, hat der G_f die **Steigung** $f'(x)$ – genauer: ist t die Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt $P\big(x, f(x)\big)$, so hat diese Tangente die Steigung $m_t = f'(x)$.

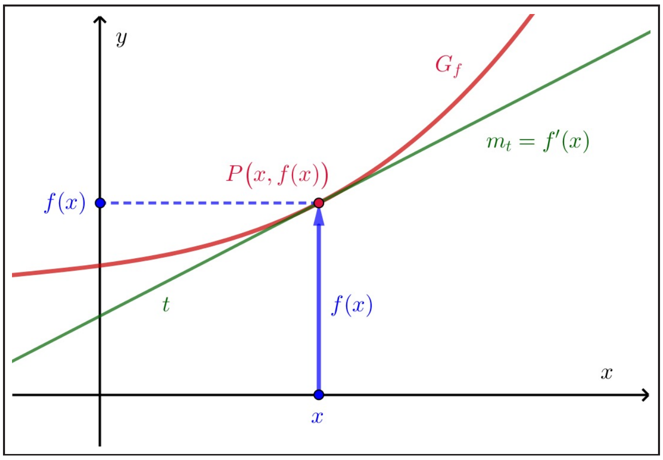


Abbildung 4.1: Die grafischen Bedeutungen von $f(x)$ und $f'(x)$.

$f'(x)$ steht für die Steigung des G_f über der Stelle x. Das bedeutet, $f'(x)$ beschreibt die aktuelle **Veränderung** oder besser **Veränderungsrate** der Funktion $f(x)$, denn:

- Ist $f'(x) > 0$, so ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle x am zunehmen. Der G_f steigt an.
- Ist $f'(x) < 0$, so ist der Funktion $f(x)$ an der Stelle x am abnehmen. Der G_f fällt ab.
- Je grösser $|f'(x)|$ ist, desto ausgeprägter ist die Veränderungsrate.

Die "Steigung" in einem Punkt $P \in G_f$ beschreibt also die dortige "Veränderungsrate" von $f(x)$:

Die Ableitung $f'(x)$ gibt an, wie sich der Funktionswert $f(x)$ über der Stelle x <u>am verändern</u> ist.

4.2 Die Zweite Ableitung $f''(x)$ – ein Mass für die Krümmung

Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist selber wieder eine mathematische Funktion mit allem, was dazu gehört. Insbesondere ist sie eindeutig und es lässt sich ein Funktionsgraph skizzieren.

Es gibt folglich keinen Grund, weshalb wir $f'(x)$ nicht selber wieder ableiten dürften. Natürlich muss die Frage gestellt werden, wozu wir das denn machen wollen, aber zunächst einmal ist klar, dass sich dieses $f''(x)$, also die Ableitung der Ableitung, bilden lässt. Wir sprechen von der **Funktion** $f(x)$, von ihrer **1. Ableitung** $f'(x)$ und neu von der **2. Ableitung** $f''(x)$.

Nun könnte man ja einfach sagen, dass die 2. Ableitung für die "Steigung der Steigung" oder die "Veränderungsrate der Veränderungsrate" stehen muss, aber diese Aneinanderreihungen füllen sich nicht von alleine mit Sinn.[1] Hingegen kann ich die beiden Wörter "Steigung" und "Veränderungsrate" ja auch kombinieren und gelange so zu einer Formulierung, die die Bedeutung der 2. Ableitung einer Funktion greifbar macht:

> **Die 2. Ableitung $f''(x)$ einer Funktion $f(x)$ beschreibt, wie sich die Steigung des Graphen G_f über der Stelle x am verändern ist.**

Oder nochmals anders: Die 2. Ableitung $f''(x)$ gibt an, ob die Steigung des G_f über der Stelle x am zunehmen oder am abnehmen ist. Betrachten wir dazu Abb. 4.2 mit folgenden Anmerkungen:

- Zunächst bemerken wir, dass der gezeigte Funktionsgraph G_f im ganzen sichtbaren Bereich ansteigt. Das bedeutet, die 1. Ableitung $f'(x)$ ist überall positiv: $f'(x) > 0$. Das gilt auch in den beiden Punkten $P, Q \in G_f$.

- In P und in Q ist die Steigung des Graphen sogar genau gleich gross. Die 1. Ableitung hat also denselben Wert: $f'(x_P) = f'(x_Q)$.

- Die Steigung des G_f verändert sich vorzu ein bisschen. Im Punkt P ist die Kurve am abflachen, während sie in Q steiler wird. Das bedeutet, in P ist die 2. Ableitung $f''(x)$ negativ, weil die Steigung abnimmt. Anders in Q, wo die Steigung des G_f zunimmt und folglich $f''(x) > 0$ ist.

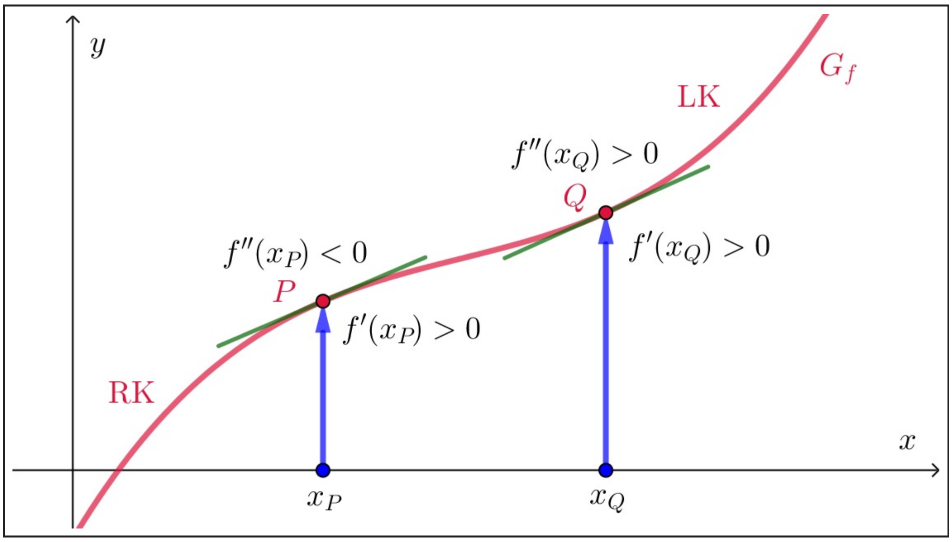


Abbildung 4.2: Grafik zur Erläuterung der 2. Ableitung.

[1] Zumindest ist dies aus meiner (A. Gertsch) Sicht so.

- Wir stellen fest: Die Abnahme der Steigung entspricht einer **Rechtskurve** (RK) des G_f, während zur Steigungszunahme eine **Linkskurve** (LK) des G_f gehört.

  N.B.: Mit den Ausdrücken Links- und Rechtskurve ist gemeint, dass man eine solche Kurve machen müsste, wenn man von links her kommend dem G_f nachfährt. Man kann sich auch vorstellen, dass der G_f auf den Boden gezeichnet wäre und ich ihn mit einem Fahrrad von links her kommend abfahren möchte. Dann wäre man eben bei P in einer Rechtskurve und bei Q in einer Linkskurve.

- Je enger eine Kurve des G_f ist, desto rascher verändert sich dort seine Steigung. Umso grösser muss folglich der Betrag $|f''(x)|$ der 2. Ableitung sein. Wir sagen: Eine enge Kurve besitzt eine grössere oder stärkere **Krümmung** als eine weite Kurve.

  Die 2. Ableitung $f''(x)$ ist demnach ein Mass für die Krümmung eines Funktionsgraphen!

Die 2. Ableitung als Krümmung eines Funktionsgraphen

Die 2. Ableitung $f''(x)$ einer Funktion $f(x)$ steht für die **Krümmung** *des Graphen G_f über der Stelle x. Dabei gilt:*

$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Linkskurve (LK)

$f''(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Rechtskurve (RK)

$|f''(x)|$ gross $\quad \Leftrightarrow \quad$ starke Krümmung des G_f

$|f''(x)|$ klein $\quad \Leftrightarrow \quad$ schwache Krümmung des G_f

4.3 Wendestellen und -punkte

Ein kurviger Funktionsgraph verändert seine Steigung. Zu einer Steigungszunahme, also zu einer Linkskurve (LK), gehört die mathematische Bedingung $f''(x) > 0$, während bei einer Steigungsabnahme resp. Rechtskurve (RK) $f''(x) < 0$ sein muss.

Wechselt ein Funktionsgraph G_f in einem bestimmten Punkt von einer Links- zu einer Rechtskurve oder umgekehrt, so bezeichnen wir diesen Punkt als **Wendepunkt (W)** und dessen x-Koordinate als **Wendestelle** von $f(x)$ (vgl. Abb 4.3). Da der Graph in diesem Punkt weder Links-, noch Rechtskurve ist, muss dort $f''(x) = 0$ sein.

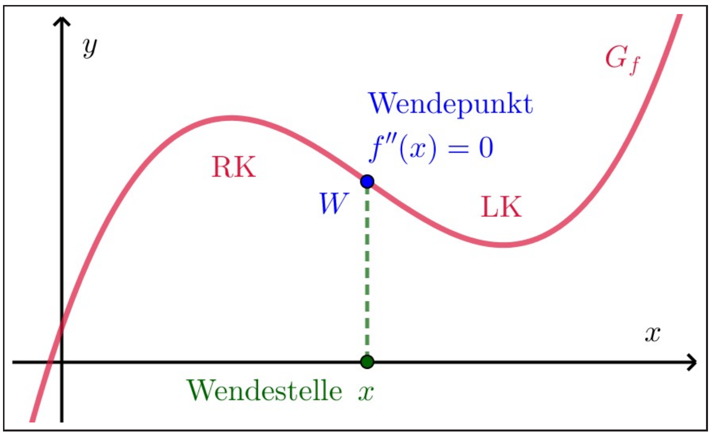


Abbildung 4.3: Das grafische Verständnis zu Wendestelle und Wendepunkt. Im Wendepunkt findet der Übergang von einer Links- zu einer Rechtskurve oder umgekehrt statt.

4.4 Analytische Unterscheidung von Horizontalpunkten

Ergibt die 1. Ableitung $f'(x)$ den Wert Null, so weist der G_f über der Stelle x einen **Horizontalpunkt** auf. Dabei wollen wir drei Qualitäten voneinander unterscheiden: **Maximalpunkte (= Hochpunkte H)**, **Minimalpunkte (= Tiefpunkte T)** und **Sattelpunkte**, die ab und zu auch als **Terrassenpunkte** bezeichnet werden.[2]

Mittels der 2. Ableitung lassen sich diese Qualitäten rechnerisch – wir sagen: **analytisch** – voneinander unterscheiden. Abb. 4.4 zeigt links einen Maximal- und in der Mitte einen Minimalpunkt. Daraus wird ersichtlich, dass der G_f im Maximalpunkt eine Rechts- und im Minimalpunkt eine Linkskurve beschreiben muss, ansonsten könnte es sich (lokal) nicht um einen höchsten resp. tiefsten Punkt handeln. Und somit muss die 2. Ableitung an einer Maximalstelle einen negativen und an einer Minimalstelle einen positiven Wert aufweisen. Anders beim Sattelpunkt, der gleichzeitig ein Wendepunkt des G_f ist. Der Graph wechselt dort von einer Links- in eine Rechtskurve oder umgekehrt und somit muss an dieser Stelle die 2. Ableitung verschwinden.

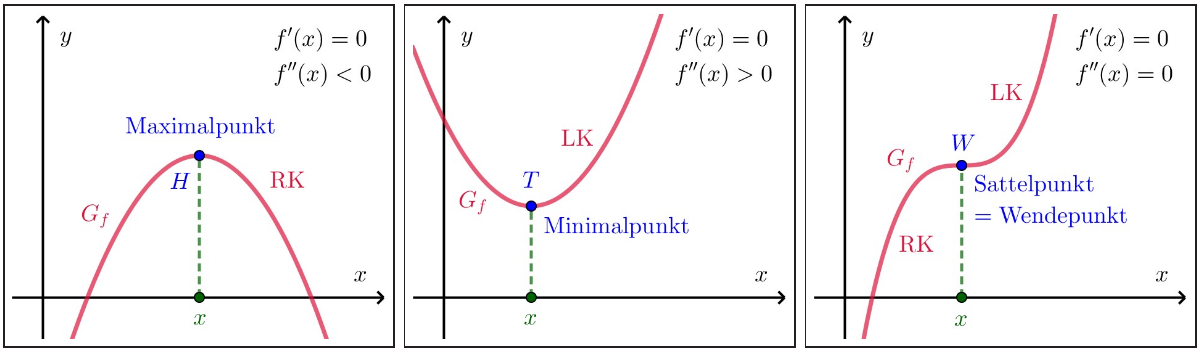


Abbildung 4.4: Verschiedene Qualitäten von Horizontalpunkten und ihr Zusammenhang mit der Krümmung des Graphen resp. mit der 2. Ableitung von $f(x)$.

Analytische Kriterien für Maximal-, Minimal- und Sattelstellen

Nimmt die 1. Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x den Wert $f'(x) = 0$ an, so handelt es sich bei x um eine Horizontalstelle von $f(x)$. Dabei unterscheiden wir drei Qualitäten, die mit dem Wert der 2. Ableitung $f''(x)$ in Verbindung gebracht werden:

- $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ x ist **Minimalstelle** von $f(x)$
- $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ x ist **Maximalstelle** von $f(x)$
- $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ $\Leftarrow$ x ist **Sattelstelle** von $f(x)$

Anmerkung zu den Richtungen der Folgepfeile – notwendige vs. hinreichende Bedingungen

Die Folgepfeile $\Rightarrow$ und $\Leftarrow$ gelten streng logisch nur in die gezeigten Richtungen.

Sind beispielsweise $f'(x) = 0$ und gleichzeitig $f''(x) > 0$, so **muss** x eine Minimalstelle der Funktion $f(x)$ sein. In die Gegenrichtung stimmt dies nicht immer! Es ist also nicht so, dass bei jeder Minimalstelle einer Funktion automatisch sowohl $f'(x) = 0$, als auch $f''(x) = 0$ sind.

Wissen wir, dass es sich bei x um eine Sattelstelle im Sinne von Abb. 4.4 handelt, so **müssen** zwingend $f'(x) = 0$ und $f''(x)$ sein, während in die Gegenrichtung aus $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ nicht immer folgen muss, dass x eine Sattelstelle von $f(x)$ ist.

[2]Maximal- und Minimalpunkte fassen wir, wie bereits gesehen, unter dem Begriff **Extremalpunkte** zusammen.

Diese zunächst vielleicht irritierenden Aussagen verstehen wir besser, nachdem wir zwei Beispiele gesehen haben, an denen die Problematik klar wird (vgl. Abb. 4.5):

Beispiel 1 mit $f(x) = 2$: Hier ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ für beliebige Stellen x. Der G_f ist eine Horizontale auf der Höhe 5. Diese ist überall horizontal und nirgendwo gekrümmt. Keine Stelle x kann somit als Sattelstelle im Sinne von Abb. 4.5 angesehen werden!

Beispiel 2 mit $f(x) = x^4 + 1$: Für die Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 4x^3$ und $12x^2$. Somit ist $f'(0) = f''(0) = 0$. Dennoch ist $x = 0$ keine Sattelstelle von $f(x)$.

Tatsächlich ist die Stelle $x = 0$ eine Minimalstelle von $f(x)$. Wie wir in Abb. 4.5 sehen, verläuft der G_f horizontal durch den Tiefpunkt T und offenbar ist er dort dermassen flach, dass er keine Krümmung mehr hat. In einem Punkt keine Krümmung aufzuweisen bedeutet aber eben nicht automatisch, dass auf der einen Seite eine Links- und auf der anderen eine Rechtskurve vorhanden sein muss.

Dieses Beispiel zeigt zudem, dass bei einer Minimalstelle x nicht automatisch $f'(x) = 0$ mit $f''(x) > 0$ sein muss.

Beide Beispiele stehen offensichtlich für **Spezialfälle**, mit denen wir es eher selten zu tun haben. Man darf also sagen: In den meisten Fällen wird es so sein, dass bei einer Minimalstelle $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ sind, oder dass $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ ein starkes Indiz dafür ist, dass es sich bei x um eine Sattelstelle von $f(x)$ handelt.

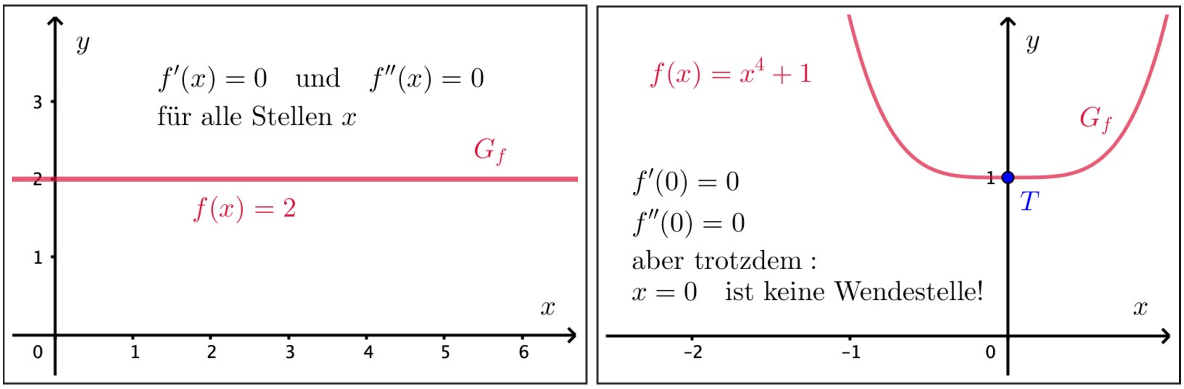


Abbildung 4.5: Beispiele von Spezialfällen bei der analytischen Einordnung von Horizontalstellen.

Notwendig vs. hinreichend

In der Mathematik unterscheiden wir zwischen **notwendigen** und **hinreichenden Bedingungen** für das Eintreten eines bestimmten Falls.

Notwendige Bedingung: Der Fall kann nur eintreten, wenn die Bedingung erfüllt ist. Die Erfüllung dieser Bedingung alleine reicht aber noch nicht aus um sicher zu sein, dass der Fall eintritt.

Hinreichende Bedingung: Der Fall tritt ganz sicher ein, wenn diese Bedingung erfüllt ist.

Mit diesen beiden Begriffen können wir nun die analytischen Kriterien für die Unterscheidung von Horizontalstellen nochmals besser in Sprache fassen:

- $f'(x) = 0$ zusammen mit $f''(x) > 0$ ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass x eine Minimalstelle der Funktion $f(x)$ ist.
- $f'(x) = 0$ zusammen mit $f''(x) < 0$ ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass x eine Maximalstelle der Funktion $f(x)$ ist.
- $f'(x) = 0$ zusammen mit $f''(x) = 0$ ist eine notwendige Bedingung dafür, dass x eine Sattelstelle der Funktion $f(x)$ ist.

4.5 Vollständige Kurvendiskussion bei Polynomen

Unter einer **Kurvendiskussion** verstehen wir die analytische Berechnung aller speziellen Punkte einer Funktion $f(x)$ so, wie wir das im vorangegangenen und in diesem Kapitel bereits gesehen haben. Mit diesen Informationen lässt sich dann der Graph der Funktion ohne weiteres und sehr präzise skizzieren.

Früher war das Zeichnen des Funktionsgraphen G_f natürlich ein primäres Ziel der Kurvendiskussion. Das ist heute ein wenig anders, da wir uns diese Graphen ja sehr rasch von `GeoGebra` oder ähnlichen Apps auf Computer, Tablet oder Händy aufzeichnen lassen können. Dennoch ist die Kurvendiskussion immer noch wichtig, denn sie dient uns als Übungsfeld zum grundlegenden Verständnis mathematischer Funktionsanalysen. Wie lassen sich Funktionen $f(x)$ rein rechnerisch untersuchen, das ist für uns von fundamentalerem Interesse und hat nichts mit der Frage zu tun, ob uns ein Programm den Graphen einer Funktion rasch aufzeichnen kann.

Inhalte einer vollständigen Kurvendiskussion bei Polynomen

Die Kurvendiskussion einer Polynomfunktion $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ sollte die folgenden Punkte beinhalten:

1. **Verhalten im Unendlichen ($|x| \to \infty$)?**

   Die höchste Potenz a_nx^n bestimmt über das Verhalten im Aussenbereich (vgl. Abschnitt 3.2).

2. **Nullstellen (NS)?**

   Bei welchen Stellen x schneidet der G_f die x-Achse?

   $$\textbf{Nullstellen?} \qquad f(x) = 0$$

3. **Horizontalstellen (HS)?**

   Über welchen Stellen x verläuft der G_f horizontal und welcher Art ist die Horizontalstelle?

   $$\textbf{Horizontalstellen?} \qquad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y\text{-Höhe des Horizontalpunktes aus } y = f(x)$$

   $$\textbf{Qualität der Horizontalstelle?} \qquad f''(x) \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \quad x \text{ ist } \textbf{Minimalstelle} \\ < 0 & \Rightarrow \quad x \text{ ist } \textbf{Maximalstelle} \\ = 0 & \Leftarrow \quad x \text{ ist } \textbf{Sattelstelle} \end{cases}$$

4. **Wendestellen (WS)?**

   Über welchen Stellen x hat der G_f keine Krümmung resp. geht von einer Links- in eine Rechtskurve über oder umgekehrt?

   $$\textbf{Wendestellen?} \qquad f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y\text{-Höhe des Wendepunktes aus } y = f(x)$$

5. **Den G_f skizzieren!**

   Zum Abschluss der Kurvendiskussion tragen wir alle errechneten Informationen in ein Koordinatensystem ein und zeichnen den Graphen.

Bei der Lösung der Gleichungen $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ oder $f''(x) = 0$ geht es stets um die Zerlegung der linken Seite in **Linearfaktoren** der Form $(x-a)$, denn wenn ein Produkt aus mehreren Faktoren gleich Null ist, so muss mindestens einer dieser Faktoren gleich Null sein. Das ist eine der wichtigsten algebraischen Regeln!

Zwei wichtige Anmerkungen zur Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren

Wir sind den folgenden beiden Aussagen zur Faktorisierung von Polynomen schon da und dort begegnet, aber es kann nicht schaden, sie hier nochmals separat anzuführen:

- **Ein Polynom n-ten Grades hat maximal n Nullstellen! Somit lässt es sich auch in maximal n Linearfaktoren zerlegen!**

  Gibt es tatäschlich n Nullstellen $(x_1, \ldots, x_n)$, so hat die vollständige Zerlegung die Form:

  $$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \underline{a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}$$

  Die Nullstellen lassen sich in der faktorisierten Form also direkt in den Linearfaktoren ablesen.

- **Ein Polynom mit ungeradem Grad hat mindestens 1 Nullstelle!**

  Klar: Der G_f kommt bei ungeradem Grad links oder rechts von $-\infty$ und verschwindet auf der anderen Seite nach $+\infty$. Irgendwo muss also die x-Achse passiert werden!

4.6 Beispiel für die vollständige Kurvendiskussion eines Polynoms

Am Ende dieses Kapitels soll ein Beispiel einer Kurvendiskussion komplett vorgezeigt werden, sodass neben den diversen Schritten, die es zu tun gibt, auch klar wird, welche zusätzlichen Fertigkeiten und Überlegungen hilfreich oder sogar vonnöten sind.

Unser Beispiel sei folgendes Polynom:

Beispielfunktion: $$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

Ich gehe den Punkten aus dem vorigen Abschnitt entlang durch die Kurvendiskussion. Allerdings werden wir dabei sehen, dass wir gar nicht unbedingt linear diesem Ablauf folgen können, sondern vor allem Schritt für Schritt das machen, was machbar ist.

1. **Verhalten im Unendlichen ($|x| \to \infty$)?**

   Der Grad des Polynoms ist ungerade und der Koeffizient der höchsten Potenz ist positiv.

   $\Rightarrow$ der G_f wird links aus von $-\infty$ kommen und rechts nach $+\infty$ verschwinden.

2. **Nullstellen (NS)?**

   Die direkte Bestimmung der NS ist in unserem Beispiel zunächst schwierig bis unmöglich. Diese Bestimmung entspricht ja einer Zerlegung des Polynoms in Linearfaktoren der Form $(x - a)$. Gerade dies ist aber bei Polynomen vom Grad $n \geq 3$ in der Regel nicht so einfach, insbesondere wenn alle Potenzen von x^0 bis zu x^n darin enthalten sind. Wir müssten schon eine erste Nullstelle kennen oder gut raten.

   Um einen Faktorisierungsversuch zu starten, würde es sich allenfalls empfehlen den Faktor $\frac{1}{4}$ auszuklammern, sodass die höchste Potenz den Vorfaktor 1 erhält:

   $$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = \frac{1}{4}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10\right)$$

   In dieser Form könnte man aufgrund der Zweierzerlegung der Zahl 10 versuchen bestimmte Linearfaktoren auszuklammern. In Frage kämen: $(x{\pm}1)$, $(x{\pm}2)$, $(x{\pm}5)$ und $(x{\pm}10)$. Wir wissen aber im Moment nicht, ob einer dieser Faktorisierungsansätze aufgeht und 8 Varianten sind doch ein bisschen sehr viele. In dieser Situation sollte man die NS-Suche auf später verschieben und schauen, ob sich aus den anderen Teilen der Kurvendiskussion allenfalls Hinweise ergeben. Ansonsten verliert man einfach zu viel Zeit mit Pröbeln.

3. **Horizontalstellen (HS)?**

Da unser $f(x)$ eine kubische Funktion ist, wird sich als 1. Ableitung eine quadratische Funktion ergeben und wir sind ganz sicher, dass wir die Gleichung $f'(x) = 0$ lösen können, denn mit quadratischen Gleichungen kennen wir uns aus. Hier können wir mittels Zweiklammeransatz sogar ganz direkt $f'(x)$ faktorisieren und somit zwei HS bestimmen bestimmen:

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}\left(x^2 - x - 2\right) = \frac{3}{4}(x+1)(x-2)$$

$$\text{Also:} \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x_1 = -1} \text{ oder } \underline{x_2 = 2}$$

Für die y-Werte der Horizontalpunkte erhalten wir:

$$f(-1) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \underline{\frac{27}{8}(= 3.375)} \quad \text{und} \quad f(2) = 2 - \frac{3}{2} - 3 + \frac{5}{2} = \underline{0}$$

Damit haben wir zufällig entdeckt, dass $x = 2$ auch eine NS von $f(x)$ ist.

Wie steht es um die Qualität unserer Horizontalstellen? Dazu bilden wir die 2. Ableitung und setzen die Stellen ein:

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f''(-1) = -\frac{9}{4} < 0 \quad \text{und} \quad f''(2) = \frac{9}{4} > 0$$

Somit ist $H(-1, \frac{27}{8})$ ein Hochpunkt und $T(2, 0)$ ein Tiefpunkt.

4. **Wendestellen (WS)?**

Wir bestimmen die 2. Ableitung und setzen sie gleich Null:

$$f''(x) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x_3 = \frac{1}{2}}$$

Eigentlich hätten wir hier gar nicht unbedingt die 2. Ableitung benötigt, denn die Graphen kubischer Funktionen sind stets symmetrisch zu ihren Wendepunkten, sodass beide Koordinaten von W je das arithmetische Mittel der Koordinaten der Extrempunkte H und T sind.[3] Benutzen wir diese Idee wenigstens zur Bestimmung der y-Koordinate von W:

$$y_W = \frac{y_H + y_T}{2} = \frac{\frac{27}{8} + 0}{2} = \underline{\frac{27}{16}}(= 1.6875)$$

2b. **fehlende Nullstellen bestimmen**

Mittlerweile haben wir – eher per Zufall – herausgefunden, dass $x = 2$ eine NS von $f(x)$ ist. Dieses Wissen können wir nun ausnutzen, um $f(x)$ zu faktorisieren und so weitere Nullstellen zu bestimmen. Wir klammern also einen Faktor $(x - 2)$ aus $f(x)$ aus. Dies geht tatsächlich auf und wir erhalten:

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10\right) = \frac{1}{4}(x-2)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 5\right)$$

Die NS der quadratischen Funktion in der hinteren Klammer bestimmen wir unter Ausnutzung der Mitternachtsformel (MNF):

$$x_{4/5} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}}{2} = 2 \text{ oder } \underline{-\frac{5}{2}}$$

Somit gibt es nur eine weitere NS, nämlich $x_5 = -\frac{5}{2}$. $x_4 = 2$ ist ja bereits eine NS. Später werden wir in dieser Situation $x = 2$ als eine **doppelte Nullstelle** bezeichnen.

[3] Auch der Betrag der Krümmungen in den Extrempunkten H und T ist identisch, wie wir ja bereits rechnerisch herausgefunden haben $|f''(x_H)| = \frac{9}{4} = |f''(x_T)|$.

Jetzt können wir $f(x)$ tatsächlich vollständig faktorisiert notieren:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = \underline{\frac{1}{4}(x-2)^2\left(x+\frac{5}{2}\right)}$$

5. Den G_f skizzieren!

Ich stelle nochmals alle Informationen zum Graphen von $f(x)$ zusammen:

- G_f kommt links von $-\infty$ und geht rechts nach $+\infty$.
- G_f berührt oder durchquert die x-Achse bei $x = -\frac{5}{2}$ und $x = 2$ (NS).
- G_f hat einen Hochpunkt bei $H(-1, \frac{27}{8}) \approx (-1, 3.4)$ und einen Tiefpunkt bei $T(2, 0)$.
- Der Wendepunkt des G_f sitzt bei $W(\frac{1}{2}, \frac{27}{16}) \approx (0.5, 1.7)$.
- Ohne es berechnet zu haben, wissen wir, dass der G_f die y-Achse bei $\frac{5}{2}$ schneidet, denn das konstante Glied hat diesen Wert und alle anderen Glieder verschwinden für $x = 0$.

Diese Informationen trage ich in ein x-y-Koordinatensystem ein (siehe links in Abb. 4.6) und es wird sofort ersichtlich, wie der Graph verlaufen muss. In diesem Beispiel mit einer kubischen Funktion gibt es wirklich keine Fragezeichen mehr!

Auf zwei Aspekte möchte ich bei dieser Gelegenheit noch explizit hinweisen:

- Die Graphen **kubischer Funktionen** sind wirklich stets **punktsymmetrisch** zu ihrem einen Wendepunkt.
- Die Nullstelle bei $x = 2$ ist ja gleichzeitig ein Tiefpunkt. D.h., der Funktionsgraph berührt dort die x-Achse, im Gegensatz zu $x = -\frac{5}{2}$, wie der G_f die x-Achse wirklich durchsticht. Dieses Berühren hat direkt damit zu tun, dass in der Faktorisierung von $f(x)$ der Linearfaktor $(x-2)$ quadratisch auftaucht, also doppelt enthalten ist. $x = 2$ ist eine doppelte Nullstelle.

  Wir merken uns: **Bei doppelten Nullstellen berührt der G_f die x-Achse!**

  Diese Aussage werden später natürlich noch beweisen.

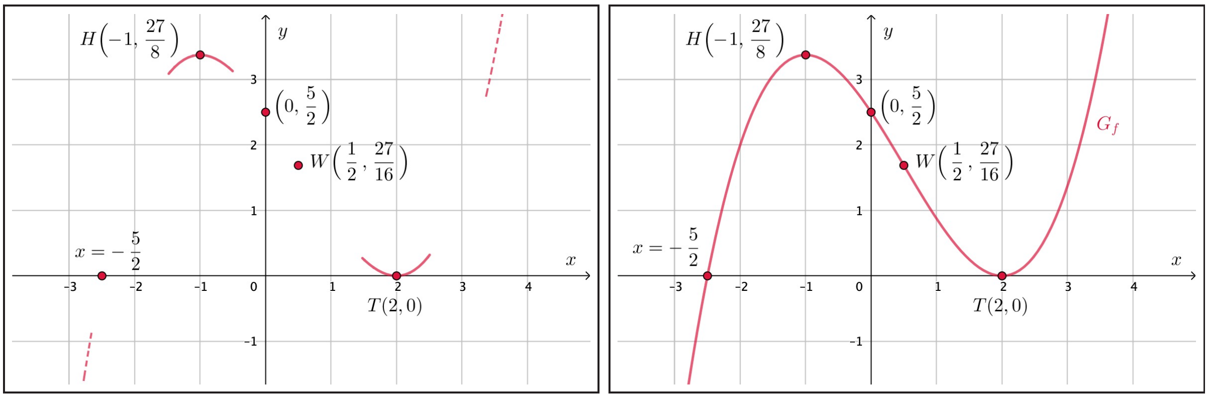


Abbildung 4.6: Beispiel zum Skizzieren eines Graphen nach einer Kurvendiskussion.

Kapitel 5

Funktionsbestimmung mit Polynomen

Bis jetzt haben wir Polynome auf spezielle Punkte, auf das Verhalten im Unendlichen und manchmal auf Symmetrien untersucht. In diesem Kapitel geht es nun um die Gegenrichtung: Wenn wir bestimmte Eigenschaften einer Funktion kennen, wollen wir daraus auf die Funktionsgleichung schliessen!

In der Praxis steht man oftmals vor der Situation, die Funktion, welche einen bestimmten Zusammenhang beschreiben soll, zunächst nicht genau zu kennen. Kommt hinzu, dass sich z.B. in der Physik viele Vorgänge nicht kontinuierlich aufzeichnen lassen. Man verfügt nur über "punktuelle Angaben". So sucht man nach der Gleichung einer (möglichst einfachen) Funktion, von welcher nur bestimmte Bedingungen bekannt sind. Solche Bedingungen sind zum Beispiel Punkte, durch die der Graph der Funktion verläuft, oder Steigungs- oder Krümmungsverhalten an bestimmten Stellen.

5.1 Anzahl Bedingungen und Funktionsansatz

Je mehr Bedingungen an eine Funktion gestellt werden, umso komplizierter dürfte ihre Funktionsgleichung ausfallen. Wie viele Bedingungen kann denn ein Polynomen $f(x)$ vom Grad n maximal erfüllen? Überlegen wir:

- Eine **Gerade** (= Graph eines Polynoms 1. Grades resp. einer **linearen Funktion**) wird durch zwei Punkte eindeutig festgelegt. Ihre Funktionsgleichung lautet $f(x) = mx + q$, beinhaltet also zwei Parameter. Zur Festlegung von m und q brauchen somit zwei Informationen oder Bedingungen, die uns je eine Gleichung liefern. Weitere Beedingung können dann nicht mehr (resp. nur zufällig) erfüllt werden, weil die Gerade bereits vollständig definiert ist.

- Zur Festlegung eine **Parabel** (= Graph eines Polynoms 2. Grades resp. einer **quadratischen Funktion**) sind drei Bedingungen oder entsprechende Informationen nötig, da im Funktionsansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ drei Parameter zu bestimmen sind. Mehr als drei Bedingungen kann eine quadratische Funktion in der Regel nicht erfüllen.

- Die **kubische Funktion** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (= Polynom 3. Grades) beinhaltet vier Parameter und es werden folglich vier Bedingungen benötigt, um eine solche Funktion eindeutig festzulegen – und nicht mehr!

- **Allgemein** werden zur eindeutigen Bestimmung eines Polynoms n-ten Grades genau $n+1$ Informationen benötigt, denn die Funktionsgleichung besitzt $n+1$ Parameter. Mehr Bedingungen können nicht erfüllt werden, weniger legen die Funktion noch nicht eindeutig fest.

In der Konsequenz bedeutet dies:

Soll eine Polynomfunktion n Bedingungen erfüllen, so sollte der Funktionsansatz ein Polynom vom Grad $n - 1$ sein.

5.2 Funktionsbestimmung an einem Beispiel

Aufgabenstellung: Eine Polynomfunktion hat über der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt mit der Wendetangente $t(x) = -3x + 6$. Ihr Graph verläuft zudem durch $P(0, -2)$. Wie lautet die einfachst mögliche Funktionsgleichung?

Lösung: Aus dem Aufgabentext lesen wir folgende vier Informationen heraus:

i. Die Stelle $x = 2$ ist eine Wendestelle, die zweite Ableitung der gesuchten Funktion ist dort also gleich Null: $f''(2) = 0$.

ii. Die Steigung der Wendetangente ($m_t = -3$) entspricht der Steigung des Graphen im Wendepunkt. D.h., wir kennen den Wert der 1. Ableitung an der Wendestelle: $f'(2) = -3$.

iii. Der Wendepunkt liegt sowohl auf dem Funktionsgraphen, als auch auf der Wendetangente. Wenn wir also den x-Wert des Wendepunktes in die Tangentengleichung einsetzen, erhalten wir seinen y-Wert: $t(2) = -3 \cdot 2 + 6 = 0 \;\Rightarrow\; f(2) = 0$.

iv. Aus dem anderen vorgegebenen Punkt $P(0, -2)$ folgt zudem: $f(0) = -2$.

Damit haben wir dem Text vier mathematische Bedinungen für die gesuchte Funktion entnommen. Wir schliessen daraus, dass ein eindeutiges Polynom 3. Grades (enthält vier Parameter) diese Bedingungen erfüllt, und setzen an:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad \text{mit} \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{und} \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

Wir notieren die vier Bedingungen von oben als Gleichungssystem und benutzen den Funktionsansatz inkl. Ansätze für die Ableitungen, um vier lineare Gleichungen für die Parameter a, b, c und d zu erhalten:

$$\left|\begin{array}{r} f''(2) = 0 \\ f'(2) = -3 \\ f(2) = 0 \\ f(0) = -2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{rrrrr} 12a & +2b & & & = 0 \\ 12a & +4b & +c & & = -3 \\ 8a & +4b & +2c & +d & = 0 \\ & & & d & = -2 \end{array}\right| \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

Ein solches lineares 4x4-Gleichungssystem (4 Gleichungen & 4 Unbekannte) hat im Allgemeinen genau eine Lösung. Wir erhalten sie durch Anwendung diverser Verfahren, wobei das Additionsverfahren als "immer funktionierend" hervorgehoben werden muss. Schritt für Schritt reduzieren wir die Anzahl Gleichungen, wobei wir darauf achten, dass bei jeder Verarbeitung zweier Gleichungen überall derselbe Parameter herausfällt. Im obigen Fall bedeutet dies:

$$③ - ④: \quad 8a + 4b + 2c = 2 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{rrrr} 12a & +2b & & = 0 \\ 12a & +4b & +c & = -3 \\ 8a & +4b & +2c & = 2 \end{array}\right| \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ⑤ \end{array}$$

$$2 \cdot ② - ⑤: \quad 16a + 4b = -8 \quad \Leftrightarrow \quad 8a + 2b = -4 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{rrr} 12a & +2b & = 0 \\ 8a & +2b & = -4 \end{array}\right| \begin{array}{c} ① \\ ⑥ \end{array}$$

$$② - ⑥: \quad 4a = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = 1} \quad \Rightarrow \quad 8 + 2b = -4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b = -6}$$

$$\Rightarrow \quad 8 - 24 + 2c = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{c = 9} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2}}$$

Bei der Funktionsbestimmung geht es also um das Ablesen von Bedingungen aus einem Aufgabentext. Sobald diese korrekt und vollständig in mathematische Gleichungen für die Funktionsparameter übersetzt sind, besteht der Rest der Aufgabe "nur" noch aus der Auflösung eines linearen Gleichungssystems.

5.3 Katalog verschiedener Bedingungen für ein Polynom

Typische Formulierung: **Die Funktion $f(x)$ ...**	**daraus folgende Gleichung**
... geht durch den Punkt $P(a, b)$.	$f(a) = b$ Punkt einsetzen
... schneidet die x-Achse bei $x = a$.	$f(a) = 0$ Nullstelle von $f(x)$
... hat eine Extremalstelle bei $x = a$.	$f'(a) = 0$ horizontale Tangente
... hat in $H(a, b)$ einen Hochpunkt.	$f(a) = b$ und $f'(a) = 0$ Punkt einsetzen und horizontale Tangente
... hat in $T(a, b)$ einen Tiefpunkt.	$f(a) = b$ und $f'(a) = 0$ Punkt einsetzen und horizontale Tangente
... hat bei $x = a$ die Steigung m.	$f'(a) = m$ Tangentensteigung m
... hat bei $x = a$ eine Tangente, die parallel ist zur Gerade $g(x) = mx + q$.	$f'(a) = m$ Geradensteigung ist Tangentensteigung
... berührt bei $x = a$ die x-Achse.	$f(a) = 0$ und $f'(a) = 0$ horizontale Tangente auf der x-Achse
... hat bei $x = a$ eine Wendestelle.	$f''(a) = 0$ Kriterium für Wendestelle
... hat in $W(a, b)$ einen Wendepunkt.	$f(a) = b$ und $f''(a) = 0$ Punkt einsetzen und Kriterium für Wendestelle
... hat bei $x = a$ die Wendetangente $g(x) = mx + q$.	$f''(a) = 0$ und $f'(a) = m$ und $f(a) = g(a)$ alle Angaben zum Wendepunkt
... hat bei $x = a$ eine Terrassen- resp. Sattelstelle.	$f'(a) = 0$ und $f''(a) = 0$ Wendepunkt mit horizontaler Tangente
... hat in $SP(a, b)$ eine Sattel-, resp. Terrassenpunkt.	$f(a) = b$ und $f'(a) = 0$ und $f''(a) = 0$ alle Angaben zum Sattelpunkt

5.4 Symmetrien verändern den Funktionsansatz

Wird vom Graphen einer Polynomfunktion zusätzlich zu den übrigen Bedingungen verlangt, dass er eine **Achsenymmetrie zur y-Achse** oder eine **Punktsymmetrie zum Ursprung $(0, 0)$** aufweist, so verändert sich dadurch der Funktionsansatz:

Achsensymmetrie zur y-Achse erfordert: $f(-x) = f(x)$

Diese Eigenschaft wird nur von den geraden Potenzen erfüllt: $(-x)^2 = x^2$, $(-x)^4 = x^4$, $(-x)^6 = x^6$, etc. Also dürfen im Ansatz **nur gerade Potenzen von x** vorkommen.

Bei z.B. drei Bedingungen ist somit ein Polynom 4. Grades ansetzen: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Die Potenz des Parameters c ist auch gerade: $c = cx^0$.

Punktsymmetrie zum Ursprung $(0, 0)$ erfordert: $f(-x) = -f(x)$

Diese Eigenschaft wird nur von ungeraden Potenzen erfüllt: $(-x)^1 = -x^1$, $(-x)^3 = -x^3$, $(-x)^5 = -x^5$, etc. Also dürfen im Ansatz **nur ungerade Potenzen von x** vorkommen.

Bei vier Bedingungen ist z.B. ein Polynom 7. Grades anzusetzen: $f(x) = ax^7 + bx^5 + cx^3 + dx$.

5.5 Rezept zur Funktionsbestimmung bei Polynomen

Halten wir nochmals fest, wie der allgemeine Ablauf bei der Bestimmung einer Polynomfunktion aus verschiedenen Bedingungen aussieht:

Vier Schritte zur Bestimmung eines möglichst einfachen Polynoms

1. *Formulieren der Bedingungen mit Hilfe von $f(x), f'(x), f''(x)$.*
2. *Bei n Bedingungen ist eine Polynomfunktion vom Grad $n - 1$ anzusetzen.*
   Ausnahme: *Zusätzlich verlangte* **Symmetrie***!*
3. *Aufstellen des Gleichungssystems für die zu bestimmenden Funktionsparameter unter Verwendung des Funktionsansatzes.*
4. *Lösen des Gleichungssystems & Angabe der gefundenen Funktion.*

Die Grundform dieses Rezeptes – 1. Bedingungen formulieren, 2. Funktion ansetzen, 3. Gleichungssystem für die Funktionsparameter ansetzen, 4. System lösen und Resultat notieren – bleibt auch später bei der Betrachtung anderer Funktionstypen dieselbe. Die Wahl des Funktionsansatzes variiert natürlich und es können weitere Bedingungen hinzukommen. Stets gilt dabei: **Die Anzahl Bedingungen sollte der Anzahl festzulegender Parameter entsprechen!**

5.6 Noch ein Beispiel: Vorgegebener Grad des Polynoms

Aufgabenstellung: Gesucht ist eine kubische Funktion $f(x)$, deren Graph G_f symmetrisch zum Ursprung ist. Zudem verläuft G_f durch $A(2,-2)$ und hat über der Stelle $x=1$ eine horizontale Tangente.

Lösung: Wir befolgen Schritt für Schritt das Rezept aus Abschnitt 5.5:

1. Wir formulieren die an $f(x)$ gestellten Bedingungen mittels Gleichungen für die Funktion und ihre Ableitungen:
   - Der G_f verlaufe durch $A(2,-2) \Rightarrow \underline{f(2)=-2}$.
   - Der G_f habe über der Stelle $x=1$ eine horizontale Tangente $\Rightarrow \underline{f'(1)=0}$.
2. Wir wissen bereits, dass es sich um eine kubische Funktion handeln soll. Der allgemeine Funktionsansatz dafür lautet:

   $$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

   Allerdings soll unser G_f punktsymmetrisch zum Ursprung sein. Somit darf $f(x)$ nur ungerade Potenzen von x enthalten. Die Koeffizienten der geraden Potenzen müssen somit gleich 0 sein. Wir setzen $f(x)$ daher neu an:

   $$f(x) = ax^3 + bx \qquad \text{mit} \qquad f'(x) = 3ax^2 + b \qquad \text{und} \qquad f''(x) = 6ax$$

3. Nun ergeben die beiden Bedingungen oben ein lineares Gleichungssystem für a und b:

   $$\left| \begin{array}{c} f(2) = -2 \\ f'(1) = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 8a + 2b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 4a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array}$$

4. Dieses Gleichungssystem löst sich im Nu und wir erhalten für die gesuchte Funktion:

   $$① - ② : \quad \underline{a=-1} \quad \Rightarrow \quad \text{in } ② : \quad -3 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b=3}$$

   $$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = -x^3 + 3x}}$$

Lösung begutachten: In Abb. 5.1 findet sich der Graph der gefundenen Funktion $f(x)$. Daran können wir jeweils rasch überprüfen, ob er alle Bedingungen erfüllt.

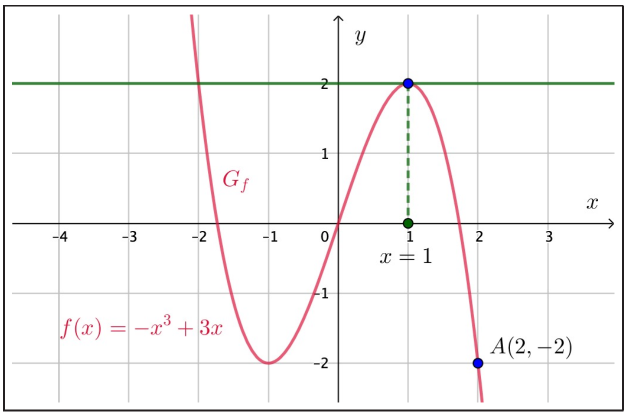


Abbildung 5.1: Der Graph G_f zur gefundenen Funktion. Er erfüllt alle geforderten Bedingungen.

5.7 Und noch eins: Grad unbekannt und mehr Bedingungen

Aufgabenstellung: Gesucht ist die Polynomfunktion $f(x)$ mit möglichst niedrigem Grad, deren Graph G_f in $P(0,1)$ einen Extremal- und in $W(1,-2)$ einen Wendepunkt hat, und der bei $x=-1$ die x-Achse schneidet.

Lösung: Auch hier befolgen wir das Rezept aus Abschnitt 5.5:

1. • Der G_f habe im Punkt $P(0,1)$ ein Extremum $\Rightarrow$ $\underline{f(0)=1}$ und $\underline{f'(0)=0}$.
   • Der G_f habe in $Q(1,-2)$ einen Wendepunkt $\Rightarrow$ $\underline{f(1)=-2}$ und $\underline{f''(1)=0}$.
   • Der G_f schneide die x-Achse bei $x=-1 \Rightarrow \underline{f(-1)=0}$.
2. Zur Erfüllung von fünf Bedingungen benötigen wir ein Polynom 4. Grades:

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \quad \text{mit} \quad f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$
$$\text{und} \quad f''(x)=12ax^2+6bx+2c$$

3. Aus den Bedingungen folgt das lineare Gleichungssystem für a, b, c und d:

$$\left|\begin{array}{c} f(0)=1 \\ f'(0)=0 \\ f(1)=-2 \\ f''(1)=0 \\ f(-1)=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{c} \underline{e=1} \\ \underline{d=0} \\ a+b+c+d+e=-2 \\ 12a+6b+2c=0 \\ a-b+c-d+e=0 \end{array}\right|$$

4. Die ersten beiden Gleichungen legen direkt je den Wert eines Parameters fest. Bauen wir diese Werte in die anderen Gleichungen ein, so folgt:

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a+b+c+1=-2 \\ 12a+6b+2c=0 \\ a-b+c+1=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a+b+c=-3 \\ 6a+3b+c=0 \\ a-b+c=-1 \end{array}\right| \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

$$① - ③: \quad 2b=-2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b=-1} \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{c} a-1+c=-3 \\ 6a-3+c=0 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a+c=-2 \\ 6a+c=3 \end{array}\right| \begin{array}{c} ④ \\ ⑤ \end{array} \quad \Rightarrow \quad ⑤ - ④: \quad 5a=5 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a=1}$$

$$\Rightarrow \quad \text{in } ④: \quad 1+c=-2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{c=-3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x)=x^4-x^3-3x^2+1}}$$

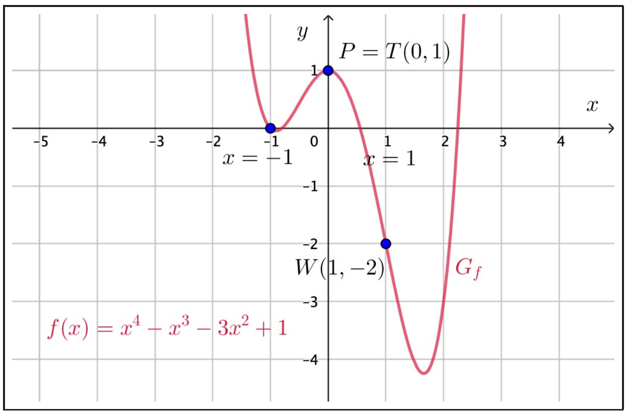


Abbildung 5.2: Auch im zweiten Beispiel erfüllt der G_f die geforderten Bedingungen.

Kapitel 6

Ableitungen weiterer Funktionen

6.1 Ein Katalog weiterer Funktionsableitungen

Bisher haben wir uns in der Differentialrechnung vor allem für Polynome interessiert. Dabei haben wir gelernt, wie man Nullstellen, Maxima, Minima, Sattelpunkte, Wendepunkte und Tangenten an eine Funktion bestimmt. Unter anderem mussten wir dafür die Bedeutungen von 1. und 2. Ableitung kennen und dieses Wissen konsequent anwenden.

Diese ganzen analytische Untersuchungen lassen sich aber nicht nur auf Polynome, sondern auf alle Arten von Funktionen anwenden. Allerdings kennen wir die Ableitungen der verschiedenen Funktionstypen noch nicht. Bei Potenzfunktionen haben wir gelernt, dass $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$. Nun benötigen wir auch Ableitungsvorschriften für $\sin x$, a^x, $\ln x$, etc. Hier folgt ein Katalog der für uns relevanten Ableitungen. In den nachfolgenden Abschnitten werden einige davon näher diskutiert.

Die folgenden Ableitungen wollen wir stets auswendig präsent haben![1]

Potenzfunktion:	$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$
Kehrwertfunktion:	$\left[\frac{1}{x}\right]' = -\frac{1}{x^2}$
Wurzelfunktion:	$\left[\sqrt{x}\,\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Exponentialfunktion zur Basis e:	$[e^x]' = e^x$
Allgemeine Exponentialfunktion:	$[a^x]' = a^x \cdot \ln a$
Logartihmus naturalis:	$[\ln x]' = \frac{1}{x}$
Allgemeine Logarithmusfunktion:	$[\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
Sinusfunktion:	$[\sin x]' = \cos x$
Cosinusfunktion:	$[\cos x]' = -\sin x$
Tangensfunktion:	$[\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Im Prinzip müssten wir diese neuen Ableitungen mit der Ableitungsdefinition (1.4) herleiten. Diese Herleitungen erfordern da und dort allerdings Kenntnisse, die wir noch nicht besitzen. Deshalb soll es an dieser Stelle nur darum gehen, diese neuen Ableitungen kennenzulernen und anzuwenden.

[1] Bei den Logarithmen verzichten wir ab diesem Moment auf die Klammern, ausser sie sind notwendig zur Verhinderung eines Verständnisfehlers. Wir schreiben nun also $\log_a x$ anstatt $\log_a(x)$, weil ja klar ist, was gemeint ist.

6.2 Zu den Ableitungen von Bruch- und Wurzelfunktionen

Wir hatten bereits am Ende von Kapitel 2 festgehalten, dass sich Brüche und Wurzeln auch als Potenzen von x schreiben lassen. Die Potenzregel $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$ erlaubt uns daher auch **Bruch-** und **Wurzelfunktionen** abzuleiten, so z.B.:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} && \Rightarrow && f'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
g(x) &= \frac{1}{x^2} = x^{-2} && \Rightarrow && g'(x) = (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \\
h(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} && \Rightarrow && h'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
i(x) &= x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} && \Rightarrow && i'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \\
j(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} && \Rightarrow && j'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \\
k(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} && \Rightarrow && k'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}
\end{aligned}
$$

Im Prinzip können wir also jede beliebige Bruch- oder Wurzelfunktion mittels Potenzregel ableiten. Dass $[\frac{1}{x}]' = -\frac{1}{x^2}$ und $[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sind, wollen wir uns aber dennoch auswendig merken! Diese beiden Ableitungen kommen dermassen häufig vor, dass wir uns die Geschichte nicht jedesmal neu überlegen wollen.

6.3 Zur Ableitung von Exponentialfunktionen

Die **Exponentialfunktion** a^x hat die Ableitung $[a^x]' = a^x \cdot \ln a$ mit dem Spezialfall $[e^x]' = e^x$. Dabei ist a eine positive, reelle Basis, $a \in \mathbb{R}^+$ und e steht für die **Euler'sche Zahl** ($e \approx 2.718$).

Die Exponentialfunktion a^x hat offenbar die Eigenschaft, dass ihre Ableitung bis auf den zusätzlichen Faktor $\ln a$ wieder a^x selber ist: $[a^x]' = a^x \cdot \ln a$.

Zur Erinnerung: $\ln a$ steht für den **Logarithmus naturalis** von a. Der $\ln a$ ist der Logarithmus zur Basis e von a und somit die Antwort auf die Frage: "e hoch wie viel ergibt a?". $x = \ln a$ ist also die Lösung der zugehörigen Exponentialgleichung $e^x = a$:

$$e^x = a \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \log_e a =: \ln a$$

Da $\ln e = 1$ ist ("e hoch wie viel ergibt e?"), ist die Ableitung von e^x immer noch gleich e^x. Die Funktion e^x bleibt somit beim Ableiten unverändert. Das ist ziemlich bemerkenswert! Es bedeutet, dass der Funktionswert e^x an jeder Stelle x auch gerade angibt, wie steil der Funktionsgraph über dieser Stelle x verläuft (vgl. Abb. 6.1).

Hier erhalten wir ein weiteres Mal eine Ahnung, weshalb der Euler'schen Zahl e in der Mathematik eine besondere Bedeutung zukommt.

Achtung! Exponentialfunktionen a^x heissen so, weil die Variable x im Exponenten steht. Gerade beim Ableiten wird das aber gerne vergessen resp. übersehen, weil eine Exponentialfunktion a^x ja auch wie eine Potenz aussieht. So habe ich als Mathematiklehrer leider allzu oft Ableitungen wie $[5^x]' = x \cdot 5^{x-1}$ gesehen. Das ist grundlegend falsch, weil 5^x eben eine Exponential- und nicht etwa eine Potenzfunktion ist.

Gewöhnen wir uns also an, die Funktion im Geiste immer rasch mit dem richtigen Namen zu versehen, dann sollte es gut gehen.

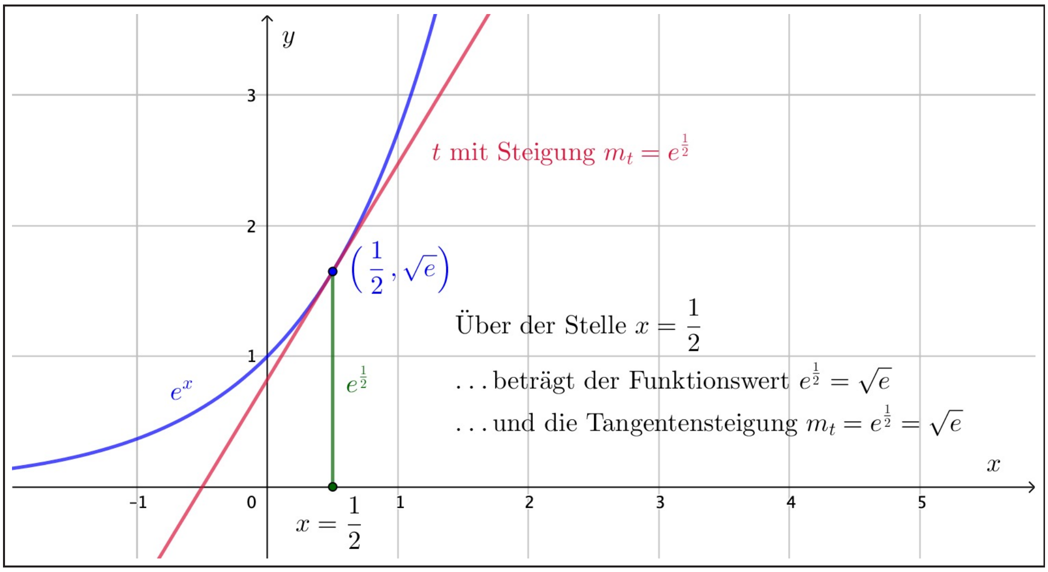


Abbildung 6.1: Die Spezialität der Exponentialfunktion e^x: Die Ableitung ist gleich der Funktion selber. D.h., über jeder Stelle x ist der Funktionswert genau gleich gross wie die Tangentensteigung.

6.4 Zur Ableitung der Logarithmusfunktion

$\log_a x$ bezeichnet den Logarithmus zur Basis a von x. Er ist, wie im vorigen Abschnitt bereits erläutert, per Definition die Antwort auf die Frage "a hoch wie viel ergibt x?" Folglich lassen sich Logarithmen nur auf positive Stellen x anwenden ($x \in \mathbb{R}^+$), denn auf die Frage "5 hoch wie viel ergibt -3?" gibt es beispielsweise keine sinnvolle Antwort.

Offenbar ist die Ableitung $[\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ proportional zum Kehrwert $\frac{1}{x}$. Sie nimmt also für grösser werdendes x ab. Das können wir anhand von Abb. 6.2 gut nachvollziehen, wo als Beispiel $\log_2 x$ gezeigt wird: Über einer Stelle x verläuft der Logarithmusgraph umso flacher, je grösser x wird. Die Tangentensteigung wird mit zunehmendem x geringer. Umgekehrt schmiegt sich der Graph für $x \to 0$ an die y-Achse an, sodass die Ableitung ins Unendliche geht.

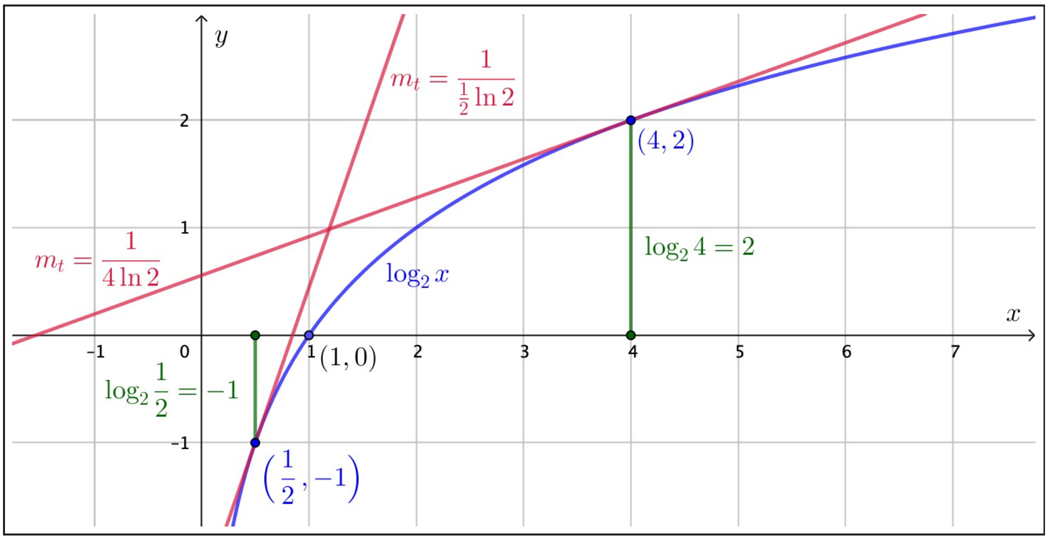


Abbildung 6.2: Der Graph von $\log_2 x$: Wie die Graphen aller Logarithmen wird er für $x \to 0$ unendlich steil und für $x \to \infty$ immer flacher.

Auch bei der Ableitung des Logarithmus nimmt die Basis e resp. der **Logarithmus naturalis** $\ln x := \log_e x$ eine Sonderstellung ein. Der Faktor $\ln a$ im Nenner der Ableitung verschwindet, weil $\ln e = 1$ ist. Deshalb gilt: $[\ln x]' = \frac{1}{x}$.

Anmerkung: Wie wir nun gesehen resp. wieder in Erinnerung gerufen bekommen haben, sind die Graphen von Exponentialfunktionen a^x und Logarithmusfunktionen $\log_a x$ nirgendwo horizontal – sie werden zwar immer flacher, aber die Steigung erreicht nirgendwo den Wert 0. Demzufolge besitzen die zugehörigen Ableitungsfunktionen $a^x \cdot \ln a$ und $\frac{1}{x \cdot \ln a}$ keine Nullstellen!

6.5 Zur Ableitung der Sinus- und der Cosinusfunktion

Bogenmass! Um mit den trigonometrischen Funktionen wirklich sinnvoll Differentialrechnung zu betreiben, sind wir auf das **Bogenmass** angewiesen. Damit sind Winkelfunktionen, wie alle anderen von uns betrachteten Funktionen auch, Abbildungen von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Wir setzen eine reelle Zahl in die Funktionen ein – und nicht etwa ein Winkel im Gradmass – und erhalten als Funktionswerte auch wieder eine reelle Zahl.

Herleitungen der Ableitungen von Sinus- und Cosinusfunktion

Die **Additionstheoreme** für die Sinus- und die Cosinusfunktion lauten:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \text{und} \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Dank dieser Additionstheoreme sind wir in der Lage, die Ableitungen von $\sin x$ und $\cos x$ aus der Ableitungsdefinition 1.4 herzuleiten. Hier zunächst die Herleitung der Ableitung von $\sin x$:

$$\begin{aligned}
[\sin x]' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} = \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}
\end{aligned}$$

Nun geht $\cos h$ für $h \to 0$ so rasch gegen 1 (vgl. Graph der Cosinusfunktion), dass die Differenz $\cos h - 1$ viel stärker gegen Null geht als h selber. Daraus folgt: $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$. Der erste der beiden Grenzwerte oben ergibt also 0.

Weiter gilt für $h \to 0$ im Bogenmass, dass $\sin h$ und h selber immer mehr zusammenfallen, also denselben Wert haben. Das bedeutet: $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. Somit folgt für die Ableitung der Sinusfunktion insgesamt:

$$[\sin x]' = \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \underline{\cos x}$$

Die Ableitung der Sinusfunktion ist also gerade die Cosinusfunktion.

Für die Ableitung der Cosinusfunktion ergibt sich in ähnlicher Weise:

$$\begin{aligned}
[\cos x]' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} = \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = \underline{-\sin x}
\end{aligned}$$

Sinus- und Cosinusfunktion gehen beim Ableiten also ineinander über – bei der Ableitung von $\cos x$ allerdings mit einem negativen Vorzeichen.

Betrachtung der Graphen bei der Ableitung der Sinusfunktion

An jeder Stelle x ist die Steigung von $\sin x$ gegeben durch $\cos x$. In Abb. 6.3 sind die Graphen von Sinus und Cosinus untereinander dargestellt und wir sehen, dass das grafische Ableiten bestens funktioniert und aus der Sinusfunktion eben eine Cosinusfunktion zu folgen hat.

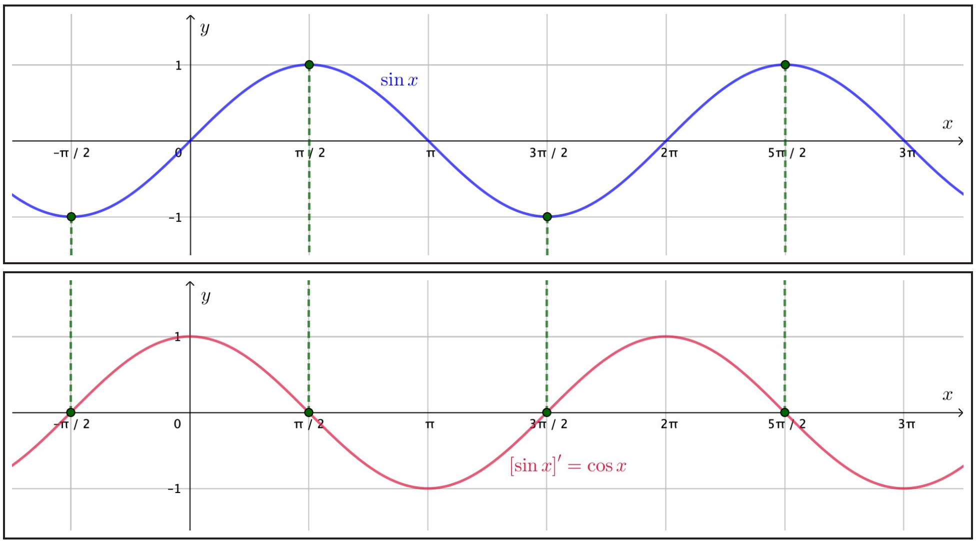


Abbildung 6.3: Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Cosinusfunktion. Die Horizontalstellen der Sinusfunktion ergeben die Nullstellen der Cosinusfunktion und beim Durchgang durch die x-Achse (Wendepunkte!) wird jeweils die maximale Steigung 1 resp. -1 erreicht.

6.6 Die Ableitung der Tangensfunktion

Bei der Tangensfunktion wollen wir uns lediglich anhand Abb. 6.4 plausibel machen, dass die Ableitung durch $[\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ gegeben ist. Auf eine Herleitung verzichten wir an dieser Stelle. Immer bei den Polstellen verschwinden die Ableitungen ins positiv Unendliche. Der minimale Steigungsbetrag 1 liegt jeweils beim Durchgang durch die x-Achse vor, wo ein Wendepunkt vorliegt.

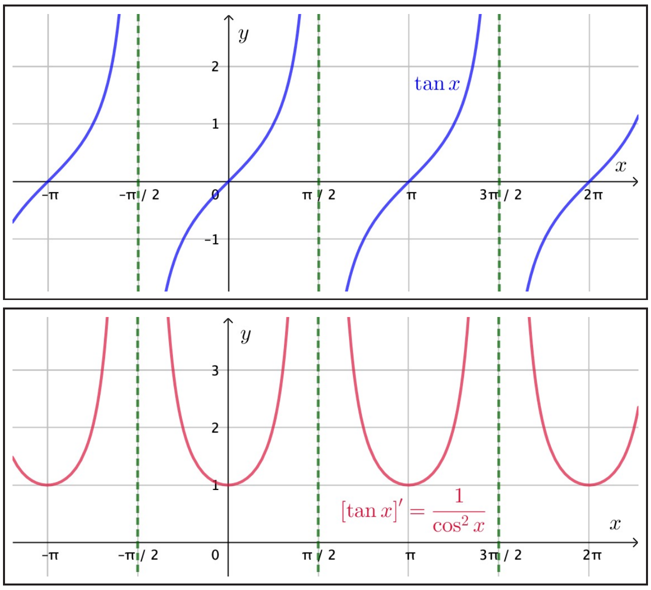


Abbildung 6.4: Die grafische Ableitung von $\tan x$.

Kapitel 7

Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Bisher haben wir uns darauf beschränkt Funktionen via Addition oder Subtraktion miteinander zu verbinden. Genauso gut können wir Funktionen aber auch miteinander **multiplizieren**, eine Funktion durch eine andere **teilen** oder sie ineinander **verschachteln** resp. sie miteinander **verketten**.

Hier drei Beispiele mit den beiden Funktionen $u(x) = \sin x$ und $v(x) = \frac{1}{6}\,x^2$:

Multiplikation (Produkt):	$f(x) = u(x) \cdot v(x) = \sin x \cdot \dfrac{1}{6}\,x^2$
Division (Quotient):	$g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\sin x}{\frac{1}{6}\,x^2}$
Verschachtelung/Verkettung:	$h(x) = u\big(v(x)\big) = \sin\left(\dfrac{1}{6}\,x^2\right)$

Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ zeigen neue Eigenschaften, die sicherlich mit den Eigenschaften von $u(x)$ und $v(x)$ zusammenhängen. Selbstverständlich wollen wir auch $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ unter Verwendung der Ableitung analysieren können. Dazu benötigen wir Regeln, die erläutern, wie die Ableitung eines Funktionenprodukts $f(x)$, eines Funktionenquotienten $g(x)$ oder einer Funktionenverkettung $h(x)$ auf die Ableitungen der darin enthaltenen Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ zurückgeführt werden kann. Diese drei Regeln heissen sinngemäss **Produkt**-, **Quotienten**- und **Kettenregel**. Wir werden sie in den folgenden drei Abschnitten kennen- und anwenden lernen.

7.1 Die Produktregel

Zunächst stelle ich die Regel zur Ableitung eines Produktes zweier Funktionen vor:

Die Produktregel zur Ableitung miteinander multiplizierter Funktionen

Es sei $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Dabei seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei ableitbare Funktionen.

Dann gilt für die Ableitung der Funktion $f(x)$:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Diesen Zusammenhang bezeichnen wir als die **Produktregel**.

Anmerkungen zur Produktregel

Herleitungen?! Im Prinzip müssten wir diese Produktregel, wie nachher auch die Quotienten und die Kettenregel mit Hilfe der Ableitungsdefinition (1.4) beweisen. Das ist zwar nicht so besonders kompliziert, trägt im Moment aber kaum etwas zu unserem tieferen Verständnis bei. Deshalb verzichten wir an dieser Stelle auf diese Herleitungen.[1]

Symmetrie: Es sollte nicht verwundern, dass die Produktregel symmetrisch bezüglich der beiden Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ist. Die Multiplikation ist ja eine kommutative, also eine vertauschbare Operation: $f(x) = u(x) \cdot v(x) = v(x) \cdot u(x)$ (für alle Werte von x).

Beide Teilfunktionen müssen somit in $f'(x)$ in gleicher Weise vorkommen. Das trifft zu, denn es ist: $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = v'(x) \cdot u(x) + v(x) \cdot u'(x)$.

Beispiel: Zur Veranschaulichung der Produktregel betrachten wir $f(x) = \sin x \cdot \frac{1}{6}\,x^2$.

Die Ableitungen der Teilfunktion $u(x) = \sin x$ und $v(x) = \frac{1}{6}\,x^2$ lauten $u'(x) = \cos x$ und $v'(x) = \frac{1}{3}\,x$. Somit folgt für die Ableitung von $f(x)$ gemäss Produktregel:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = \cos x \cdot \frac{1}{6}\,x^2 + \sin x \cdot \frac{1}{3}\,x = \frac{1}{6}\,x\,(x \cos x + 2 \sin x)$$

7.2 Die Quotientenregel

Auch hier starten wir mit der Deklaration der neuen Regel:

Die Quotientenregel zur Ableitung eines Bruchs zweier Funktionen

Es sei $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Dabei seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei ableitbare Funktionen.

Dann gilt für die Ableitung der Funktion $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Diesen Zusammenhang merken wir uns unter dem Namen **Quotientenregel**.

Anmerkungen zur Quotientenregel

Keine Symmetrie! Die Quotientenregel ist nicht symmetrisch bezüglich $u(x)$ und $v(x)$. Schiesslich ist die Division nicht kommutativ: $\frac{3}{5} \neq \frac{5}{3}$, also: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \neq \frac{v(x)}{u(x)}$ (für praktisch alle x).

Beispiel: Auch hier betrachten wir das Beispiel vom Anfang des Kapitels: $g(x) = \frac{\sin x}{\frac{1}{6}\,x^2}$.

Nach wie vor sind $u(x) = \sin x$ mit $u'(x) = \cos x$ und $v(x) = \frac{1}{6}\,x^2$ mit $v'(x) = \frac{1}{3}\,x$. Gemäss Quotientenregel erhalten wir für die Ableitung:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} = \frac{\cos x \cdot \frac{1}{6}\,x^2 - \sin x \cdot \frac{1}{3}\,x}{\left(\frac{1}{6}\,x^2\right)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{6}\,x\,(x \cos x - 2 \sin x)}{\frac{1}{36}\,x^4} = \frac{6\,(x \cos x - 2 \sin x)}{x^3} \end{aligned}$$

Beachte! Unter $v^2(x)$ verstehen wir stets $v^2(x) := \big(v(x)\big)^2$. Im Beispiel: $\sin^2 x \equiv (\sin x)^2$.

[1] Wir machen aus diesen Herleitungen eine Übungsaufgabe.

7.3 Die Kettenregel

Die Kettenregel zur Ableitung zweier ineinander verschachtelter Funktionen

Es sei $f(x) = u\big(v(x)\big)$. Dabei seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei ableitbare Funktionen.

Dann gilt für die Ableitung der Funktion $f(x)$:

$$f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$$

*Dies ist die **Kettenregel** für die Ableitung zweier miteinander verknüpfter Funktionen.*

Anmerkungen zur Kettenregel

Äussere und innere Funktion resp. Ableitung: In der Funktionsdefinition $f(x) = u\big(v(x)\big)$ wird die Funktion $v(x)$ in die Funktion $u(v)$ eingesetzt. Deshalb bezeichnet man die Funktion $v(x)$ als **innere** und die Funktion $u(v)$ als **äussere Funktion** von $f(x)$.

Als Folge davon sprechen wir auch von der **inneren Ableitung** $v'(x)$ und von der **äusseren Ableitung** $u'(v)$. Die Kettenregel lässt sich mit diesen Ausdrücken simpel in Worte fassen:

Die Ableitung einer verschachtelten Funktionen ist das Produkt aus äusserer und innerer Ableitung.

Beispiele: Die Kettenregel ist in ihrer Anwendung erfahrungsgemäss etwas gewöhnungsbedürftig. Nach einigen Beispielen weiss man aber, "wie's geht". Deshalb hier gleich drei Beispiele:

1. Zunächst das Einführungsbeispiel vom Kapitelanfang: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{6}\,x^2\right)$. Darin sind:

   Äussere Funktion: $u(v) = \sin v$ mit $u'(v) = \cos v$

   Innere Funktion: $v(x) = \dfrac{1}{6}\,x^2$ mit $v'(x) = \dfrac{1}{3}\,x$

   $$\Rightarrow \quad f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x) = \cos v(x) \cdot \frac{1}{3}\,x = \frac{1}{3}\,x \cdot \cos\left(\frac{1}{6}\,x^2\right)$$

2. Betrachten wir nun $f(x) = e^{-x^2}$:

   Äussere Funktion: $u(v) = e^v$ mit $u'(v) = e^v$

   Innere Funktion: $v(x) = -x^2$ mit $v'(x) = -2x$

   $$\Rightarrow \quad f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x) = e^{v(x)} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

3. Und schliesslich als drittes Beispiel: $f(x) = \ln(x^4)$:

   Äussere Funktion: $u(v) = \ln v$ mit $u'(v) = \dfrac{1}{v}$

   Innere Funktion: $v(x) = x^4$ mit $v'(x) = 4x^3$

   $$\Rightarrow \quad f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot 4x^3 = \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3 = \frac{4}{x}$$

Bei diesem letzten Beispiel hätten wir die Ableitung auch ohne Kettenregel finden können. Man könnte nämlich vor dem Ableiten das 3. Logarithmengesetz anwenden:

$$f(x) = \ln\left(x^4\right) = 4\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4}{x}$$

Dieses Beispiel zeigt uns somit auch gerade, dass geschicktes algebraisches Umformen unter Umständen das Ableiten wesentlich vereinfachen kann.

7.4 Die drei neuen Ableitungsregeln im Überblick

Produktregel

Ist die Funktion $f(x)$ das **Produkt** *der beiden ableitbaren Funktionen $u(x)$ und $v(x)$, so folgt:*

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \tag{7.1}$$

Quotientenregel

Ist die Funktion $f(x)$ der **Quotient** *der beiden ableitbaren Funktionen $u(x)$ und $v(x)$, so folgt:*

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \tag{7.2}$$

Kettenregel

Ist die Funktion $f(x)$ die **Verkettung** *der beiden differenzierbaren Funktionen $u(v)$ und $v(x)$, so folgt:*

$$f(x) = u\big(v(x)\big) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x) \tag{7.3}$$

Mit diesen zusätzlichen Ableitungsregeln sind wir nun in der Lage fast beliebige, im Prinzip noch so komplizierte Funktionen abzuleiten und damit der Analyse mittels Differentialrechnung zugänglich zu machen.

Die weiteren Kapitel werden sich genau damit auseinandersetzen, denn natürlich braucht es noch ein paar weitere Informationen und vor allem einige Übung, bis wir die Anwendung aller Regeln hinreichend beherrschen.

Kapitel 8

Optimierungsaufgaben

Mittels Differentialrechnung sind wir in der Lage die Extremwerte einer Funktion $f(x)$ aufzuspüren. Bei Maximal- oder Minimalstellen von $f(x)$ muss die 1. Ableitung verschwinden: $f'(x) = 0$. Diese Möglichkeit wollen wir in diesem Kapitel gezielt dazu nutzen sogenannte **Optimierungsaufgaben** zu lösen. Hier ein klassisches Beispiel:

"Ein Zylinder mit Höhe h und Radius r hat eine bestimmte Oberfläche A.
Für welches Verhältnis $h : r$ ist das Zylindervolumen maximal?"

Im Folgenden wird zuerst das Rezept vorgestellt, mit dem sich solche Fragen strukturiert beantworten lassen. Danach werden vier Beispiele bearbeitet, um das Rezept in der Anwendung zu sehen und den einen oder anderen "Kniff" dazu zu geben. Obige Frage entspricht dem letzten Beispiel.

8.1 Das Lösungsrezept für Optimierungsaufgaben

Optimierungsaufgaben haben in der Regel immer dieselbe Struktur und lassen sich daher auch fast immer auf dieselbe Art lösen. Hier das Rezept:

Rezept für Optimierungsaufgaben (= Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen)

Schritt 1: **Aufstellen der Zielfunktion**

Die zu optimierende Grösse wird als Funktion f einer oder mehrerer Variablen x, y, etc. angesetzt $\rightarrow$ **Zielfunktion**.

Bsp.: $f = f(x,y)$ bei zwei Variablen x und y.

Schritt 2: **Einbezug der Nebenbedindung(en)**

Falls die Zielfunktion von mehreren Variablen abhängt, müssen zusätzliche Gleichungen ($\rightarrow$ **Nebenbedingungen***) dafür sorgen, dass sie nur noch von einer einzigen Variable abhängt.*

Im Bsp.: Nebenbedingung $\quad y = y(x) \quad \Rightarrow \quad f(x,y)$ wird zu $f(x)$

Schritt 3: **Bestimmung der Extremalstelle durch Ableiten**

Durch Nullsetzen der 1. Ableitung $f'(x)$ der Zielfunktion $f(x)$ lässt sich ihre **Extremalstelle** *$x_{\max}$ bestimmen.*

Allgemein: $\quad f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{\max}$

Bemerkung: Praktisch dasselbe Rezept zu Optimierungsaufgaben hatten wir bereits bei den quadratischen Funktionen kennengelernt. Nur waren wir damals im Schritt 3 eben auf quadratische Funktionen beschränkt. Neuerdings können im Prinzip beliebige Funktionen optimiert werden.

8.2 Beispiel 1: Flächenoptimierung im Koordinatensystem

Vorgabe: Es sei $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x-2)^2$.

Der G_f durchsticht die x-Achse im Ursprung und berührt sie bei $x = 2$ (vgl. Abb. 8.1).

Fragestellung: *Wie muss $x \in \,]0;2[$ gewählt werden, damit die Fläche des in Abb. 8.1 eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks maximal wird? Wie gross ist diese maximale Fläche?*

Anmerkung: In dieser Aufgabe ist klar, dass für x nur Werte im Intervall $]0;2[$ erlaubt sind. In anderen Aufgaben muss man sich allenfalls selber überlegen, in welchem Bereich die Variable, mit der optimiert wird, liegen darf. Wir bezeichnen diesen Bereich dann jeweils als **Attraktivitätsintervall**.

Schritt 1 – Zielfunktion in mehreren Variablen: Die Fläche A des grünen Dreiecks in Abb. 8.1 ist zunächst gegeben durch:

$$A(x,h) = \frac{x \cdot h}{2}$$

Schritt 2 – Nebenbedingung einbauen: Die Höhe h des Dreiecks entspricht dem Funktionswert an der Stelle x. Es gilt also: $h = h(x) = f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$. Damit wird aus der Flächenfunktion $A(x,h)$ eine Funktion $A(x)$, die nur noch von der Variable x abhängt:

$$A(x) = \frac{x \cdot h(x)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right)$$

Schritt 3 – Nullsetzen der 1. Ableitung: Die Flächenfunktion $A(x)$ soll maximiert werden. Daher leiten wir sie ab und setzen die Ableitung gleich 0:

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(4x^3 - 12x^2 + 8x\right) = 2x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) = 2x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \overset{!}{=} 0$$

Die Lösungen lauten $x = 0, 1, 2$. Davon liegt aber nur $x = 1$ im Attraktivitätsintervall $]0;2[$. Unsere (einzige) Lösung lautet also $\underline{\underline{x_{\max} = 1}}$!

Finish resp. Flächenberechnung: Die Aufgabenstellung fragt zusätzlich nach dem Wert der maximalen Fläche. Hierfür setzen wir $x_{\max}$ in die Flächenfunktion $A(x)$ ein:

$$A(x_{\max}) = A(1) = \frac{1}{2} \cdot (1 - 4 + 4) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

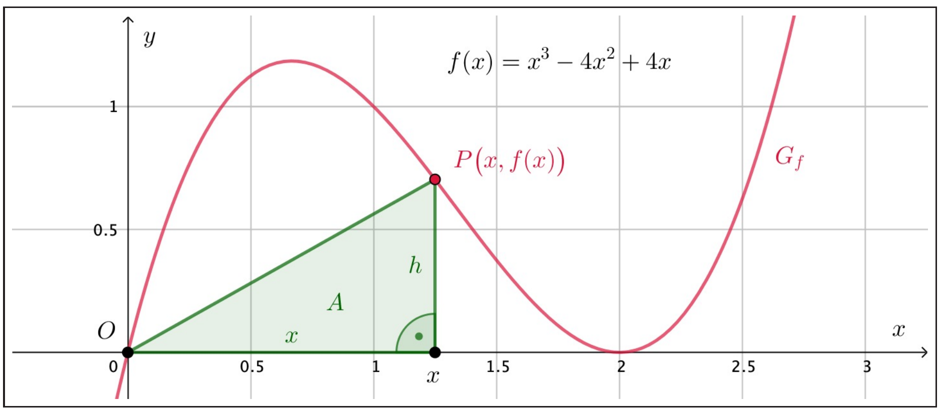


Abbildung 8.1: Maximierung einer Dreiecksfläche unter einem Funktionsgraphen.

8.3 Beispiel 2: Der Kreiskegel in der Kugel

Vorgabe: Einer Kugel mit Radius R werde ein Kreiskegel einbeschrieben.

Diese Vorgabe braucht an sich vielleicht schon etwas Erläuterung: Ein **Kreiskegel** ist ein Körper mit einer kreisförmigen Grundfläche, der genau über deren Mittelpunkt in einer Spitze zusammenläuft. Wird ein solcher Kreiskegel einer Kugel **einbeschrieben**, so berührt der gesamte Rand seines Grundflächenkreises die Kugeloberfläche und auch seine Spitze ist ein Punkt auf dieser. Abb. 8.2 zeigt die Situation in einer 3D-Ansicht links und einem Querschnitt rechts.

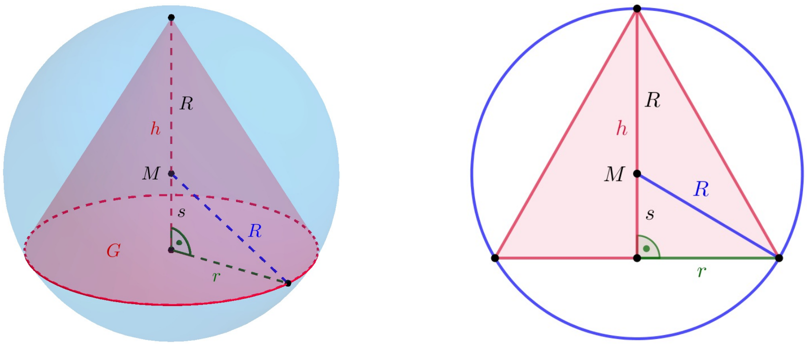


Abbildung 8.2: Der Kugel soll ein Kreiskegel mit maximalem Volumen einbeschrieben werden.

Fragestellung: *Wie muss die Höhe h des Kreiskegels gewählt werden, sodass dessen Volumen maximal wird? Gib das Resultat in Abhängigkeit des Kugelradius' R an.*

Volumina von spitz zulaufenden Körpern über einer Grundfläche: Zunächst sei hier die Volumenformel für einen Kreiskegel mit Grundfläche G und Höhe h gegeben:

$$\textbf{Volumen eines spitz zulaufenden Körpers:} \qquad V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \tag{8.1}$$

Tatsächlich gilt diese Formel für alle spitz zusammenlaufenden Körper über einer Grundfläche. Deren Form spielt dabei keine Rolle. Wichtig ist nur, dass die **Mantelfläche** des Körpers aus allen geraden Verbindungen vom Rand der Grundfläche zur Spitze besteht. Abb. 8.3 zeigt ein paar solche Körper.

Derartige spitz zulaufende Körper kommen in Zukunft so häufig vor, dass wir uns Formel (8.1) auswendig merken wollen![1]

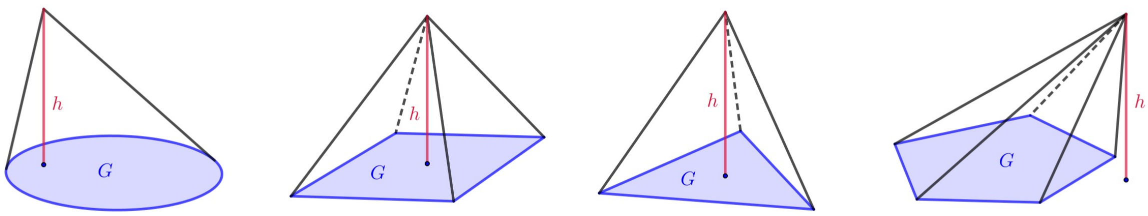


Abbildung 8.3: Spitz zulaufende Körper mit Grundfläche. Für alle diese Körper gilt: $V = \frac{1}{3} G\, h$.

Schritt 1 – Zielfunktion in mehreren Variablen: Mit Gleichung (8.1) haben wir bereits die von mehreren Variablen abhängige Zielfunktion vor uns, nämlich das Kegelvolumen:

$$V(G, h) = \frac{G \cdot h}{3} \tag{8.2}$$

[1]Zu gegebener Zeit, nämlich beim Thema Integralrechnung, werden wir Formel (8.1) auch noch beweisen!

Schritt 2 – Nebenbedingung einbauen: Die Höhe h ist die Variable, mit der optimiert werden soll. Die Nebenbedingung muss uns erlauben, auch die Grundfläche G durch die Höhe h auszudrücken. Um dies zu erreichen, nutzen wir aus, dass der Rand der Grundfläche auf der Kugeloberfläche liegt. Das ist die eigentliche Nebenbedingung.

Nun ist vor allem der Querschnitt in Abb. 8.2 rechts hilfreich. Darin gilt es den Grundflächenradius r durch den Kugelradius R und die Höhe h auszudrücken.

Zunächst gilt im kleinen rechtwinkligen Dreieck rechts:

$$R^2 = s^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = R^2 - s^2$$

Dabei ist $s = h - R$, sodass wir für r^2 folgern:

$$r^2 = R^2 - s^2 = R^2 - (h-R)^2 = R^2 - \left(h^2 - 2hR + R^2\right) = 2hR - h^2$$

Wir brauchen nicht die Wurzel zu ziehen, um r zu erhalten, denn schliesslich möchten wir ja die Grundfläche angeben – und in deren Berechnung tritt ja wieder r^2 auf:

$$G(h) = \pi\, r^2 = \pi \cdot \left(2hR - h^2\right)$$

Diesen Ausdruck setzen wir in unsere Zielfunktion (8.2) ein, womit diese nur noch von der Variable h abhängt (der Kugelradius R sei ja fix vorgegeben):

$$V(h) = \frac{G(h)\cdot h}{3} = \frac{\pi\cdot\left(2hR - h^2\right)\cdot h}{3} = \frac{\pi}{3}\cdot\left(2h^2R - h^3\right) \tag{8.3}$$

Schritt 3 – Nullsetzen der 1. Ableitung: Die Volumenfunktion $V(h)$ soll maximiert werden. Daraus folgt:

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}\cdot\left(4hR - 3h^2\right) = \frac{\pi}{3}\cdot h\cdot(4R - 3h) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0 \quad \text{oder} \quad h = \frac{4}{3}R$$

Attraktivitätsintervall: Soll der Kreiskegel in der Kugel enthalten sein, so gilt für seine Höhe: $h \in \,]0; 2R[$. Die Höhe $h = 0$ kommt sicher nicht in Frage! Somit ist $\underline{\underline{h_{\max} = \frac{4}{3}R}}$ unser Resultat.

In Abb. 8.2 entspricht dies einem Kreiskegel, bei dem die Strecke s ein Drittel des Kugelradius R lang ist ($s = h - R = \frac{4}{3}R - R = \frac{1}{3}R$).

Zusatzaufgabe: Wir können uns spasseshalber noch kurz fragen, welchen prozentualen Anteil des Kugelvolumens das maximale Kegelvolumen ausmacht.

Dazu setzen wir unser Resultat in die Volumenfunktion (8.3) ein:

$$V(h_{\max}) = V\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\cdot\left(2\left(\frac{4R}{3}\right)^2\cdot R - \left(\frac{4R}{3}\right)^3\right) = \frac{\pi R^3}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\left(2 - \frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi R^3}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}\cdot\frac{8}{27} = \frac{8}{27}\cdot V_{\text{Kugel}}$$

Dabei habe ich verwendet, dass $V_{\text{Kugel}} = \frac{4\pi}{3}R^3$. Diese Formel für das Kugelvolumen kommt derart häufig vor, dass wir sie ab sofort auswendig präsent haben sollten!

Der maximale Kreiskegel macht also $\frac{8}{27} \approx 0.296 \approx 30\,\%$ des Kugelvolumens aus.

8.4 Beispiel 3: Abstandsminimierung

Vorgabe: Es sei $f(x) = \frac{2}{x^2}$.

Fragestellung: *Wie nahe kommt der Graph G_f dem Ursprung?*

Abb. 8.4 verdeutlicht diese Fragestellung. Der G_f nähert sich dem Ursprung bis auf etwas weniger als eine Distanz von 2 an. Es gilt denjenigen Punkt P zu finden, für den der Abstand minimal wird. Der Graph ist wegen dem Quadrat achsensymmetrisch, sodass es denselben nächsten Punkt auch links des Ursprungs geben wird.

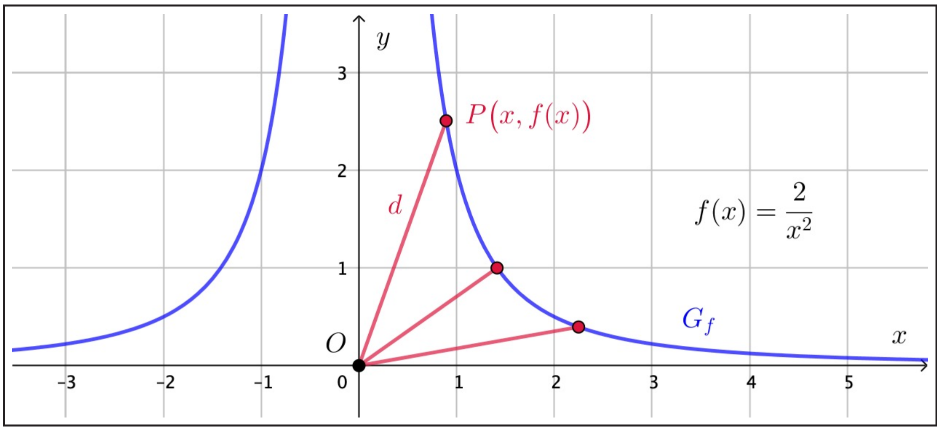


Abbildung 8.4: Minimierung des Abstands zum Ursprung.

Schritt 1 – Zielfunktion in mehreren Variablen: Der Abstand d eines Punktes $P(x, y)$ zum Ursprung O ist nach Pythagoras gegeben durch:

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{8.4}$$

Schritt 2 – Nebenbedingung einbauen: Die y-Koordinate eines Punktes auf dem Funktionsgraphen G_f entspricht stets dem Funktionswert der x-Koordinate. Es gilt also: $y = f(x) = \frac{2}{x^2}$. Damit können wir den Abstand in alleiniger Abhängigkeit von x ausdrücken:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \big(f(x)\big)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{2}{x^2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^4}} \tag{8.5}$$

Nun sind wir im Prinzip bereit für die Ableitung in Schritt 3, aber es empfiehlt sich hier kurz innezuhalten und zu bemerken, dass man sich diese Ableitung wesentlich vereinfachen kann.

"Kniff"! Wir suchen nach dem Minimum des Abstandes $d(x)$. Nun ist dieser Abstand eine positive Funktion, d.h. $d \geq 0$ für alle x. An der Stelle x, wo $d(x)$ minimal ist, wird somit auch $(d(x))^2$ minimal sein. Bei einer positiven Funktion können wir die Bestimmung der Extremstellen also ebenso gut mit dem Quadrat der Funktion vornehmen.

Das ist in unserem Beispiel sehr praktisch, denn die äusserste Funktion in $d(x)$ ist eine Wurzel, die beim Quadrieren wegfällt:

$$q(x) = \big(d(x)\big)^2 = x^2 + \frac{4}{x^4} \tag{8.6}$$

Schritt 3 – Nullsetzen der 1. Ableitung: Wir setzen die 1. Ableitung von $q(x)$ gleich 0:

$$q'(x) = 2x - \frac{16}{x^5} = 2 \cdot \left(x - \frac{8}{x^5}\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x^6 - 8 = 0$$

$x^6 - 8$ lässt sich mittels 3. binomischer Formel und anschliessender Anwendung der Kubenformeln ($a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$) faktorisieren:

$$\begin{aligned} x^6 - 8 &= \left(x^3 + \sqrt{8}\right) \cdot \left(x^3 - \sqrt{8}\right) = \left(x^3 + \sqrt{2}^{\,3}\right) \cdot \left(x^3 - \sqrt{2}^{\,3}\right) \\ &= \left(x + \sqrt{2}\right) \cdot \left(x^2 - \sqrt{2}\,x + 2\right) \cdot \left(x - \sqrt{2}\right) \cdot \left(x^2 + \sqrt{2}\,x + 2\right) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Die beiden grösseren Klammern haben keine Nullstellen ($D < 0$), aber aus den beiden anderen ergeben sich die Lösungen $x_{\text{min}} = \pm\sqrt{2}$. Das entspricht genau unserer Erwartung: Es gibt links und rechts der y-Achse einen Punkt mit demselben minimalen Abstand zum Ursprung.

Finish resp. Abstandsbestimmung: Die Aufgabenstellung fragt nach dem minimalen Abstand. Zu dessen Berechnung setzen wir x_{min} in die Abstandsfunktion $d(x)$ ein (vgl. (8.5)):

$$d(x_{\text{min}}) = d\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{\sqrt{2}^{\,2} + \frac{4}{\sqrt{2}^{\,4}}} = \sqrt{2 + \frac{4}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{3}}} \approx 1.732$$

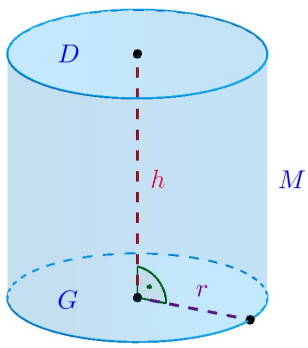
8.5 Beispiel 4: Maximales Zylindervolumen

Vorgabe: Die Oberfläche eines Zylinders habe eine bestimmte Grösse A.

Die Zylinderhöhe wollen wir mit h, den Radius seiner Grundfläche mit r bezeichnen.

Fragestellung: *Für welches Verhältnis $h : r$ ist das Zylindervolumen maximal?"*

Abb. 8.5 veranschaulicht den Zylinder und die dabei auftretenden Strecken und Flächen. Die Oberfläche A des Zylinders besteht aus der Grundfläche G, der flächengleichen Deckfläche D und der Mantelfläche M.



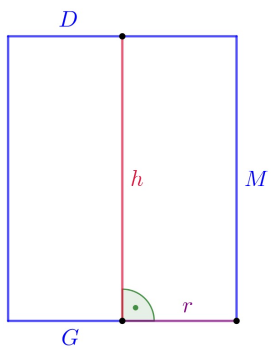


Abbildung 8.5: Längen und Flächen am Zylinder in der 3D-Ansicht und im Querschnitt.

Schritt 1 – Zielfunktion in mehreren Variablen: Wir wollen das Volumen optimieren, also muss dies die Zielfunktion sein. Es gilt:

$$V(G, h) = G \cdot h \tag{8.7}$$

Natürlich lässt sich die freisförmige Grundfläche G (und in gleicher Weise die Deckfläche D) auch direkt durch den Radius r ausdrücken: $G = D = \pi r^2$. Damit schreiben wir für die Zielfunktion:

$$V(r, h) = \pi r^2 \cdot h \tag{8.8}$$

Tipp zu gesuchten Verhältnissen: Die Aufgabe fragt nach dem optimalen Verhältnis $h : r$. In der Regel sollte man deswegen aber nicht versuchen bereits während der Optimierung mit einem Ausdruck wie $\frac{h}{r}$ zu arbeiten. Das ist eher verwirrend und mühsam. Es ist besser die Optimierung mit einer Variable, z.B. mit r, vorzunehmen. Danach lässt sich die andere Variable in Abhängigkeit von der ersten berechnen und die beiden lassen sich anschliessend ins Verhältnis setzen.

Schritt 2 – Nebenbedingung einbauen: Nun müssen wir aufgrund der Nebenbedingung – Zylinderoberfläche fix – die Höhe h durch den Radius r ausdrücken. Zunächst gilt:

$$A = G + D + M = 2G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \tag{8.9}$$

Nebenbei: Dass die Mantelfläche M durch $M = 2\pi r \cdot h$ gegeben ist, hat man sich rasch überlegt. . .[2]

Nun können wir (8.9) nach h auflösen und erhalten in Abhängigkeit von r:

$$A - 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot h \quad \Rightarrow \quad h(r) = \frac{A}{2\pi r} - r \tag{8.10}$$

Damit erhalten wir eine Volumenfunktion, die nur noch vom Radius r abhängt (A fix):

$$V(r) = \pi r^2 \cdot h(r) = \pi r^2 \cdot \left(\frac{A}{2\pi r} - r\right) = \frac{Ar}{2} - \pi r^3 \tag{8.11}$$

Schritt 3 – Nullsetzen der 1. Ableitung: Wir setzen die 1. Ableitung von $V(r)$ gleich 0:

$$V'(r) = \frac{A}{2} - 3\pi r^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{A}{6\pi} \quad \Rightarrow \quad r_{\max} = \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \tag{8.12}$$

Finish: Aus diesem Ausdruck für den Radius $r_{\max}$ bei maximalem Volumen berechnen wir mittels (8.10) die zugehörige Höhe:

$$\begin{aligned}
h_{\max} = h(r_{\max}) &= \frac{A}{2\pi r_{\max}} - r_{\max} = \frac{A}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{A}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \\
&= \frac{A \cdot \sqrt{6\pi}}{2\pi \cdot \sqrt{A}} - \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = \frac{\sqrt{A} \cdot \sqrt{6}}{2\sqrt{\pi}} - \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{A}{\pi}} \cdot \left(\frac{3\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{6} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{6A}{9\pi}} = \sqrt{\frac{2A}{3\pi}}
\end{aligned}$$

Nun können wir endlich das gesuchte Verhältnis angeben:

$$h_{\max} : r_{\max} = \sqrt{\frac{2A}{3\pi}} : \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = \sqrt{\frac{2A}{3\pi}} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{A}} = \sqrt{\frac{2A}{3\pi} \cdot \frac{6\pi}{A}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2 : 1}}$$

Dieses Resultat bedeutet, dass der Zylinder genau dann das grösste Volumen aufweist, wenn seine Höhe h dem Durchmesser $d = 2r$ entspricht. D.h., die Querschnittsfläche durch den Zylinder ist ein Quadrat!

[2] Frage: Wie breit und wie lang muss denn ein rechteckiges Papier sein, das die gesamte Mantelfläche eines Zylinders bedecken soll?
Antwort: Die Länge muss dem Umfang, die Breite der Höhe des Zylinders entsprechen!

Anhang A

Verschiedene Ableitungsschreibweisen

A.1 Wohlvertraut: die Lagrange-Notation

Für die 1. Ableitung einer Funktion $f(x)$ haben wir bis anhin stets $f'(x)$ geschrieben, für die 2. Ableitung $f''(x)$. Diese Schreibweise wird **Lagrange-Notation** genannt, nach dem italienischen Mathematiker **Joseph-Louis Lagrange** (1736 – 1813), der sie im Jahre 1797 einführte.

A.2 Für die Physik sehr praktisch: die Newton-Notation

In der Physik hängen Funktionen oft von der Zeit t ab und werden auch häufig nach dieser Variable abgeleitet. Für solche Ableitungen schrieb **Sir Isaac Newton** (1643 – 1727) bei seiner Erfindung der Differentialrechnung anstelle von $s'(t)$ kurz einfach $\dot{s}$. Diese **Punkt**- oder **Newton-Notation** für Ableitungen nach der Zeit t hat sich in der Physik bis heute gehalten, weil sie kurz und übersichtlich und deswegen sehr praktisch ist. Die zweite Ableitung wird einfach mit zwei Punkten notiert, $\ddot{s}$, etc.

A.3 Explizit infinitesimal: die Leibniz-Notation

Notieren wir zunächst nochmal die Ableitungsdefinition, wie wir sie in Abschnitt 1.2 beim Aufspüren der Tangentensteigung in einem Punkt eines Funktionsgraphen entwickelt haben (vgl. Gleichung (1.3) auf Seite 4):

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{A.1}$$

Darin steht $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ für die Sekantensteigung, die im Limes für $x \to 0$ eben gegen die Tangentensteigung wird. Bei dieser Grenzwertbildung werden Δx und in Abhängigkeit davon auch Δf unendlich klein oder eben **infinitesimal**.

Nun hat der deutsche Philosoph und Mathematiker **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716) etwa gleichzeitig mit Newton und unabhängig von diesem die Differentialrechnung erfunden. Dabei führte er eine praktische Schreibweise für infinitesimale Grössen ein. Wird beispielsweise Δx unendlich klein, so schreibt Leibniz dafür $\mathrm{d}x$ – wir sprechen vom infinitesimalen Schritt oder Abschnitt $\mathrm{d}x$.

Mit dieser **Leibniz-Schreibweise** notieren wir für die Ableitung einer Funktion $f(x)$ neu $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Pro infinitesimalem Schritt $\mathrm{d}x$ der Variable macht der Funktionswert den infinitesimalen Schritt $\mathrm{d}f$.

Übrigens wird die Leibniz-Notation für die Ableitung oft wie folgt auseinandergenommen: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$. Damit bringt man zum Ausdruck, dass die Funktion $f(x)$ nach x abgeleitet werden soll. Der Bruch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ist ein sogenannter **Differentialoperator**. Er steht für die Anweisung den nachfolgenden Ausdruck nach x abzuleiten.

Damit verstehen wir auch die Leibniz-Notation für die zweite Ableitung besser:

$$\text{2. Ableitung der Funktion } f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \tag{A.2}$$

A.4 Vermischung mehrerer Schreibweisen

Gerade die Leibniz-Notation für infinitesimale Schritte wird oft mit anderen Notationen kombiniert, um Abhängigkeiten resp. Zusammenhänge infinitesimaler Grössenordnung auszudrücken. So lässt sich beispielsweise die Gleichsetzung von Leibniz- und Lagrange-Notation für die 1. Ableitung auf beiden Gleichungsseiten mit dem infinitesimalen Schritt $\mathrm{d}x$ multiplizieren:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{A.3}$$

Die Gleichung rechts besagt, dass im Infinitesimalen die Veränderung $\mathrm{d}f$ des Funktionswertes stets proportional zur Veränderung $\mathrm{d}x$ der Variable ist. Die Proportionalitätskonstante ist die Ableitung, hier zum besseren Verständnis eben in der Lagrange-Notation aufgeschrieben.

Bemerke: Im Kleinen, aber nicht unendlich Kleinen, gilt lediglich eine Annäherung:

$$\Delta f \approx f'(x) \cdot \Delta x \tag{A.4}$$

Im Infinitesimalen wird daraus eine echte Gleichheit, denn dann gibt es zwischen den beiden Gleichungsseiten keinen bezifferbaren Unterschied mehr.

A.5 n-fache Ableitungen

In der höheren Mathematik kommt es oft vor, dass Funktionen n-mal abgeleitet werden sollen. Hier die entsprechenden Schreibweisen in der Lagrange- und in der Leibniz-Notation:

$$f^{(n)}(x) \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} \tag{A.5}$$

A.6 Eher historisch: Die Euler-Schreibweise

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass der Schweizer Mathematiker und Physiker **Leonhard Euler** (1707 – 1783) eine weitere Schreibweise für Ableitungen eingeführt hat:

$$\text{1. Ableitung von } f(x) = \mathrm{D}f \qquad \text{und} \qquad n\text{-te Ableitung von } f(x) = \mathrm{D}^n f \tag{A.6}$$

Diese **Euler-Notation** arbeitet ebenfalls mit einem expliziten Differentialoperator D. Sie wird in der Fachliteratur aber eher selten und von uns überhaupt nicht verwendet.

Abbildung A.1: Leonhard Euler auf der 10 Franken-Banknote der 6. Schweizer Notenserie (eingeführt 1976, gültig bis 2000).

Anhang B

Differenzierbarkeit von Funktionen

Das Wort *Differenzierbarkeit* kann ganz einfach als *Ableitbarkeit* übersetzt werden. Funktionen, die sich ableiten lassen, sind differenzierbar. Bei näherem Hinsehen stellen wir allerdings fest, dass wir uns über dieses "sich ableiten lassen" doch noch etwas weitere Gedanken machen sollten, um die Differentialrechnung mit einem ganz soliden Fundament zu versehen ...

Repetition: In Abschnitt 1.2 haben wir in Gleichung (1.4) festgelegt, was wir unter der Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x verstehen wollen:

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{B.1}$$

Dabei hatten wir Abbildung 1.3 vor Augen: Ein Punkt Q mit Koordinaten $Q\big(x+h, f(x+h)\big)$ rückt von rechts immer näher an den Punkt $P\big(x, f(x)\big)$ heran. Im Limes $h \to 0$ nähert sich dabei die Sekante s immer mehr der Tangente t an. Damit wird die Sekantensteigung, also der Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta x} = m_s = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, immer mehr zur Steigung m_t der Tangente t im Punkt P. Es war für uns sehr greifbar, dass folglich der Grenzwert $\lim_{h\to 0} m_s$ gerade gleich der Tangentensteigung m_t sein muss. Unter der Ableitung $f'(x)$ an der Stelle x wollen wir genau diese Tangentensteigung m_t verstehen, die eben als Limes des Differenzenquotienten für $h \to 0$ begriffen wird.

Erstes Problem – der Grenzwert kann inexistent sein: In der gymnasialen Mathematik werden kaum "pathologische" oder "unfreundliche" Funktionen betrachtet. Wir dürfen stets davon ausgehen, dass Funktionen stetig und in aller Regel problemlos ableitbar sind. Das muss aber nicht unbedingt so sein. Man kann sich durchaus Funktionen ausdenken, die nicht so "pflegeleicht" sind. Die Folge davon kann sein, dass der Grenzwert in (B.1) an einzelnen oder auch allen Stellen x gar nicht existiert.

Hier ein Beispiel für eine solche pathologische Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \qquad (x \text{ rational}) \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad (x \text{ irrational}) \end{cases}$$

Nur schon der Versuch den Graphen dieser Funktion zu skizzieren, ist ein schwieriges Unterfangen. Das Resultat zeigt Abb. B.1 oben auf der nächsten Seite. Der Graph besteht scheinbar aus einer Gerade auf Höhe $y = 0$ und einer Gerade auf Höhe $y = 1$. Wir wissen allerdings, dass beide Geraden Lücken aufweisen. Die untere Gerade enthält nur Punkte, der x-Koordinaten rational sind, während die obere Gerade aus lauter Punkten mit irrationaler x-Koordinate besteht.

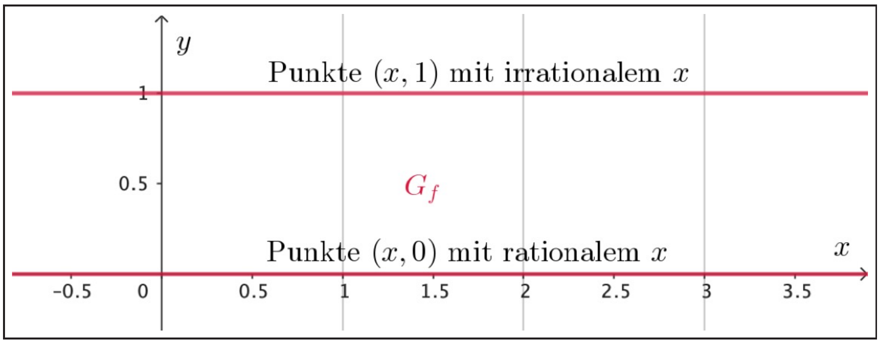


Abbildung B.1: Der "Graph" unserer pathologischen Funktion!

Picken wir irgendeinen Punkt auf dem Graphen G_f heraus, z.B. $P(1,0)$ $(x = 1 \in \mathbb{Q})$, so wird klar, dass sich der von diesem Punkt ausgehende Differenzenquotient höchst merkwürdig verhält, wenn wir den Parameter h gegen 0 gehen lassen: Trifft $x+h$ auf eine rationale Zahl, so ist $f(x+h) = 0$, also $Q(x+h,0)$ und somit $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$. Ist hingegen $x+h$ irrational, so ergibt sich für den Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ein positiver Wert, der für kleiner werdende irrationale Wert von h immer grösser wird und ins Unendliche ansteigt (vgl. Abb. B.2).

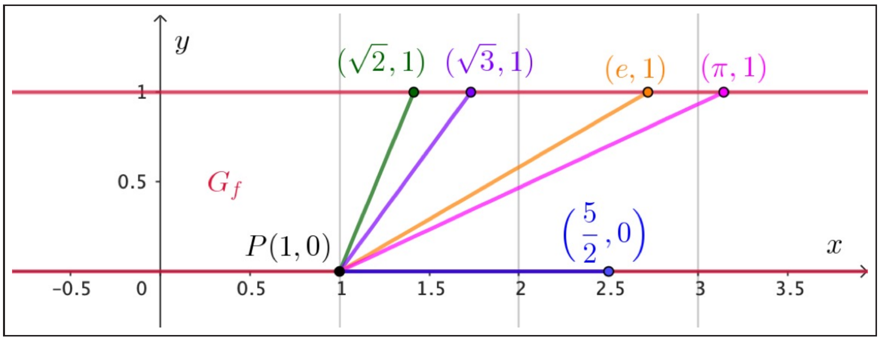


Abbildung B.2: Der "Graph" unserer pathologischen Funktion!

Für $h \to 0$ nimmt die Sekantensteigung m_s also immer wieder den Wert 0, aber auch einen ständig grösser werdenden positiven Wert an. Es existiert demnach kein Grenzwert für m_s. Folglich kann für $f(x)$ im Punkt $P(1,0)$ (und in allen anderen Punkten) keine Ableitung definiert werden!

Folgerung resp. Fazit: Bei der Definition der Ableitung in (1.4) hätten wir grundsätzlich die Existenz des Grenzwertes einfordern müssen.

Wir benötigen aber nicht unbedingt eine pathologische Funktion wie oben, um zu erkennen, dass manche Funktionen Stellen ohne Ableitung, also ohne existierende Grenzwert aufweisen. Z.B. ist die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf der Menge der positiven reellen Zahlen inklusive 0, also auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert. Über der Stelle $x = 0$ existiert allerdings kein Grenzwert:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Die Wurzelfunktion hat im Ursprung also keine Ableitung.

Zweites Problem – der Grenzwert kann beidseitig verschieden sein: Mit unserer Ableitungsdefinition (1.4) gibt es eine weitere Schwierigkeit resp. Unvollständigkeit, die ich an einem simplen Beispiel illustrieren möchte. Betrachten wir die durch

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gegebene **Betragsfunktion**. Hier der zugehörige Funktionsgraph:

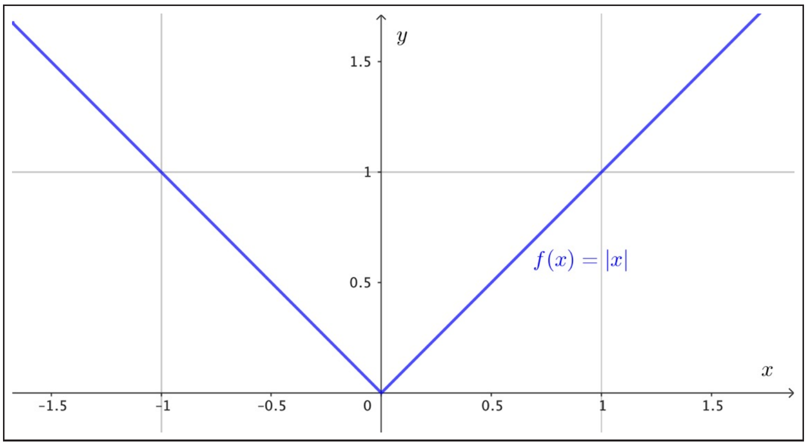


Abbildung B.3: Die Betragsfunktion mit undefinierter Ableitung im Ursprung.

Ganz offensichtlich – wir müssen nur den Graphen anschauen – hat die Funktion für positive x die Ableitung $f'(x) = 1$ und für negative x die Ableitung $f'(x) = -1$. Für $x = 0$ ist die Sache aber unklar:

$$f'(x) = \big[\,|x|\,\big]' = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ ?? & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Natürlich könnte man meinen, dass die Ableitung in $(0, 0)$ den Wert 0 hat. Das wäre allerdings ziemlich willkürlich. Tatsache ist, dass der Graph im Ursprung eine "Ecke", einen "Knick" oder eine "Spitze" aufweist. Was meint denn die Ableitungsdefinition (1.4) dazu? Wir überprüfen:

$$f'(0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{0 + h - 0}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \searrow 0} 1 = 1$$

Es ergibt sich der Grenzwert 1, aber nur, wenn wir uns von der positiven Seite her der fraglichen Stelle $x = 0$ nähern. Dies habe ich durch die dafür übliche Schreibweise $h \searrow 0$ gekennzeichnet. Sie impliziert, dass $h > 0$ sein soll.

Wir können uns aber ebenso gut von der negativen Seite her der Stelle $x = 0$ annähern ($h \nearrow 0$) und erhalten so einen anderen Ableitungswert:

$$f'(0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{-(0+h) - 0}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \nearrow 0} (-1) = -1$$

In der Stelle $x = 0$ erhalten wir also zwei Grenzwerte, die allerdings unterschiedliche Werte aufweisen, je nachdem, ob wir uns "von unten" oder "von oben" der fraglichen Stelle annähern. Grafisch ist dieser Missstand ja auch bestens verständlich. Er führt uns zum Schluss, dass die Betragsfunktion an der Stelle $x = 0$ gar keine Ableitung hat – denn die Ableitungsfunktion soll ja, wie alle anderen Funktionen auch, an jeder Stelle einen eindeutigen Wert aufweisen.

Folgerung resp. Fazit: Bei der Definition der Ableitung in (1.4) sollten wir grundsätzlich fordern, dass der Grenzwert beidseitig der fraglichen Stelle denselben Wert ergibt.

Revidierte Formulierung der Ableitungsdefinition: Aufgrund der nun beleuchteten Problematiken wollen wir eine verbesserte Definition für die Ableitung einer Funktion in einer Stelle x_0 festhalten:

Definition der Ableitung $f'(x)$ an der Stelle x_0

Existieren an einer Stelle x_0 die beiden Grenzwerte

$$f_1'(x_0) := \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{und} \qquad f_2'(x_0) := \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

und weisen sie beide denselben Wert auf $\big(f_1'(x_0) = f_2'(x_0)\big)$, so ist die **Ableitung** *der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 gegeben durch:*

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \big(= f_1'(x_0) = f_2'(x_0)\big) \tag{B.2}$$

In diesem Falle sagen wir: "$f(x)$ ist differenzierbar an der Stelle x_0."

Ist $f(x)$ an allen Stellen x in einem Intervall $D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar, so sagen wir: "$f(x)$ ist differenzierbar auf D."

Beispiel einer Konsequenz dieser Neudefinition: Funktionen, die nur auf einem Teilbereich von $D \subset \mathbb{R}$ definiert sind, der einen "scharfen Rand" aufweist, also am Rand eine wohlbekannte letzte Zahl x_1 haben, die noch dazugehört, besitzen bei dieser letzten Zahl streng genommen keine Ableitung mehr, weil der Grenzwert nur von einer Seite her gebildet werden kann, also gar kein beidseitiger Grenzwert existiert.

Bei Bedarf kann man allerdings einen *rechtsseitigen* oder einen *linksseitigen Grenzwert* definieren und nötigenfalls damit arbeiten.

Anhang C

Differentialrechnung und Newton'sche Mechanik

C.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung als Ableitungen

Rep. 1: Definition der Ableitungsdefinition

Die Ableitung $f'(x)$ ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ für $\Delta x \to 0$:

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Das Verständnis der Ableitung in Worten:

- "Die Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung des Graphen von $f(x)$ über der Stelle x an."
- "Die Ableitung $f'(x)$ steht für die lokale Veränderungrate von $f(x)$ über der Stelle x."

Rep. 2: Kinematik geradliniger Bewegungen (Mechanik)

In der 1. Klasse hatten wir im Physikunterricht sog. **Orts-** oder **t-s-Diagramme** betrachtet (vgl. Abb. C.1 oben). Dabei wird über jedem Zeitpunkt t auf der horizontalen Zeitachse vertikal der aktuelle Ort s abgetragen, an dem sich der betrachtete Körper dann befindet. Der Ort s wird also als Funktion der Zeit t aufgefasst. Wir sprechen von der **Ortsfunktion** $s(t)$. Wir hatten erkannt, dass die folgende Definition sinnvoll ist:

Momentangeschwindigkeit $v(t)$:= aktuelle Steigung des Graphen im t-s-Diagramm

Diese Definition konnten wir in der 1. Klasse allerdings nur bei Abschnitten mit konstanter Geschwindigkeit (gleichförmige Bewegungen) anwenden, weil wir damals nur Steigungen von Geraden mittels endlichen **Steigungsdreiecken** bestimmen konnten:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{Veränderung des Ortes}}{\text{Zeitspanne}}$$

Weiter haben wir den Geschwindigkeitsverlauf einer Bewegung in einem **t-v-Diagramm** aufgezeichnet (vgl. Abb. C.1 Mitte) und dort definiert:

Momentane Beschleuigung $a(t)$:= aktuelle Steigung des Graphen im t-v-Diagramm

Damit konnten wir bei gleichmässigen Geschwindigkeits**änderungen** die Beschleunigung bestimmen:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitspanne}}$$

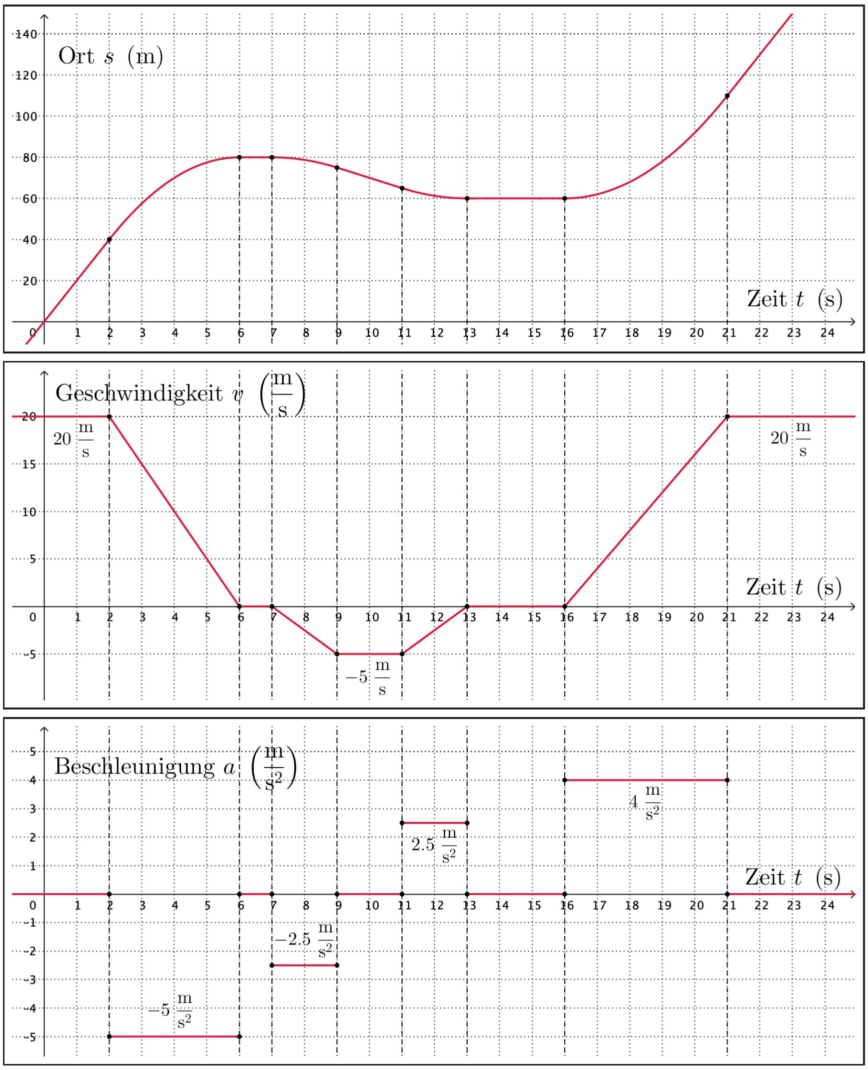


Abbildung C.1: t-s-, t-v- und t-a-Diagramm einer Bewegung. Ohne Differentialrechnung konnten wir nur während den gleichförmig verlaufenden Bewegungsabschnitten (= gerade Abschnitte im t-s-Diagramm) die Geschwindigkeit bestimmen. Ausserdem mussten wir stets annehmen, dass Geschwindigkeitsveränderungen gleichmässig ablaufen, um daraus Beschleunigungen berechnen zu können.

Neu 1: Geschwindigkeit und Beschleunigung als Ableitungen der Ortsfunktion

Mittels Differentialrechnung können wir die Momentangeschwindigkeit zu jedem beliebigen Zeitpunkt t angeben, denn die Steigung des Graphen der Ortsfunktion $s(t)$ ist für jedes t gegeben durch:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \tag{C.1}$$

Die **Geschwindigkeitsfunktion** $v(t)$ ist also die zeitliche Ableitung der Ortsfunktion $s(t)$.

Ähnliches gilt für die momentane Beschleunigung, für die wir zu jedem Zeitpunkt t schreiben:

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \tag{C.2}$$

Die **Beschleunigungsfunktion** $a(t)$ ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$.

Nochmals kurz: Geschwindigkeit und Beschleunigung sind die 1. und die 2. Ableitung des Ortes:

$$v(t) = s'(t) \qquad \text{und} \qquad a(t) = v'(t) = s''(t) \tag{C.3}$$

Beispiel: Gleichmässig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit

Beschleunigt ein Körper gleichmässig ($a = \text{konst.}$), so haben wir dafür in der Kinematik die folgende Ortsfunktion verwenden können:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \qquad \text{(C.4)}$$

Dabei waren s_0 der Startort und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit.

Betrachten wir die Ableitungen dieser Ortsfunktion:

$$v(t) = s'(t) = v_0 + a \cdot t \qquad \text{und} \qquad a(t) = v'(t) = a = \text{konst.} \qquad \text{(C.5)}$$

Es ergeben sich genau die erwarteten Ausdrücke. $v(t) = v_0 + a \cdot t$ beschreibt eine lineare, also gleichmässige Veränderung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit. $a(t) = a = \text{konst.}$ bestätigt, dass die Beschleunigung in diesem Fall eine konstante Funktion ist.

C.2 Das Aktionsprinzip infinitesimal verstanden

Rep. 3: Tangente an den Funktionsgraphen in einem Punkt

Der Punkt P über der Stelle x_0, der auf dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ liegen soll, hat die Koordinaten $P(x_P, y_P) = \big(x_0, f(x_0)\big)$. Lege ich durch P eine Tangente an den G_f, so beträgt deren Steigung $m = f'(x_0)$. Damit können wir für die Gleichung dieser Tangente schreiben (vgl. Abb. C.2):

$$t(x) = m(x - x_P) + y_P = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

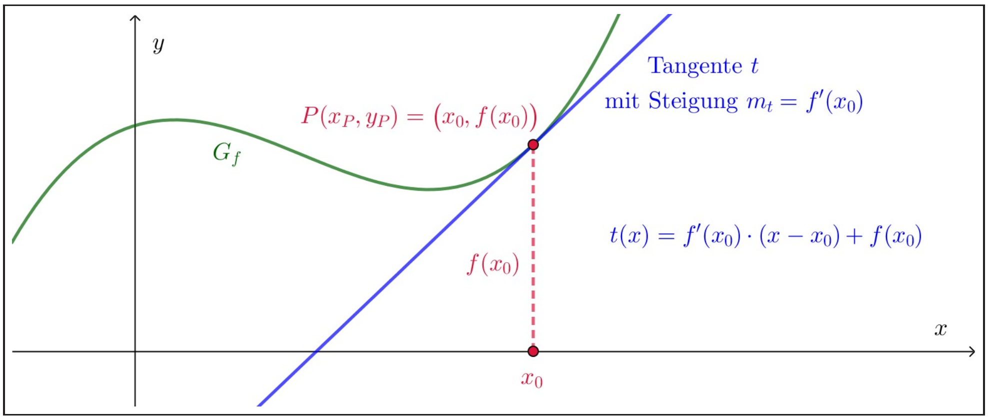


Abbildung C.2: Die Gleichung der Tangente t an den Graphen G_f im Punkt P kann aufgrund von Funktionswert und Ableitung direkt angegeben werden.

Neu 2: Lineare Approximation einer Funktion an einer Stelle

$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ bezeichnen wir als die **lineare Approximation** (= Annäherung) von $f(x)$ an der Stelle x_0. Das bedeutet, in der unmittelbaren Umgebung der Stelle x_0 (= lokal) kann die Funktion $f(x)$ durch die lineare Funktion $t(x)$ **approximiert** (= angenähert) werden, denn der Graph einer ableitbaren Funktion sieht auf hinreichend kleinen Abschnitten wie eine Gerade aus (vgl. Abb. C.3). Es gilt also:

$$f(x) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \qquad \text{für } x \text{ hinreichend nahe bei } x_0$$

Weshalb eine solche lineare Approximierung nützlich ist, werden wir gleich sehen.

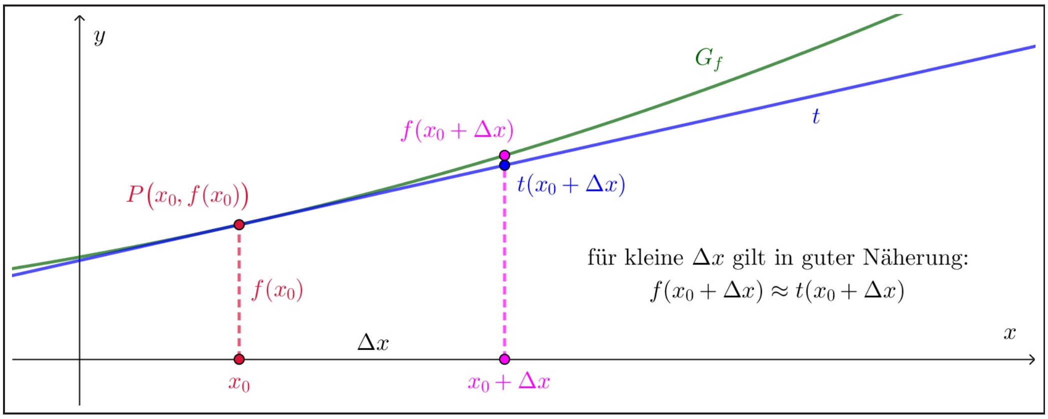


Abbildung C.3: Lineare Approximation. Für Stellen x nahe an x_0, also bei kleinem Δx, ist der Funktionswert $f(x_0 + \Delta x)$ ohne grossen Fehler gegeben durch die Tangente, also durch $t(x_0 + \Delta x)$. Je kleiner Δx ist, desto besser stimmt diese Aussage, denn eine ableitbare Funktion ist in hinreichend kleiner Umgebung um jeden beliebigen Punkt eine Gerade.

Für die Veränderung Δf des Funktionswertes in der Nähe von x_0 können wir schreiben:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f'(x) \cdot \Delta x \qquad \text{kurz:} \quad \Delta f \approx f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{C.6}$$

"Die Veränderung des Funktionswertes ist lokal stets proportional zur Veränderung der Variable."

Mache ich die Veränderung der Variable infinitesimal klein – also unendlich klein, aber nicht gleich 0 – so wird auch die Veränderung des Funktionswertes infinitesimal klein. Für diese infinitesmal kleinen Veränderungen schreiben wir anstelle von Δx neu $\mathrm{d}x$ resp. anstelle von Δf eben $\mathrm{d}f$. Damit gilt exakt (weil effektiv kein Unterschied mehr bezifferbar ist):

$$\mathrm{d}f = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x \tag{C.7}$$

Neu 3: Infinitesimale Veränderungen von Ort und Geschwindigkeit

Übertragen wir dieses Konzept infinitesimaler Veränderungen auf unsere Ortsfunktion $s(t)$, so können wir zu jedem Zeitpunkt t sagen: Im infinitesimalen Zeitabschnitt $\mathrm{d}t$ verändert sich der Ort um die infinitesimale Strecke $\mathrm{d}s$, die proportional zu $\mathrm{d}t$ ist:

$$\mathrm{d}s = s'(t) \cdot \mathrm{d}t = v(t) \cdot \mathrm{d}t \tag{C.8}$$

Die aktuelle Geschwindigkeit $v(t)$ ist also die Proportionalitätskonstante zwischen infinitesimaler Strecke $\mathrm{d}s$ und infinitesimalem Zeitschritt $\mathrm{d}t$. Analog gilt:

$$\mathrm{d}v = v'(t) \cdot \mathrm{d}t = a(t) \cdot \mathrm{d}t \tag{C.9}$$

Im infinitesimalen Zeitabschnitt $\mathrm{d}t$ verändert sich die Geschwindigkeit um den infinitesimalen Schritt $\mathrm{d}v$, der von der aktuellen Beschleunigung $a(t)$ abhängt.

Rep. 4: Das Newton'sche Aktionsprinzip

Alle auf einen Körper wirkenden Kräfte werden durch Aneinanderhängen der Kraftpfeile zu einer **resultierenden Kraft** F_{res} verrechnet (sog. Vektoraddition).

Newton sagt nun mit seinem **Aktionsprinzip (= 2. Newton'sches Axiom)**, dass die resultierende Kraft die Beschleunigung festlegt, die der Körper erfährt, wobei die Masse m des Körpers den Effekt abschwächt (Stichwort: **Trägheit**). Es gilt:

$$F_{\mathrm{res}} = m \cdot a \qquad \text{resp.} \qquad a = \frac{F_{\mathrm{res}}}{m} \tag{C.10}$$

Dabei zeigt die Beschleunigung a stets in die Richtung der resultierenden Kraft F_{res}.

Neu 4: Simulation durch Aufsummierung kleiner Zeitschritte

Vorgabe: Zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 sei genau bekannt, an welchem Ort $s_0 = s(t_0)$ sich ein Körper der Masse m befindet und welche Geschwindigkeit $v_0 = v(t_0)$ er dann hat. Zudem wissen wir, welche Kräfte auf ihn wirken und kennen somit die aktuelle Beschleunigung $a_0 = \frac{F_{\text{res}}(t_0)}{m}$. Dabei ist $F_{\text{res},0}$ die resultierende Kraft zum Zeitpunkt t_0.

Folgerung: Dann können wir genau sagen, wie sich Ort und Geschwindigkeit im nächsten infinitesimalen Zeitschritt verändern:

$$s(t_0 + \mathrm{d}t) = s_0 + \mathrm{d}s = s_0 + v_0 \cdot \mathrm{d}t \tag{C.11}$$

$$\text{und} \qquad v(t_0 + \mathrm{d}t) = v_0 + \mathrm{d}v = v_0 + a_0 \cdot \mathrm{d}t \qquad \text{mit} \quad a_0 = \frac{F_{\text{res}}(t_0)}{m} \tag{C.12}$$

Mit dieser Idee können wir einen ganzen Bewegungsablauf Schritt für Schritt berechnen. Voraussetzung ist, dass wir die Startbedingungen s_0 und v_0, sowie die Masse m des Körpers und die auf ihn wirkenden Kräfte kennen.

Natürlich kann kein Rechner unendlich kleine, also im mathematischen Sinne echt infinitesimale Schritte ausführen. Die Schritte müssen endlich klein sein. Damit können wir schreiben:

$$s_{\text{neu}} \approx s + \Delta s = s + v \cdot \Delta t \tag{C.13}$$

$$\text{und} \qquad v_{\text{neu}} \approx v + \Delta v = v + a \cdot \Delta t \qquad \text{mit} \quad a = \frac{F_{\text{res}}}{m} \tag{C.14}$$

Aus den aktuellen Werten s, v und a können die neuen Werte s_{neu} und v_{neu} nach dem Zeitschritt Δt berechnet werden. Dann muss aus der neuen Kräftesituation wieder F_{res} und somit a bestimmt werden, damit ausgehend von diesen neuen Werten die Veränderungen im nächsten Zeitschritt Δt berechnet werden können.

Auf diese Weise lässt sich durch die Betrachtung kleiner Zeitschritte ein ganzer Bewegungsablauf beliebig genau simulieren. Je genauer man es haben will, umso kleiner muss Δt gewählt werden.

C.3 Simulation des senkrechten Wurfs ohne Luftwiderstand

Vorgabe: Auf einem Turm stehend ($\rightarrow$ Starthöhe $s_0 = 20\,\text{m}$) werfe ich einen Stein senkrecht nach oben. Die Anfangsgeschwindigkeit betrage $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und der Stein falle beim Herunterkommen am Turm vorbei bis auf den Boden.

Kein Luftwiderstand: Der Luftwiderstand sei vernachlässigbar. Dann wirkt auf den Stein nur die Gewichtskraft F_{G}, was zur Folge hat, dass die Beschleunigung in Abwärtsrichtung konstant bleibt, nämlich $a = -g = -9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Dies ist die direkte Konsequenz des Newtonschen Aktionsprinzips, denn wenn $F_{\text{G}} = -m \cdot g$ die einzige Kraft ist, dann ist die resultierende Kraft eben gleich dieser Gewichtskraft und es folgt:

$$F_{\text{res}} = F_{\text{G}} = -m \cdot g \stackrel{!}{=} m \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = -g \tag{C.15}$$

Exakte Lösung: Gleichung (C.4) beschreibt die exakte Ortsfunktion $s(t)$ für den Fall einer geradlinigen Bewegung mit konstanter Beschleunigung. Das ist praktisch, denn so können wir gut vergleichen, ob unsere Simulation das erwartete Ergebnis liefert. Mit $a = -g$ lautet diese exakte Ortsfunktion:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \tag{C.16}$$

Simulation: Zur Simulation mittels der Gleichungen (C.13) und (C.14) müssen wir uns einen hinreichend kleinen, aber eben nur endlich kleinen Zeitschritt Δt vorgeben. Abb. C.4 zeigt die Resultate für drei verschiedene Werte von Δt.

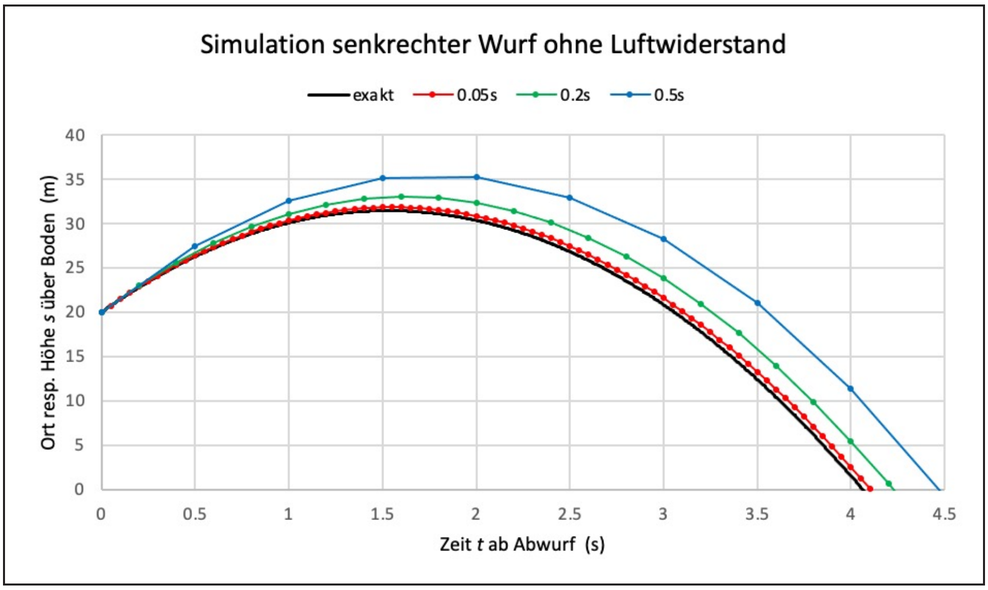


Abbildung C.4: Simulation des senkrechten Wurfs ohne Luftwiderstand. Die Kurven zeigen die Daten aus Simulationen mit verschieden langen Zeitschritten.

Diskussion der Simulationen: In Abb. C.4 sehen wir schwarz die exakte Kurve für den Wurf ohne Luftwiderstand. In Farbe sind die Resultate dreier Simulationen mit $\Delta t = 0.05\,\text{s}$ (rot), $\Delta t = 0.2\,\text{s}$ (grün) und $\Delta t = 0.5\,\text{s}$ (blau) eingetragen. Erkennbar sind die Simulationspunkte, die durch gerade Linien miteinander verbunden wurden.

- Die Simulation mit $\Delta t = 0.05\,\text{s}$ kommt der exakten Kurve schon sehr nahe, obwohl eine Zwanzigstelsekunde noch kein besonders kleiner Wert für den Zeitschritt ist.
- Je grösser der Zeitschritt Δt gewählt wird, desto mehr weicht die Simulation vom exakten Wert ab. Dabei liegen die Simulationskurven alle oberhalb der exakten Kurve. Das können wir auch gut nachvollziehen: Die Geschwindigkeit v, mit der die Strecke Δs während des Zeitschrittes Δt berechnet wird, ist diejenige vom Anfang des Zeitschrittes. Die Geschwindigkeit nimmt aber im Laufe von Δt bereits ab. Das bedeutet, Δs wird stets mit einer zu grossen Geschwindigkeit berechnet.

Verbesserungsidee: Wenn wir uns bewusst werden, dass die Strecke Δs offensichtlich mit einer falschen Geschwindigkeit v berechnet wird, können wir uns ja auch überlegen, wie sich das verbessern liesse. Eine unmittelbare und sehr einfache Idee ist, Δs nicht mit v, sondern mit einer einfachen Näherung $\tilde{v}$ für die Durchschnittsgeschwindigkeit während dem Zeitschritt Δt zu berechnen. Für diese Näherung setzen wir an:

$$\tilde{v} = \frac{v + v_{\text{neu}}}{2} = \frac{v + (v + \Delta v)}{2} = \frac{2v + \Delta v}{2} = v + \frac{\Delta v}{2} \tag{C.17}$$

Es ist klar, dass uns $\tilde{v}$ bei der Berechnung von Δs jeweils zur Verfügung steht, denn wir können ja immer zuerst $\Delta v = a \cdot \Delta t$ berechnen, bevor wir uns der Berechnung von Δs widmen. Diese sieht dann folgendermassen aus:

$$\Delta s = \tilde{v} \cdot \Delta t = \left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) \cdot \Delta t \tag{C.18}$$

Im Falle einer gleichmässigen Geschwindigkeitsänderung, wie wir sie beim senkrechten Wurf ohne Luftwiderstand vorliegen haben, ist $\tilde{v}$ sogar exakt gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit während Δt. Das hat zur Folge, dass die Simulationswerte komplett mit den exakten Werten übereinstimmen.

C.4 Simulationen des senkrechten Wurfs mit Luftwiderstand

Der Luftwiderstand F_L eines Objektes alltäglicher Grössenordnung hängt in der Regel quadratisch von der aktuellen Geschwindigkeit v ab. Für seinen Betrag können wir also schreiben:

$$F_\mathrm{L} = c \cdot v^2 \tag{C.19}$$

Dabei enthält der Parameter c alle weiteren relevanten Aspekte, wie die Luftdichte, die Form des Objektes und dessen Fläche gegen den Luftstrom. Auf diese Aspekte wollen wir hier nicht näher eingehen, aber es seien zumindest ein paar realistische c-Werte angeführt:

$$\begin{aligned}
&\text{Fussball } (d = 22\,\mathrm{cm}): && c = 0.012\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}\\
&\text{Baseball } (d = 7.4\,\mathrm{cm}): && c = 0.0014\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}\\
&\text{Golfball } (d = 4.3\,\mathrm{cm}): && c = 0.00046\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}
\end{aligned}$$

Der Luftwiderstand wirkt stets entgegengesetzt zur aktuellen Bewegungsrichtung. Dieser Umstand muss bei der Berechnung der resultierenden Kraft mit berücksichtigt werden. Wir schreiben (positive Richtung $\widehat{=}$ nach oben):

$$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{G} + F_\mathrm{L} = -m \cdot g - c \cdot v \cdot |v| \tag{C.20}$$

Für $v > 0$ (Aufwärtsbewegung) ist $F_\mathrm{L} = -c \cdot v \cdot |v|$ negativ und wirkt somit nach unten. Für $v < 0$ (Abwärtsbewegung) wird F_L positiv und zeigt somit auch wieder gegen die Richtung von v.

Damit wissen wir, wie F_res und die Beschleunigung $a = \frac{F_\mathrm{res}}{m}$ zu jedem beliebigen Zeitpunkt berechnet werden können. D.h., wir sind bereit für die Simulation!

Konkrete Simulationsdaten und Diskussion

Betrachten wir einen Fussball ($m = 430\,\mathrm{g}$), der von einem $70\,\mathrm{m}$ hohen Turm mit $v_0 = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht in die Luft gekickt wird. Wir rechnen mit hinreichend kleinen Zeitschritten $\Delta t = 1\,\mathrm{ms} = 0.001\,\mathrm{s}$ und verwenden die optimierte Variante für die Streckenberechnung aus Gleichung (C.18). Abb. C.5 zeigt das Resultat, wobei zum Vergleich auch die exakte Lösung ohne Luftwiderstand eingezeichnet ist.

- Oben in Abb. C.5 sehen wir das t-s-Diagramm. Dabei sehen wir sofort die Konsequenz des Luftwiderstandes. Mit Luftwiderstand erreicht der Ball deutlich früher den toten Punkt als ohne. Die erreichte Maximalhöhe ist entsprechend geringer.

  Auch beim Fallen schlägt der Luftwiderstand wieder zu. Der Ball wird nicht beliebig schnell, sondern fällt nach relativ kurzer Zeit mit nahezu gleichförmig. Tatsächlich würde der Ball den Boden ($s = 0$) ohne Luftwiderstand früher erreichen.

- Das t-v-Diagramm unten in Abb. C.5 zeigt, wie die Geschwindigkeit anfänglich wegen des Luftwiderstandes rascher abnimmt als ohne. Danach verändert sich die Geschwindigkeit mehr oder weniger gleichmässig, solange $|v|$ nahe bei 0 liegt.

  Je schneller der Ball nach unten fällt, desto mehr schlägt der Luftwiderstand zu. Er wird so stark, dass der Ball eben nicht beliebig schnell werden kann, sondern sich vielmehr einer Endgeschwindigkeit v_end annähert. Diese Endgeschwindigkeit kann bereits vorab vorhergesagt werden. Zu ihr gehört das Kräftegleichgewicht zwischen Gewichtskraft und Luftwiderstand, woraus folgt:

  $$|F_\mathrm{L}| = |F_\mathrm{G}| \quad \Rightarrow \quad c \cdot v_\mathrm{end}^2 = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad |v_\mathrm{end}| = \sqrt{\frac{m \cdot g}{c}} = \sqrt{\frac{0.43\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0.012\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}}} \approx 19\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

  Diesen Grenzwert entdecken wir auch im t-v-Diagramm, natürlich mit negativem Vorzeichen.

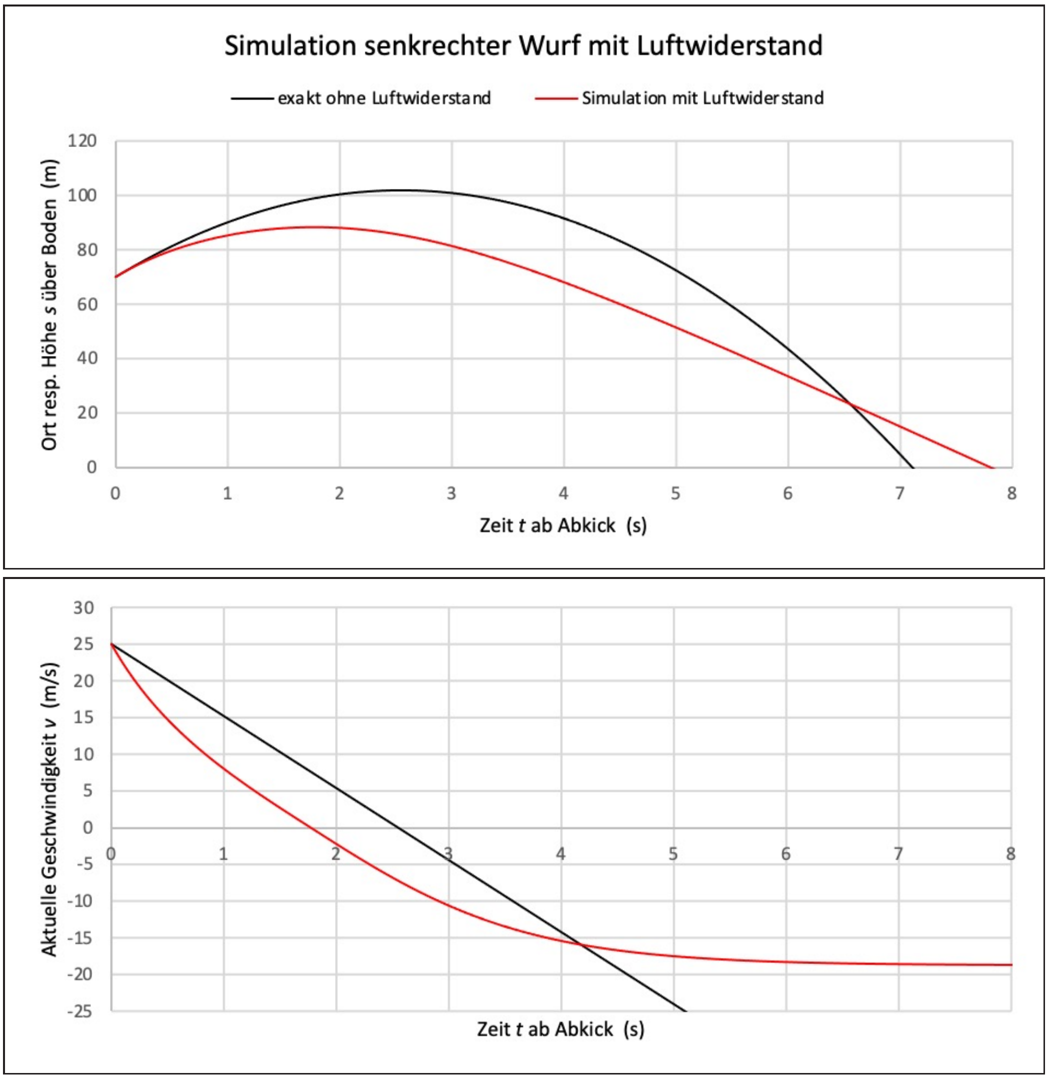


Abbildung C.5: Simulation des senkrechten Wurfs mit Luftwiderstand (t-s- und t-v-Diagramm). Zusätzlich eingetragen sind die exakten Werten für den senkrechten Wurf ohne Luftwiderstand.

C.5 Simulation des Federpendels

Bei einem **Federpendel** schwingt eine Gewicht an einer Spiralfeder hängend auf und ab. Abb. C.6 zeigt rechts die reale Anordnung.

Reale Messung mit dem Bewegungssensor

Die Schwingung des Pendels wird mit einem **Ultraschall-Distanzmessgerät** (= Bewegungssensor) aufgenommen, der 25 Ortsmessungen pro Sekunde vornimmt. So ergeben sich die Messpunkte im Diagramm in Abb. C.6 links. Die Datensoftware kann dann versuchen eine mathematisch exakte Sinuskurve mit den üblichen Streckungs- und Verschiebungsparametern über diese Punkte zu legen:

$$h(t) = A \cdot \sin\big(B \cdot (t - C)\big) + D \tag{C.21}$$

Dabei steht A für die **Amplitude** der Schwingung, für den horizontalen Streckungsparameter B schreiben wir bei zeitabhängigen Schwingungen in der Regel ω und meinen damit die **Kreisfrequenz**, C steht für eine horizontale Verschiebung, hier also eine **zeitliche Verschiebung**, und D für die **mittlere Höhe** der Pendelschwingung, die auch gleich der **Ruhelage** des Pendels ist.

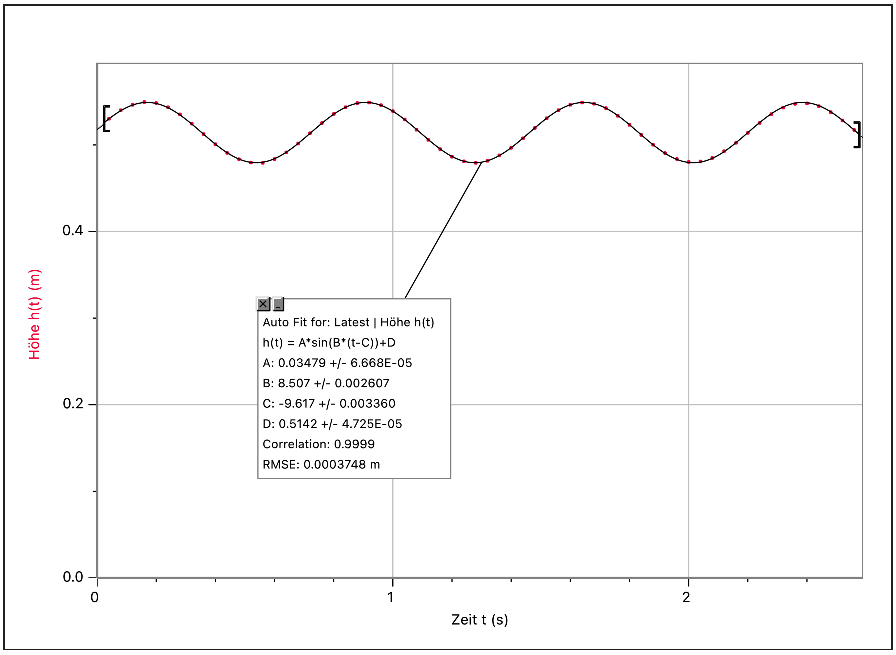


Abbildung C.6: Die Schwingung eines Federpendels: Die mathematisch exakte Sinuskurve deckt sich unglaublich gut mit den Datenpunkten. Das Pendel schwingt offensichtlich sinusförmig.

Wie wir in Abb. C.6 sofort erkennen, liegen die Messpunkte praktisch perfekt auf der mathematisch exakten Sinusfunktion $h(t)$.

Ein Federpendel schwingt sinusförmig!

Zumindest stimmt diese Aussage sehr gut, solange wir relativ kurze Zeiträume betrachten und somit die Reibung vernachlässigen können. Ohne Reibung würde das Pendel im Prinzip unendlich lange mit gleicher Amplitude weiter schwingen. Dies bezeichnet man als **ungedämpfte Schwingung**. Diese möchten wir zuerst simulieren.

Ansatz für die resultierende Kraft

Zur Simulation müssen wir über die **resultierende Kraft** F_{res} Bescheid wissen. Auf das Gewicht wirken nur zwei Kräfte, einerseits eine konstante **Gewichtskraft** $F_{\text{G}} = -m \cdot g$ nach unten, andererseits eine sich laufend verändernde, aber immer nach oben ziehende **Federkraft** $F_{\text{F}} > 0$. Für die resultierende Kraft können wir daher schreiben:

$$F_{\text{res}} = F_{\text{F}} + F_{\text{G}} = F_{\text{F}} - m \cdot g \tag{C.22}$$

Dehnung, Federkonstante und Federgesetz

Die Federkraft eines elastischen Gegenstandes ist stets eine rücktreibende Kraft. Sie versucht den elastischen Gegenstand wieder in seine **entspannte Lage** h_{ent} zu bringen. Bei unserem Federpendel befindet sich h_{ent} weit oberhalb aller Höhen $h(t)$, die das Pendel während seiner Schwingung abfährt: $h_{\text{ent}} > h(t)$ für alle t.

Die Strecke $d(t) = h(t) - h_{\text{ent}}$ ist die aktuelle **Dehnung** des Pendels, also die Strecke, um die das Pendel zum Zeitpunkt t aus seiner entspannten Lage ausgelenkt ist. Wegen $h_{\text{ent}} > h(t)$ für alle t hat $d(t)$ im Falle unseres Federpendels immer einen negativen Wert – die Feder ist stets gegen unten aus ihrer entspannten Lage ausgelenkt.

Nun weisen Spiralfedern und einige andere elastische Gegenstände die bemerkenswerte Eigenschaft auf, dass ihre aktuelle Federkraft F_F genau proportional zur Dehnung $d(t)$ ist. Dieser Zusammenhang wird als **Hookesches Gesetz** oder einfach als **Federgesetz** bezeichnet. Es gilt also:

$$\textbf{Federgesetz (Hooke):} \qquad F_\mathrm{F} = -k \cdot d(t) \tag{C.23}$$

Dabei beschreibt das Minuszeichen, dass die Federkraft eine rücktreibende Kraft ist – F_F wirkt stets gegen die Dehnung $d(t)$ – während die **Federkonstante** k über die Stärke oder Härte der Spiralfeder Auskunft gibt. Sie wird in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ ("Newton pro Meter") angegeben. Um eine Feder mit $k = 14\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ um einen ganzen Meter zu dehnen, würden also $14\,\mathrm{N}$ Kraft benötigt. Oder anders: Wird diese Feder um einen Meter gedehnt, so zieht sie mit $14\,\mathrm{N}$ Kraft zurück.

Formulierung der resultierenden Kraft mit Ortsnullpunkt in der Ruhelage

Setzen wir das Federgesetz (C.23) in die Gleichung für die resultierende Kraft (C.22) ein und bauen wir zusätzlich die Definition der Dehnung $d(t)$ mit ein, so erhalten wir neu:

$$F_\mathrm{res} = -k \cdot d(t) - m \cdot g = -k \cdot \big(h(t) - h_\mathrm{ent}\big) - m \cdot g = k \cdot h_\mathrm{ent} - k \cdot h(t) - m \cdot g \tag{C.24}$$

Das sieht im ersten Moment einigermassen unübersichtlich aus, lässt sich aber durch die Betrachtung der Ruhelage und die geschickte Einführung einer neuen Ortsvariable deutlich vereinfachen:

Ruhelage h_ruh: Mit h_ruh wollen wir die **Ruhelage** des Pendels bezeichnen. Auf dieser Höhe wird das reale Pendel aufgrund der Reibung nach längerer Zeit zum Stillstand kommen.

In dieser Ruhelage muss ein Kräftegleichgewicht zwischen Federkraft nach oben und Gewichtskraft nach unten herrschen ($F_\mathrm{res} = 0$). Daraus folgern wir:

$$F_\mathrm{res} = k \cdot h_\mathrm{ent} - k \cdot h_\mathrm{ruh} - m \cdot g \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad k \cdot h_\mathrm{ent} = k \cdot h_\mathrm{ruh} + m \cdot g \tag{C.25}$$

Ortsfunktion $s(t)$: Wir setzen nun diesen neuen Ausdruck für $k \cdot h_\mathrm{ent}$ in den Ausdruck (C.24) für die resultierende Kraft ein:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{res} &= k \cdot h_\mathrm{ent} - k \cdot h(t) - m \cdot g = k \cdot h_\mathrm{ruh} + m \cdot g - k \cdot h(t) - m \cdot g \\ &= k \cdot h_\mathrm{ruh} - k \cdot h(t) = k \cdot \big(h_\mathrm{ruh} - h(t)\big) = -k \cdot \big(h(t) - h_\mathrm{ruh}\big) \end{aligned}$$

Durch dieses Einbauen der Ruhelage hat sich die Gewichtskraft $m \cdot g$ heraus subtrahiert und auch die entspannte Höhe ist nicht mehr im Ausdruck für F_res enthalten!

Nochmals einfacher wird dieser Ausdruck, wenn wir die Höhenlage von der Ruhelage h_ruh aus angeben, also den örtlichen Nullpunkt in die Ruhelage verlegen. Wir wollen hierfür unsere Ortsfunktion $s(t)$ verwenden. Es sei also $s(t) = h(t) - h_\mathrm{ruh}$. Damit folgt:

$$F_\mathrm{res} = -k \cdot s(t) \tag{C.26}$$

Das sieht ja aus wie das Federgesetz (C.23)! Die resultierende Kraft ist also eine "zur Ruhelage rücktreibende Federkraft", denn $s(t)$ steht ja für die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage.

Parameterwerte und Startvorgaben zur Simulation des ungedämpften Federpendels

Mit dem Ausdruck (C.26) für F_res sind wir nun bereit für die Simulation, denn zu jedem beliebigen Zeitpunkt t können wir jetzt die Beschleunigung $a = \frac{F_\mathrm{res}}{m}$ berechnen.

Das Simulationspendel wollen mir mit folgenden Parameterwerten "ins Rennen schicken":

Anfangsbedingungen: Ich lasse das Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $s_0 = -10\,\mathrm{cm} = -0.1\,\mathrm{m}$ los. Der Graph von $s(t)$ müsste folglich einer vertikal gespiegelten Cosinuskurve entsprechen.

Federkonstante k und Masse m: Unser Federpendel besitze eine Federkonstante $k = 11\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ und die Masse des Pendels betrage $m = 150\,\mathrm{g} = 0.15\,\mathrm{kg}$.

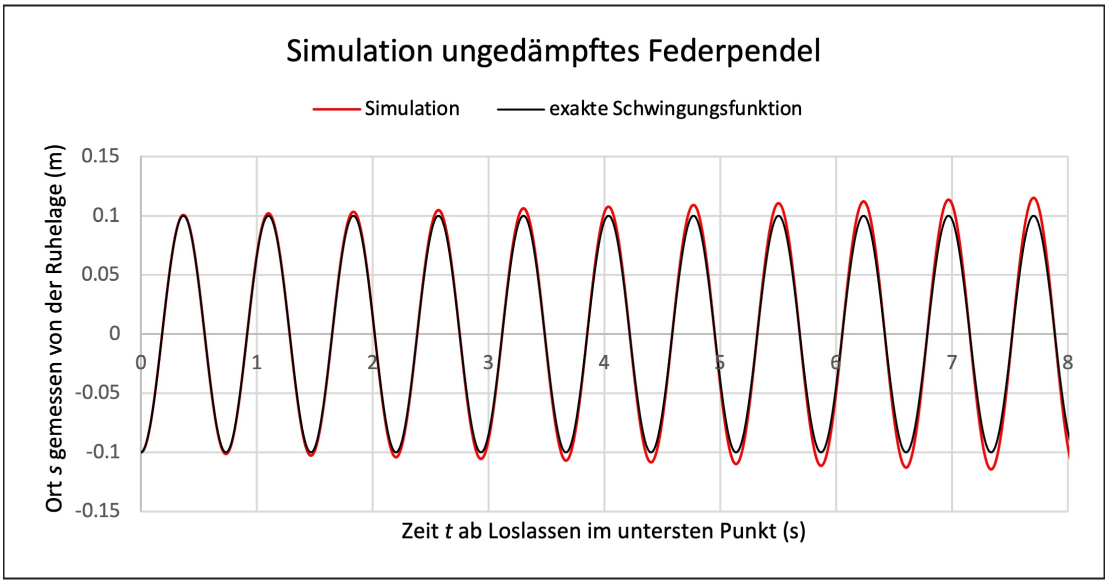


Abbildung C.7: Simulation des ungedämpften Federpendels. Zusätzlich eingetragen sind die Werte der exakten Sinus- resp. Cosinusfunktion, deren Amplitude konstant bleibt.

Diskussion der Simulation

Die in Abb. C.7 wiedergegebene Simulation arbeitet mit einem Zeitschritt $\Delta t = 1\,\mathrm{ms} = 0.001\,\mathrm{s}$ und verwendet die optimierte Streckenberechnung aus Gleichung (C.18). Was können wir darin im Vergleich mit den exakten Werten der mathematisch reinen Sinuskurve erkennen?

- Wie wir es schon bei der Simulation des senkrechten Wurfs gesehen hatten, ergeben sich nach und nach Abweichungen zwischen der Simulation und den exakten Werten. Hier summieren sich diese Abweichungen offenbar immer weiter auf, sodass die Amplitude zunächst langsam, dann aber immer schneller anwächst und die Simulation so immer falscher wird.

- Gleichzeitig ist bemerkenswert, dass die Frequenz der Simulation durchaus konstant zu bleiben scheint und auch dann noch mit der exakten Frequenz übereinstimmt, wenn die Amplitude "explodiert".

Moment mal! Woher kennen wir denn überhaupt den exakten Verlauf der ungedämpften Pendelschwingung?! Woher stammt die exakte Kurve in Abb. C.7? Wie ermitteln wir diese exakte Lösung, die hier offenbar existiert und durch eine Sinus- resp. Cosinusfunktion gegeben ist?

Nochmals anders gefragt: Wie legt das Pendel seine Frequenz fest? Natürlich haben wir darauf bereits "physikalische" Antworten: Je stärker die Feder, desto schneller wird das Pendel schwingen. Und: Je grösser das angehängte Gewicht, umso langsamer wird die Schwingung sein (Trägheit). Diese Antworten haben aber erst qualitativen Charakter. Wie die Frequenz effektiv von Federkonstante k und Pendelmasse m abhängt, wissen wir noch nicht genau. Ausserdem ist noch nicht geklärt, ob nicht auch die Amplitude einen Einfluss auf die Pendelfrequenz hat. Schwingt das Pendel nicht rascher, wenn ich das Gewicht am Anfang weiter nach unten ziehe und dann loslasse?

In den nächsten beiden Abschnitten werden wir uns die exakte Schwingungsfunktion mathematisch erarbeiten. Dabei gibt es enorm viel Neues zu sehen und zu verstehen. Tatsächlich blicken wir nun ein erstes Mal auf die tieferen mathematischen Strukturen der Newtonschen Mechanik!

C.6 Das Newtonsche Aktionsprinzip als Differentialgleichung

Das Aktionsprinzip beschreibt den Zusammenhang zwischen der Beschleunigung a und den auf den Körper wirkenden Kräften – Letztere werden zur resultierenden Kraft F_{res} zusammengefasst:

$$F_{\text{res}} = m \cdot a \tag{C.27}$$

Für die einzelnen in F_{res} enthaltenen Kräfte kennen wir typischerweise je ein **Kraftgesetz**, z.B. $F_{\text{G}} = m \cdot g$ für die Gewichtskraft, $F_{\text{F}} = k \cdot d$ für die Federkraft oder $F_{\text{L}} = c \cdot v^2$ für den Luftwiderstand. Diese Kraftgesetze hängen vom Ort s, von der Geschwindigkeit v und allenfalls von der Zeit t ab.[1] Wir können also die resultierende Kraft als Funktion von t, $s(t)$ und $v(t)$ auffassen und das Aktionsprinzip wie folgt notieren:

$$F_{\text{res}}\big(t, s(t), v(t)\big) = m \cdot a(t) \tag{C.28}$$

Und nun erinnern wir uns an den Abschnitt C.1 resp. an die Feststellung, dass die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ und die momentane Beschleunigung $a(t)$ als Ableitungen der Ortsfunktion $s(t)$ verstanden werden können (vgl. Gleichung (C.3)):

$$v(t) = s'(t) \qquad \text{und} \qquad a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Damit schreiben wir (C.28) nochmals neu:

$$F_{\text{res}}\big(t, s(t), s'(t)\big) = m \cdot s''(t) \tag{C.29}$$

Die vielen Funktionsklammern machen diese Gleichung etwas unübersichtlich. Deshalb verwende ich ab hier die Newtonsche **Punktnotation für Ableitungen nach der Zeit** (vgl. Anhang A). D.h., ich schreibe $\dot{s}$ statt $s'(t)$ und $\ddot{s}$ anstelle von $s''(t)$. Ausserdem lasse ich bei der Ortsfunktion $s(t)$ die Klammer weg – wir wissen, dass es sich um eine von der Zeit t abhängige Funktion handeln soll. Mit dieser Notation wird (C.29) zu:

$$F_{\text{res}}(t, s, \dot{s}) = m \cdot \ddot{s} \tag{C.30}$$

In dieser Form ist das Aktionsprinzip plötzlich ganz neu zu verstehen! Es handelt sich nun um eine Gleichung für die Ortsfunktion $s(t)$, die zu jedem beliebigen Zeitpunkt t erfüllt sein soll. Sie stellt eine Beziehung auf zwischen der 2. Ableitung $\ddot{s}$ auf der rechten Gleichungsseite und irgendeiner Kombination aus Variable t, Funktion s und 1. Ableitung $\dot{s}$, die auf der linken Seite in den verschiedenen Kraftgesetzen auftauchen können.

Differentialgleichungen

Gleichung *(C.30) gehört zu einem neuartigen Gleichungstyp! Ihre Lösungen sind nicht mehr einzelne Zahlen x, für die sie stimmt, sondern stattdessen ganze Funktionen $s(t)$, die die Gleichung zu allen Zeitpunkten t erfüllen!*

Weil in dieser Gleichung Ableitungen der gesuchten Funktion $s(t)$ auftreten, bezeichnen wir sie als **Differentialgleichung**.

Das Aktionsprinzip (C.27) ist also stets eine Differentialgleichung für die Ortsfunktion $s(t)$, denn auf der rechten Seite steht mit der Beschleunigung a auf jeden Fall die 2. Ableitung $\ddot{s}$ von $s(t)$.

[1] Zur Verdeutlichung einer von der Zeit t abhängigen Kraft füge ich hier ein Beispiel an: Angenommen, ich gebe dem Körper während einer halben Sekunde einen Stoss mit $45\,\text{N}$, so ist dies eine zeitlich eingeschränkte Kraftwirkung. Starte ich damit z.B. zum Zeitpunkt $t = 3\,\text{s}$, so lautet das Kraftgesetz für meine Stosskraft:

$$F_{\text{Stoss}}(t) = \begin{cases} 45\,\text{N} & \text{für } 3\,\text{s} < t < 3.5\,\text{s} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$F_{\text{Stoss}}(t)$ ist ganz offensichtlich eine direkt von der Zeit t abhängige Kraft. Mit der Abhängigkeit von t ist also nicht die indirekte Zeitabhängigkeit via $s(t)$ oder $v(t)$ gemeint.

Veranschaulichung am Beispiel der gleichmässig beschleunigten Bewegung

Da wir in der 1. Klasse noch nichts über die Differenzialrechnung, geschweige denn über Differentialgleichungen wussten, mussten wir uns in der Behandlung von Kraftsituationen auf die einfachst möglichen Fälle einschränken. Das waren diejenigen Situationen, in denen sich die verschiedenen Kräfte nicht verändern und die resultierende Kraft folglich konstant bleibt. Wir verstehen nun ganz genau, was das bedeutet:

$$F_{\text{res}} = m \cdot a = \text{konst.} \quad \overset{m=\text{konst.}}{\Rightarrow} \quad a = \ddot{s} = \text{konst.} \tag{C.31}$$

Verändert sich die Kraftsituation nicht ($F_{\text{res}} = \text{konst.}$), so beschleunigt der Körper gleichmässig. Die 2. Ableitung $\ddot{s}$ der Ortsfunktion s muss eine konstante Funktion sein.

Nun sind konstante Funktionen Polynome 0. Grades: $\ddot{s} = a_0 \cdot t^0$. Dann muss aber die Ortsfunktion s selber ein Polynom 2. Grades sein, denn nur quadratische Funktionen haben die Eigenschaft, dass ihre zweite Ableitung eine Konstante ist.

Tatsächlich wissen wir ganz genau, wie s in diesem Fall aussieht. Den Zusammenhang hatten wir nämlich bereits am Ende des Abschnittes C.1 im Beispiel oben auf Seite 57 festgehalten:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad v(t) = \dot{s} = v_0 + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad a(t) = \ddot{s} = a \tag{C.32}$$

Bemerke (!!!): Zur selben konstanten Beschleunigung $a = \text{konst.}$ gibt es offenbar unendlich viele Ortsfunktionen $s(t)$ mit $\ddot{s} = a$. Die beiden Parameter s_0 und v_0 verschwinden nämlich bei der zweimaligen Ableitung und können folglich im Prinzip beliebig gewählt werden. Für die Erfüllung der Differentialgleichung sind sie irrelevant.

Allgemeine Aussagen zu Differentialgleichungen

Ordnung einer Differentialgleichung: Ist die n-te Ableitung die höchste Ableitung, mit der die gesuchte Funktion in einer Differentialgleichung auftritt, so sprechen wir von einer **Differentialgleichung n-ter Ordnung**.

Das Newtonsche Aktionsprinzip $F_{\text{res}} = m \cdot \ddot{s}$ ist also stets eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Ortsfunktion $s(t)$.

Allgemeine Lösung und frei wählbare Parameter: Alle von uns betrachteten Funktionen sind Vorschriften, wie eine erste reelle Zahl auf eine zweite reelle Zahl abgebildet werden soll ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Bei Differentialgleichungen für solche “einfachen” Funktionen gilt: Die **allgemeine Lösung** einer Differentialgleichung n-ter Ordnung weist genau n **frei wählbare Parameter** auf.

Die allgemeine Lösung für eine Ortsfunktion $s(t)$, die wir aus dem Newtonschen Aktionsprinzip $F_{\text{res}} = m \cdot \ddot{s}$ erhalten, enthält somit stets zwei frei wählbare Parameter, denn es handelt sich ja immer um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Rand- resp. Anfangsbedingungen: Häufig suchen wir nach einer ganz bestimmten Lösung der Differentialgleichung, also für eine Funktion, bei der die frei wählbaren Parameter ebenfalls festgelegt sind. Dazu benötigen wir bei einer Differentialgleichung n-ter Ordnung n zusätzliche Gleichungen, die in der Mathematik als **Randbedingungen** bezeichnet werden.

Haben wir zu einer Kraftsituation aus dem Newtonschen Aktionsprinzip $F_{\text{res}} = m \cdot \ddot{s}$ die allgemeine Lösung für die Ortsfunktion $s(t)$ bestimmt, so benötigen wir zwei weitere Angaben, um die darin auftretenden frei wählbaren Parameter für das konkrete Problem festzulegen. In der Regel sind dies die sogenannten **Anfangsbedingungen**, also vorgegebene Werte für den Startort $s_0 = s(0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \dot{s}(0)$.

Der senkrechte Wurf ohne Luftwiderstand als konkretes Beispiel

Beim senkrechten Wurf ohne Luftwiderstand ist F_G die einzige wirkende Kraft und somit auch gleich F_res. Zeigt die Ortsachse nach oben, so ist es eine negative Kraft. Wir notieren das Aktionsprinzip als Differentialgleichung und folgern für die 2. Ableitung der Ortsfunktion:

$$F_\text{res} = F_\text{G} = -m \cdot g \overset{!}{=} m \cdot \ddot{s} \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = -g = \text{konst.} \tag{C.33}$$

Wir haben genau den Fall einer glecihmässig beschleunigten Bewegung vor uns, denn die Beschleunigung $\ddot{s}$ ist eine konstante Funktion. Die allgemeine Lösung für die Ortsfunktion lautet somit:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \tag{C.34}$$

Wird vorgegeben, von welcher Höhe s_0 aus und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 der senkrechte Wurf gestartet wird, so legen diese beiden Anfangsbedingungen genau eine bestimmte Ortsfunktion $s(t)$ fest.

Nochmals: Egal, ob ich einen Stein vom Boden in die Luft schleudere, ihn von einem Turm falle lasse oder ihn in einen Brunnenschacht hinunterwerfe, die Ortsfunktion wird durch (C.34) beschrieben. Die Anfangsbedingungen s_0 und v_0 haben in jeder dieser Situationen andere Werte, lösen aber alle die Differentialgleichung (C.33). Letztere umfasst alle möglichen senkrechten Würfe ohne Luftwiderstand!

Der senkrechte Wurf mit Luftwiderstand

Die Differentialgleichung (C.33) für den senkrechten Wurf war sehr einfach, eben weil sich die auf das Objekt wirkende resultierende Kraft nicht verändert. Geben wir einen quadratisch von der Geschwindigkeit abhängenden Luftwiderstand hinzu, so landen wir bezüglich der resultierenden Kraft bei Gleichung (C.20) auf Seite C.20. Formulieren wir damit das Aktionsprinzip:

$$F_\text{res} = F_\text{G} + F_\text{L} = -m \cdot g - c \cdot v \cdot |v| \overset{!}{=} m \cdot a \tag{C.35}$$

Beträge sind in ihrer Handhabung manchmal etwas mühsam. Hier arbeiten wir am besten mit einer Fallunterscheidung, einmal für $v > 0$ (Körper während des Aufstiegs) und einmal für $v < 0$ (Körper im Fallen).

Ich betrachte hier nur den zweiten Fall. Der Körper sei also am Fallen, sodass für alle betrachteten Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v(t) < 0$ ist. Dann lautet das Aktionsprinzip resp. die daraus folgende Differentialgleichung für $s(t)$:

$$\textbf{Fallen:} \quad -m \cdot g + c \cdot v^2 = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad -m \cdot g + c \cdot \dot{s}^2 = m \cdot \ddot{s} \tag{C.36}$$

Die Geschwindigkeit des Objekts nähert sich immer mehr einer Endgeschwindigkeit an, die sich aus dem Kräftegleichgewicht $|F_\text{G}| = |F_\text{L}|$ ergibt:

$$m \cdot g = c \cdot v_\text{end}^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{m \cdot g}{v_\text{end}^2} \tag{C.37}$$

Setzen wir diesen Ausdruck für den Luftwiderstandsparameter c in die Differentialgleichung (C.36) ein, so kürzt sich die Masse heraus und wir schreiben:

$$-m \cdot g + \frac{m \cdot g}{v_\text{end}^2} \cdot \dot{s}^2 = m \cdot \ddot{s} \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = g \cdot \left(\frac{\dot{s}^2}{v_\text{end}^2} - 1 \right) \tag{C.38}$$

v_end darf übrigens als bekannter Parameter angenommen werden, denn die Endgeschwindigkeit hängt einfach davon ab, was für ein Objekt (Fläche, Dichte, Form) sich durch welches Medium (Gas mit bestimmter Dichte) bewegt.

Tatsächlich lässt sich die Differentialgleichung (C.38) lösen, allerdings tritt dabei mit dem **Cosinus hyperbolicus** $\cosh x$ ein Funktionstyp auf, den wir im Rahmen der Gymi-Mathematik nicht untersuchen. Die allgemeine Lösung lautet:

$$s(t) = \alpha - \frac{v_{\text{end}}^2}{g} \cdot \left[\ln\left(\cosh\left(\frac{g \cdot (\beta - t)}{v_{\text{end}}} \right) \right) - \ln\left(\cosh\left(\frac{g \cdot \beta}{v_{\text{end}}} \right) \right) \right] \tag{C.39}$$

Diesen komplizierten Ausdruck wollen wir gar nicht näher verstehen. Es sei aber darauf hingewiesen, dass er zwei Parameter α und β enthält, die so zu wählen sind, dass $s(0) = s_0$ und $\dot{s}(0) = v_0$ sind. D.h., die allgemeine Lösung (C.39) enthält zwei frei wählbare Parameter, die uns aus der Vielzahl von Lösungen für die Differentialgleichung (C.38) die eine Lösung herauspicken lassen, die zu den Anfangsbedingungen – Startort s_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 – passt!

N.B.: Für $t = 0$ sieht man sehr rasch, dass der Ausdruck in der eckigen Klammer gleich 0 wird. Somit ist $s(0) = \alpha$ und demnach muss $\alpha = s_0$ sein.

Die Lösbarkeit von Differentialgleichungen

Das vorige Beispiel mit der Differentialgleichung (C.38) und zugehöriger allgemeiner Lösung (C.39) lässt erahnen, dass das Lösen von Differentialgleichungen echt kompliziert werden kann. Dabei ist (C.38) noch gar kein sonderlich schwieriger Fall!

Oftmals ist es sogar so, dass sich eine Differentialgleichung gar nicht **analytisch** lösen lässt, d.h., man kann ihre allgemeine Lösung nicht mit den bekannten elementaren Funktionen (Potenzen, Sinus, Logarithmus, Exponentialfunktion, Cosinus hyperbolicus, etc.) ausdrücken. In diesem Fall lässt sie sich nur mit dem Computer "lösen" ($\approx$ Simulation). Das ist natürlich nicht ganz befriedigend, denn man sieht dann nicht direkt in einer Funktionsgleichung, wie die Lösung von den Gleichungsparametern abhängt. Ganz unzufrieden dürfen wir damit aber auch nicht sein, denn den Zeitschritt Δt können wir im Computer praktisch beliebig klein wählen und somit auch über längere Zeiten hinweg genaue Voraussagen erhalten.

C.7 Herleitung der exakten Lösung beim ungedämpften Federpendel

Wir wollen nun zum Schluss dieses Exkurses in die Newtonsche Mechanik und die Welt der Differentialgleichungen noch ein Paradebeispiel komplett durchgehen. Es handelt sich um den **harmonischen Oszillator**, den wir unter dem Namen **ungedämpftes Federpendel** bereits kennengelernt haben. Harmonische Oszillatoren spielen in der theoretischen Physik eine sehr wichtige Rolle. Z.B. können Schwingungszustände von Molekülen in erster Näherung als harmonische Oszillationen aufgefasst werden, denn in der Welt der kleinen Teilchen gibt es keine Reibung.

Am Ende von Abschnitt C.5 hatten wir uns gefragt, woher wir denn so genau wissen, dass die exakte Ortsfunktion $s(t)$ des ungedämpften Federpendels eine Sinus- resp. Cosinusfunktion sein muss. Diese Frage können wir nun dank unserem Wissen über Differentialgleichungen schlüssig beantworten.

Beginnen wir beim Ausdruck aus Gleichung (C.26) für die resultierende Kraft beim Federpendel:

$$F_{\text{res}} = -k \cdot s(t) \tag{C.40}$$

Zur Erinnerung: $s(t)$ ist die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage. k ist die Federkonstante der Spiralfeder. Die resultierende Kraft ist eine rücktreibende Kraft, d.h., sie versucht stets das Pendel in seine Ruhelage zurückzubewegen – daher das Minuszeichen. Gemäss dem Federgesetz ist sie proportional zur Auslenkung $s(t)$.

Wir benutzen nun das Aktionsprinzip $F_{\text{res}} = m \cdot a$ um aus (C.40) eine Differentialgleichung für die Ortsfunktion $s(t)$ zu gewinnen:

$$F_{\text{res}} = -k \cdot s(t) \overset{!}{=} m \cdot a \quad \Rightarrow \quad -k \cdot s = m \cdot \ddot{s} \tag{C.41}$$

Diese Gleichung wollen wir gleich noch etwas umstellen, indem wir durch die Pendelmasse m teilen:

$$\textbf{Differentialgleichung zum Federpendel:} \qquad \ddot{s} = -\frac{k}{m} \cdot s \tag{C.42}$$

Von der Intuition zum Funktionsansatz

Die Differentialgleichung (C.42) fragt: "Welche Funktion $s(t)$ hat die Eigenschaft, dass ihre 2. Ableitung $\ddot{s}$ das Negative der Funktion selber ist?"

Wer sich in den Funktionsableitungen auskennt, wird sofort ausrufen: *"Die Sinusfunktion!"* Klar: $[\sin x]' = \cos x$ und $[\cos x]' = -\sin x$, also in der Kombination: $[\sin x]'' = -\sin x$.

"Aber Cosinus doch auch!" ruft jemand anders. Tatsächlich: $[\cos x]'' = [-\sin x]' = -\cos x$.

Und schon haben wir zwei einzelne Lösungen gefunden – zumindest fast: Irgendwie muss auch noch der Bruch $\frac{k}{m}$ entstehen. Dieses Problem wird sich aber fast von selber lösen, wie wir gleich sehen werden. Zunächst stellen wir einfach fest, dass die Sinus- aber auch die Cosinusfunktion als Kandidaten für eine Lösung in Frage kommen.

Diese Schwingungsfunktionen sollen von der Zeit t abhängen. Dafür schreiben wir in aller Regel $\sin(\omega\, t)$ resp. $\cos(\omega\, t)$, wobei ω für die **Kreisfrequenz** steht, die wie folgt mit der **Frequenz** f und der **Periode** T der Schwingung zusammenhängt:

$$\textbf{Kreisfrequenz:} \qquad \omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \tag{C.43}$$

Sowohl die Sinus-, als auch die Cosinusfunktion kommen für die Lösung in Frage. Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (C.42) setzen wir daher an:

$$\textbf{Funktionsansatz:} \qquad s(t) = A \cdot \sin(\omega\, t) + B \cdot \cos(\omega\, t) \tag{C.44}$$

Zunächst ist dieser Ansatz ein Resultat der Intuition, den wir verstehen, weil wir über die Ableitungseigenschaften von Sinus und Cosinus Bescheid wissen.

Dass wir eine Summe einer Sinus- und einer Cosinusfunktion notieren, ist aber gut begründet, nämlich durch die **Ableitungsregel für Summen resp. Differenzen**, die schon vor Langem, nämlich im Abschnitt 2.3 kennengelernt hatten. Erfüllen $A \cdot \sin(\omega\, t)$ und $B \cdot \cos(\omega\, t)$ einzeln die Differentialgleichung (C.42), so gilt das sicher auch für ihre Summe.

Ableitungen des Funktionsansatzes

Natürlich müssen wir nun aber überprüfen, ob unser Ansatz wirklich passt. Dafür leiten wir ihn zweimal ab und setzen ihn danach in die Differentialgleichung (C.42) ein:

$$\begin{aligned}
& s(t) = s = A \cdot \sin(\omega\, t) + B \cdot \cos(\omega\, t) \\
\Rightarrow \qquad & v(t) = \dot{s} = A \cdot \cos(\omega\, t) \cdot \omega - B \cdot \sin(\omega\, t) \cdot \omega \\
& \phantom{v(t) = \dot{s}} = \omega \cdot \big(A \cdot \cos(\omega\, t) - B \cdot \sin(\omega\, t)\big) \\
\Rightarrow \qquad & a(t) = \ddot{s} = \omega \cdot \big(-A \cdot \sin(\omega\, t) \cdot \omega - B \cdot \cos(\omega\, t) \cdot \omega\big) \\
& \phantom{a(t) = \ddot{s}} = -\omega^2 \cdot \big(A \cdot \sin(\omega\, t) + B \cdot \cos(\omega\, t)\big) \\
& \phantom{a(t) = \ddot{s}} = -\omega^2 \cdot s
\end{aligned}$$

Dabei springt bei jedem Ableitungsschritt ein Faktor ω aus der Sinus- resp. aus der Cosinusfunktion heraus – Stichworte: Kettenregel und innere Ableitung!

Zurückeinsetzen in die Differentialgleichung und Folgerungen

Jetzt setzen wir diese zweite Ableitung in die Differentialgleichung (C.42) ein:

$$\ddot{s} = -\frac{k}{m} \cdot s \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 \cdot s = -\frac{k}{m} \cdot s \tag{C.45}$$

Das ist ein tolles Zwischenresultat, denn nun bemerken wir, dass wir $-s$ herauskürzen können und somit die in $s(t)$ enthaltene Zeitvariable t gar nicht mehr in der Gleichung auftritt:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{C.46}$$

Das bedeutet, unser Ansatz (C.44) erfüllt die Differentialgleichung (C.42) zu jedem beliebigen Zeitpunkt t. Er ist somit goldrichtig! Allerdings sind nicht beliebige Kreisfrequenzen ω erlaubt. Vielmehr muss gelten:

$$\textbf{Festlegung der Kreisfrequenz:} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{C.47}$$

Damit wissen wir endlich, wie die Frequenz der Pendelschwingung festgelegt wird! Das ist ein starkes Resultat, das wir erst aufgrund des Verständnisses für die Differentialrechnung resp. für Differentialgleichungen erhalten konnten. Nun ist übrigens auch klar, weshalb in der Sinus- und in der Cosinusfunktion dieselbe Kreisfrequenz auftaucht. Das hätten wir anfangs anders ansetzen können, aber an dieser Stelle hätten wir entdeckt, dass beide Teile dieselbe Kreisfrequenz beinhalten müssen.

Vollständigkeit des Funktionsansatzes?

Ist unser Funktionsansatz vollständig? Gäbe es nicht noch weitere Funktionen, die wir zur Sinus- und zur Cosinusfunktion hinzuaddieren könnten, weil sie für sich selber ebenfalls die Differentialgleichung (C.42) erfüllen?

Die Antwort lautet: Nein! Unser Funktionsansatz ist tatsächlich die vollständige allgemeine Lösung zu (C.42).

Diese Sicherheit ist für uns zum jetzigen Zeitpunkt nur bedingt plausibel, weil wir uns noch nicht vertieft mit Differentialgleichungen auseinandergesetzt haben (und dies im Rahmen der Gymi-Mathematik auch weiterhin höchstens mal am Rande tun werden). Es ist aber eine Tatsache, dass das Newtonsche Aktionsprinzip, wie wir es in Gleichung (C.30) auf Seite 66 formuliert haben, eine normale Differentialgleichung 2. Ordnung ist und dass die allgemeine Lösung einer solchen Differentialgleichung stets genau zwei unabhängige Parameter enthält, die durch Rand- resp. Anfangsbedingungen festgelegt werden.

Im aktuellen Fall des harmonischen Oszillators resp. des Federpendels sind die beiden Amplituden A und B diese beiden unabhängigen Parameter. Gäbe es neben der Sinus- und der Cosinusfunktion noch eine dritte Funktion, die die Differentialgleichung (C.42) lösen würde, so könnten wir sie ebenfalls mit einem unabhängigen Vorfaktor C versehen und in der allgemeinen Lösung hinzuaddieren. Dann hätten wir aber bereits drei unabhängige Parameter, also zu viele für eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Daher muss der Funktionsansatz $s(t) = A \cdot \sin(\omega\, t) + B \cdot \cos(\omega\, t)$ vollständig sein.

Welche Werte die beiden Amplituden A und B ganz konkret haben, muss sich aus unseren Anfangsbedingungen ergeben. Dazu in Kürze mehr.

An diesem Punkt wollen wir es aber nicht verpassen zu bemerken, dass die Amplituden A und B für die Kreisfrequenz ω (also für die Frequenz f und für die Periode T) keine Rolle spielen. Egal, wie stark das Federpendel gerade ausschlägt, ein einmaliges Auf und Ab wird stets gleich viel Zeit beanspruchen und das Pendel wird pro Sekunde stets gleich viele Schwingungen absolvieren!

Bestimmung der Amplituden A und B aus den Anfangsbedingungen

In der Pendelsimulationvon Abschnitt C.5 hatten wir deklariert, wie das Federpendel gestartet werden soll: Ich ziehe die Pendelmasse aus der Ruhelage ($s = 0$) um $10\,\mathrm{cm}$ nach unten und lasse dann los. Das Pendel hat zu Beginn also keine Geschwindigkeit. Unsere **Anfangsbedingungen** lauten somit:

$$s_0 = s(0) = -0.1\,\mathrm{m} \qquad \text{und} \qquad v_0 = \dot{s}(0) = 0 \tag{C.48}$$

Wie müssen A und B gewählt werden, damit diese Anfangsbedingungen erfüllt sind? Durch Einsetzen des Zeitpunktes $t = 0$ in unseren Funktionsansatz finden wir:

$$s(0) = A \cdot \sin(\omega \cdot 0) + B \cdot \cos(\omega \cdot 0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = B \overset{!}{=} -0.1\,\mathrm{m}$$

Damit kennen wir bereits den Parameter B. Um den Wert von A zu bestimmen, setzen wir $t = 0$ in die 1. Ableitung von $s(t)$, also in die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ ein:

$$\begin{aligned} & v(t) = \dot{s} = A \cdot \cos(\omega\, t) \cdot \omega - B \cdot \sin(\omega\, t) \cdot \omega = \omega \cdot \big(A \cdot \cos(\omega\, t) - B \cdot \sin(\omega\, t)\big) \\ \Rightarrow \quad & v(0) = \omega \cdot \big(A\, \cos(\omega \cdot 0) - B\, \sin(\omega \cdot 0)\big) = \omega \cdot (A \cdot 1 - B \cdot 0) = \omega\, A \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir A und B ermittelt und können die exakte Ortsfunktion $s(t)$ zu unserer Pendelschwingung notieren:

$$s(t) = A\, \sin(\omega\, t) + B\, \cos(\omega\, t) = 0 \cdot \sin(\omega\, t) - 0.1\,\mathrm{m} \cdot \cos(\omega\, t) = -0.1\,\mathrm{m} \cdot \cos(\omega\, t) \tag{C.49}$$

Abschluss: Die exakte Ortsfunktion zur Simulation der ungedämpften Pendelschwingung

Zum Schluss berechne ich der Vollständigkeit halber noch Kreisfrequenz, Frequenz und Periode zu unserer Pendelsimulation. Gegeben waren dort die Federkonstante $k = 11\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ und die angehängte Pendelmasse $m = 0.15\,\mathrm{kg}$, woraus folgt:[2]

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{11\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{0.15\,\mathrm{kg}}} = 8.56\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Mit $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ finden wir daraus:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9.66\,\frac{1}{\mathrm{s}}}{2\pi} = 1.36\,\mathrm{Hz} \qquad \text{und} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9.66\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 0.734\,\mathrm{s}$$

In Abb. C.7 auf Seite 65 zu unserer Federpendelsimulation ist insbesondere die Periodenlänge – eine knappe Dreiviertelsekunde – gut zu erkennen. Nun können wir endlich die vollständige Funktionsgleichung für die dort eingezeichnete exakte Ortsfunktion angeben und wissen, wo sie herkommt:

$$s(t) = -0.1\,\mathrm{m} \cdot \cos\left(8.56\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right) \tag{C.50}$$

Wie damals schon bemerkt handelt es sich um eine negative Cosinusfunktion, die also zum Zeitpunkt $t = 0$ eben in ihrem untersten Punkt startet.

[2] Für die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ω könnte man auch $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ schreiben, um explizit zu zeigen, dass es sich um eine Winkelgeschwindigkeit (Winkel im Bogenmass pro Zeitspanne) handelt.

Anhang D

Kurvendiskussion von Polynombrüchen

In diesem Kapitel wenden wir uns einmal mehr den **Polynomen** zu. Dabei entdecken wir weitere interessante Eigenschaften, die sich dank der Differentialrechnung gut verstehen lassen.

Die neuerliche Betrachtung von Polynome ist aber nur der erste Schritt. Im weiteren Verlauf des Kapitels wollen wir mehr über sogenannte **Polynombrüche** oder **gebrochen-rationale Funktionen** erfahren. Das sind Funktionen, die durch einen Bruch aus einem Zähler- und einem Nennerpolynom gegeben sind. Dank der Quotientenregel sind wir in der Lage, derartige Funktion ebenfalls mittels der Differentialrechnung zu untersuchen. Im Zuge der Kurvendiskussion von Polynombrüchen interessieren wir uns dann auch für das **asymptotische Verhalten** von Polynombrüchen für $|x| \to \infty$ und bei Polstellen, also bei Nullstellen des Nennerpolynoms.

D.1 Linearfaktoren und Faktorisierung von Polynomen

$P_n(x)$ sei ein Polynom vom Grad n und besitze bei x_1 eine Nullstelle, sodass gilt: $P_n(x_1) = 0$. Dann muss sich eine Klammer $(x - x_1)$ aus $P_n(x)$ ausklammern lassen:

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot \underbrace{\left(b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ \ldots + b_1 \cdot x + b_0\right)}_{= P_{n-1}(x)}$$

Die Klammer $(x - x_1)$ bezeichnen wir als **Linearfaktor**, weil $x - x_1$ eine lineare Funktion von x ist. $P_n(x)$ ist also das Produkt aus einem Polynom $P_{n-1}(x)$ vom Grad $n - 1$ und dem zur Nullstelle x_1 gehörenden Linearfaktor $(x - x_1)$.

Beispiel: Betrachten wir zur Veranschaulichung das folgende Polynom 4. Grades:

$$P_4(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$$

Dieses Polynom weist bei $x_1 = 1$ eine Nullstelle auf, denn $P_4(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$, sodass sich der Linearfaktor $(x - x_1) = (x - 1)$ ausklammern lässt:

$$P_4(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2 = (x - 1) \cdot \underbrace{\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 2\right)}_{= P_3(x)}$$

Neben dem Linearfaktor $(x - 1)$ steht nun ein Polynom 3. Grades $P_3(x)$. Dieses enthält – wie jedes Polynom ungeraden Grades – mindestens eine weitere Nullstelle. Tatsächlich ist $x_2 = -2$ eine Nullstelle von $P_3(x)$, denn $P_3(-2) = -8+12-6+2 = 0$. Wir können also einen weiteren Linearfaktor $(x + 2)$ herausziehen:

$$P_4(x) = (x - 1) \cdot \left(x^3 + 3x^2 + 3x + 2\right) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{= P_2(x)}$$

Das neu entstandene Polynom $P_2(x) = x^2 + x + 1$ enthält keine weiteren Nullstellen mehr, denn seine Diskriminante ist negativ ($D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$). Aus $P_4(x)$ lässt sich neben $(x-1)$ und $(x+2)$ kein weiterer Linearfaktor ausklammern. Deshalb nennen wir $P_4(x) = (x-1)(x+2)(x^2+x+1)$ die **vollständige Faktorisierung** von $P_4(x)$. Wir könnten auch von seiner **Nullstellenform** sprechen, weil die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$ in den beiden Linearfaktoren $(x-1)$ und $(x+2) = \big(x-(-2)\big)$ direkt sichtbar sind.

Natürlich wäre es denkbar, dass sich bei einem anderen Polynom 4. Grades auch noch $P_2(x)$ in zwei weitere Nullstellenklammern $P_2(x) = (x-x_3)(x-x_4)$ zerlegen liesse. Danach wäre aber garantiert Schluss – die Zerlegung könnte dann vollständiger nicht mehr sein. Wir hätten am Ende vier Nullstellen x_1, x_2, x_3 und x_4 gefunden und dies wäre das absolute Maximum.

Ein Polynom 4. Grades kann also in maximal vier Linearfaktoren zerlegt werden und besitzt somit maximal vier Nullstellen!

Diese Aussage wollen wir gleich verallgemeinern, denn obige Überlegungen lassen sich ja prinzipiell mit einem Polynom jeden beliebigen Grades anstellen:

Maximale Anzahl Nullstellen eines Polynoms

Jedes Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen und kann somit in maximal n Linearfaktoren zerlegt werden.

Mit der Differentialrechnung folgen daraus sofort mehrere Aussagen für den Graphen einer Polynomfunktion. Beim Ableiten eines Polynoms entsteht ja stets ein neues Polynom, dessen Grad wegen der Potenzregel um 1 kleiner ist als derjenige des ursprünglichen Polynoms. Daraus schliessen wir:

Grafische Eigenschaften eines Polynoms vom Grad n

Der Graph eines Polynoms vom Grad n weist höchstens n Nullstellen auf, hat maximal $n-1$ Horizontal- und maximal $n-2$ Wendepunkte.

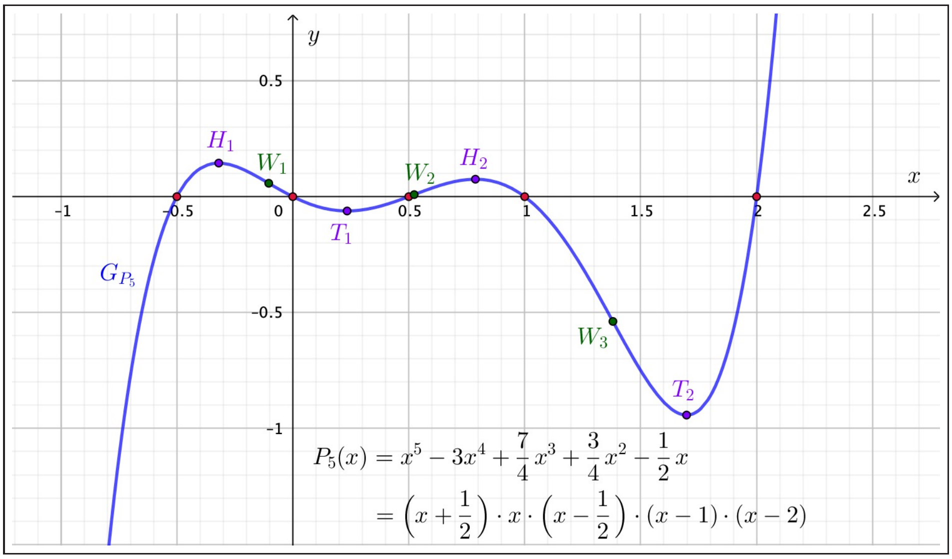


Abbildung D.1: $P_5(x)$ ist ein Polynom 5. Grades, das sich komplett in Linearfaktoren zerlegen lässt. Der Graph dazu durchläuft die zugehörigen fünf Nullstellen, weist vier Extrema (H und T) auf und hat drei Wendepunkte W.

Beispiel: Wir betrachten ein Polynom 5. Grades mit bekannter vollständiger Faktorisierung:

$$P_5(x) = x^5 - 3x^4 + \frac{7}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

Bemerke: $x = (x - 0)$ ist auch ein Linearfaktor!

$P_5(x)$ lässt sich komplett in Linearfaktoren zerlegen. Die Funktion besitzt fünf Nullstellen. Abb. D.1 zeigt den Graphen, der sich durch diese Stellen auf der x-Achse schlängelt. Die 1. Ableitung von ist ein Polynom 4. Grades, das höchstens vier Nullstellen aufweist. Somit kann der Graph von $P_5(x)$ maximal vier Extrema aufweisen, was in diesem Beispiel tatsächlich so ist. Weiter gibt es maximal drei Wendepunkte, die wir ebenfalls in Abb. D.1 zu sehen bekommen.

D.2 Die Vielfachheit von Nullstellen

Bei der vollständigen Faktorisierung eines Polynoms stellt man manchmal fest, dass sich ein- und derselbe Linearfaktor mehrfach ausklammern lässt. Er kommt dann in der vollständig faktorisierten Form mehrfach vor, was wir als Potenz mit einem Exponenten > 1 zusammenfassen.

Beispiel 1: In Abb. D.2 betrachten wir den Graphen zu folgendem Polynom 3. Grades:

$$P_3(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - 6x - 5 = -\frac{1}{4}(x+2)^2(x+5)$$

Wir sagen: "Die Nullstelle $x_1 = -2$ hat die **Vielfachheit** 2", oder: "$x_1 = -2$ ist eine **zweifache Nullstelle**". Gleichzeitig ist $x_2 = -5$ eine einfache Nullstelle. Ihre Vielfachheit beträgt 1.

Wie zu sehen ist, durchsticht der G_{P_3} bei der einfachen Nullstelle $x_2 = -5$ die x-Achse, während sie bei der doppelten Nullstelle $x_1 = -2$ nur berührt wird.

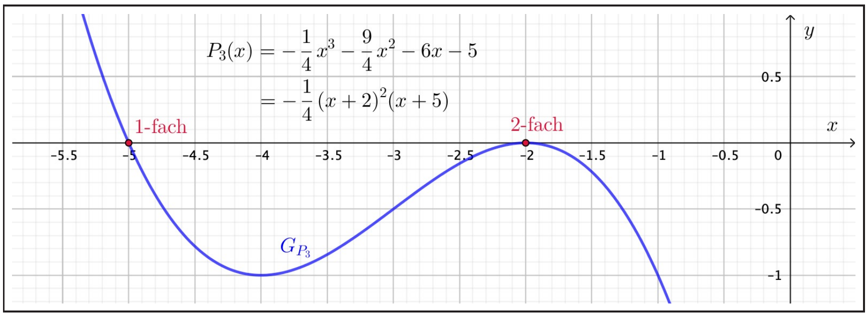


Abbildung D.2: Bei einfachen Nullstellen wird die x-Achse durchstossen, bei doppelten nur berührt.

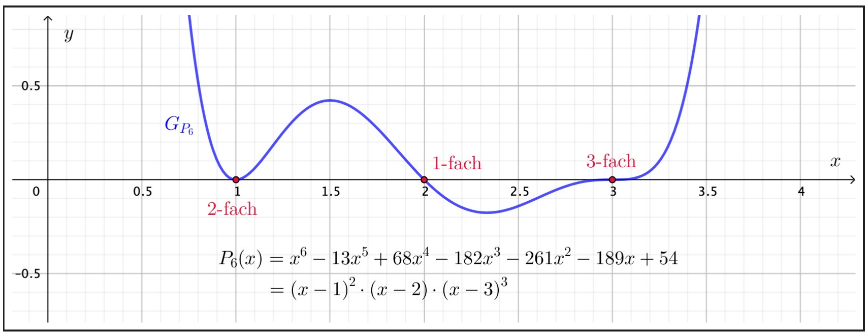


Abbildung D.3: Nullstellen haben aufgrund ihrer Vielfachheiten unterschiedliche Qualitäten.

Beispiel 2: Abb. D.3 zeigt den Graphen eines Polynoms vom Grad 6 mit einer einfachen, einer doppelten und einer dreifachen Nullstelle. Bei der einfachen und bei der doppelten Nullstelle verhält sich der Graph so, wie wir das eben bereits gesehen haben, bei der dreifachen Nullstelle entdecken wir einen Sattelpunkt.

Das Aussehen von Polynomgraphen bei Nullstellen hängt also von der Vielfachheit der Nullstelle ab. Wir wollen uns merken:

> **Aussehen des Graphen eines Polynoms bei einer Nullstelle**
>
> *Bei einer* **einfachen Nullstelle** *durchquert der Graph die x-Achse mit einer von Null verschiedenen Steigung.*
>
> *Bei einer* **mehrfachen Nullstelle** *verläuft der Graph eines Polynoms stets horizontal und es gilt:*
>
> - *Bei* **gerader Vielfachheit** *(2, 4, 6, ...) besteht ein* **Extremum**.
> - *Bei* **ungerader Vielfachheit** *(3, 5, 7, ...) besteht ein* **Sattelpunkt**.

Diese Aussagen lassen sich mit etwas Differentialrechnung relativ einfach beweisen. Das werden wir in einer Übungsaufgabe erledigen.

D.3 Polynomdivision

Das Ausklammern eines Linearfaktors resp. die Faktorisierung eines Polynoms konnten wir bis anhin bei quadratischen Funktionen mit etwas Übung sicher ausführen (binomische Formeln, Zweiklammeransatz, Mitternachtsformel). Nun ist es aber an der Zeit, dafür ein Rezept kennenzulernen, das auch bei Polynomen höheren Grades zuverlässig funktioniert. Diesen Faktorisierungsalgorithmus nennen wir **Polynomdivision**.

Rep.: Primarschul-Stöcklirechnen

Wie wir gleich sehen werden, ist die Polynomdivision in ihrer Ausführung direkt vergleichbar mit dem "Stöcklirechnen" für die Division. Repetieren wir diesen Rechenalgorithmus am Beispiel $5941 : 13$:

$$
\begin{array}{r l}
 & \;\;5\;9\;4\;1\;:\;1\;3 = \underline{\underline{4\;5\;7}} \\
-4\cdot 13\,(00) = & \underline{-\;5\;2\;\;} \\
 & \quad\;\;\,7\;4 \\
-5\cdot 13\,(0) = & \quad \underline{-\;6\;5\;\;} \\
 & \qquad\;\;\;9\;1 \\
-3\cdot 27 = & \qquad \underline{-\;9\;1} \\
 & \qquad\qquad\;\;0
\end{array}
$$

Nicht bereits 5, sondern erst 59 enthält mindestens einmal 13. Somit teilen wir zuerst $59 : 13$. Das ergibt 4 Rest 7. Die 4 ist die erste Stelle unseres Endresultates. Den Rest 7 erhalten wir, indem wir $4 \cdot 13$ von 59 subtrahieren. Das wird in der zweiten Zeile sichtbar gemacht.

Danach nehmen wir zur 7 die nächste noch nicht verwendete Stelle von 5941 hinzu, also 4. So erhalten wir die Zahl 74, die wir wieder durch 13 teilen. Das ergibt 5 Rest 9. Die 5 ist folglich die nächste Stelle unseres Endresultates.

Zur 9 nehmen wir schliesslich die letzte Stelle der anfänglichen Zahl 5941 hinzu, also die 1. So erhalten wir die letzte Zahl, die durch 13 geteilt werden muss, nämlich 91. Diese Division geht auf und wir erhalten als letzte Ziffer des Endresultates die 7.

Der Algorithmus der Polynomdivision an einem Beispiel

Der Wortteil "Division" verrät bereits, worum es geht. Ein erstes Polynom soll durch ein Zweites geteilt werden. Z.B. muss ich ja bei der Faktorisierung von $P_4(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$ mit Nullstelle $x_1 = 1$ durch den Linearfaktor $(x-1)$ teilen, um $P_3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ zu erhalten (vgl. S. 73):

$$P_4(x) = (x-1) \cdot P_3(x) \quad \Rightarrow \quad P_3(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = \frac{P_4(x)}{x-1} = \frac{x^4 + 2x^3 - x - 2}{x-1}$$

Schauen wir uns an diesem bereits gelösten Beispiel an, wie die Polynomdivision funktioniert:

$$\begin{array}{rlllll}
 & \big(1x^4 & +2x^3 & +0x^2 & -1x & -2\big) \;:\; (x-1) \;=\; \underline{\underline{x^3+3x^2+3x+2}} \\
-x^3\cdot(x-1) = & \underline{-x^4} & \underline{+x^3} & & & \\
 & & 3x^3 & +0x^2 & & \\
-3x^2\cdot(x-1) = & & \underline{-3x^3} & \underline{+3x^2} & & \\
 & & & 3x^2 & -1x & \\
-3x\cdot(x-1) = & & & \underline{-3x^2} & \underline{+3x} & \\
 & & & & 2x & -2 \\
-2\cdot(x-1) = & & & & \underline{-2x} & \underline{+2} \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Das sieht wirklich sehr ähnlich aus wie beim Stöcklirechnen. Ich gehe nun die Schritte bei der Ausführung der Polynomdivision einzeln durch:

i. Das erste Glied des Resultates, also x^3, entsteht durch die Division $\frac{x^4}{x}$. Es wird also die höchste Potenz des ursprünglichen Polynoms durch die höchste Potenz des Linearfaktors geteilt. Nur so kann beim Zurückrechnen der richtige Term mit der höchsten Potenz entstehen:

$$(x-1) \cdot \big(x^3 + \ldots\big) = x^4 + \ldots$$

ii. Vom ursprünglichen Polynom $P_4(x)$ subtrahieren wir nun das Produkt $(x-1) \cdot x^3$. Damit entfernen wir aus $P_4(x)$ den Anteil, der mit der höchsten Potenz von $P_3(x)$, also mit x^3 zusammenhängt. Das sorgt natürlich dafür, dass x^4 im Rest nicht mehr auftritt.

   Den verbleibenden Rest von $P_4(x)$ schreiben wir nicht vollständig auf, sondern nur $3x^3 + 3x^2$.

iii. Diesen Rest von $P_4(x)$ wollen wir wieder durch $(x-1)$ teilen. Der Anfang des Restes lautet x^3. Um diese höchste Potenz des Restes los zu werden, muss das nächste Glied im Endresultat $3x^2$ lauten, denn: $(x-1)(3x^2 + \ldots) = 3x^3 + \ldots$.

iv. Auch den Anteil in $P_4(x)$, der von diesem zweiten Glied des Endresultates herrührt, wollen wir subtrahieren. Wir ziehen somit von unserem ersten Restterm nochmals $3x^2 \cdot (x-1)$ ab. So entsteht ein nächster Restausdruck $3x^2 - x$, an dem vollständigerweise auch noch eine -2 angehängt wäre, die wir aber in der Notation der Einfachheit halber weglassen.

v. Dieser zweite Restterm legt das dritte Glied des Endresultates fest. Erneut teilen wir die höchste Potenz dieses Restes durch die höchste Potenz des Divisors $(x-1)$, also $\frac{3x^2}{x}$ und erhalten $3x$.

vi. Erneut erfolgt, ausgehend von diesem neu erhaltenen Glied $3x$, eine Subtraktion: $-3x \cdot (x-1)$. So ergibt sich ein dritter Restterm $2x - 2$, der sich schliesslich ganz einfach durch $(x-1)$ teilen lässt und das allerletzte Glied 2 unseres Endresultates ergibt.

vii. **Es geht auf!** Am Ende bleibt der Rest 0 stehen. Als Resultat haben wir das Polynom $P_3(x)$ erhalten. Da wir durch ein Polynom vom Grad 1, nämlich durch $(x-1)$, geteilt haben, ist der Grad des Resultatpolynoms um 1 kleiner als der Grad des ursprünglichen Polynoms.

Nicht-aufgehende Polynomdivisionen

Natürlich können wir uns fragen, was es denn bedeutet, wenn eine solche Polynomdivision nicht aufgeht. Eine Antwort kennen wir bereits: In unserem Beispiel hiesse das wohl zunächst einfach, dass $x_1 = 1$ keine Nullstelle von $P_4(x)$ ist, sodass sich der Linearfaktor $(x-1)$ eben nicht restlos aus $P_4(x)$ ausklammern lässt.

Wir werden uns aber bald allgemein mit der Division zweier beliebiger Polynome auseinandersetzen, denn schliesslich wollen wir ja beliebige Polynombrüche untersuchen! Dabei werden wir uns automatisch mit der Bedeutung nicht aufgehender Polynomdivisionen beschäftigen...

Beispiel: Hier nun aber noch ein zweites aufgehendes Beispiel zur Polynomdivision, diesmal ohne Kommentar. Versuche die einzelnen Schritte nachzuvollziehen und zu begreifen, wie das Endresultat zustande kommt:

$$\begin{array}{rcccccl}
 & \big(4x^4 & -8x^3 & -x^2 & +18x & -18\big) & : \ (2x-3) \ = \ \underline{\underline{2x^3 - x^2 - 2x + 6}} \\
-2x^3(2x-3) = & \underline{-4x^4} & \underline{+6x^3} & & & & \\
 & & -2x^3 & -x^2 & & & \\
-\big(-x^2\big)(2x-3) = & & \underline{+2x^3} & \underline{-3x^2} & & & \\
 & & & -4x^2 & +18x & & \\
-(-2x)(2x-3) = & & & \underline{+4x^2} & \underline{-6x} & & \\
 & & & & 12x & -18 & \\
-6(2x-3) = & & & & \underline{-12x} & \underline{+18} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

D.4 Polynombrüche (= gebrochen-rationale Funktionen)

Als **Polynombruch** oder auch als **gebrochen-rationale Funktion** bezeichnen wir eine Funktion $f(x)$, die durch einen Bruch aus einem Polynom $Z_m(x)$ (Grad m) im Zähler und einem Polynom $N_n(x)$ (Grad n) im Nenner gegeben ist:

$$f(x) = \frac{Z_m(x)}{N_n(x)} = \text{Polynombruch resp. gebrochen-rationale Funktion}$$

Mit unserem Wissen über Ableitungsregeln (Kapitel 2 und 7), den Aussagen über Polynome aus den vorhergehenden Abschnitten und der eben gesehenen Polynomdivision verfügen wir über das Rüstzeug, um auch solche Polynombrüche zu analysieren und einer Kurvendiskussion zu unterziehen.

Voraussetzung: Gekürzte Polynombrüche!

Stellt man ganz willkürlich einen Polynombruch aus einem Zähler- und einem Nennerpolynom zusammen, so kann es sein, dass beide Polynome per Zufall eine identische Nullstelle x_i besitzen. Dann lässt sich ein Linearfaktor kürzen.

Beispiel: Beim folgenden Polynombruch lassen sich sogar zwei Linearfaktoren kürzen:

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{3x^3 + 9x^2 - 12} = \frac{(x-1)^3(x+2)}{3(x-1)(x+2)^2} = \frac{(x-1)^2}{3(x+2)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 6}$$

Am Schluss besitzen Zähler und Nenner keine gemeinsamen Linearfaktoren mehr.

Wichtig! Die weiteren Aussagen gelten in der Regel nur für gekürzte Polynombrüche!

Nullstellen und Polstellen von Polynombrüchen

Sei $f(x) = \frac{Z_m(x)}{N_n(x)}$ ein gekürzter Polynombruch mit Zählergrad m und Nennergrad n, so gilt:

- *Ist $Z_m(x_1) = 0$, so ist x_1 eine* **Nullstelle** *von $f(x)$.*

  Begründung: Ein Bruch ist genau dann gleich null, wenn sein Zähler gleich null ist.

- *Ist x_1 eine Nullstelle des Nennerpolynoms, also $N_n(x_1) = 0$, so ist x_1 eine* **Polstelle** *von $f(x)$. Das bedeutet, $f(x)$ ist an der Stelle x_1 nicht definiert; x_1 ist eine Definitionslücke von $f(x)$. Für $x \to x_1$ strebt $f(x)$ gegen $\pm\infty$. Links und rechts von x_1 schmiegt sich der Graph G_f an die Vertikale $x = x_1$ an.*

  Begründung: Der Nenner eines Bruchs darf nicht null werden, denn sonst entspräche der Bruch einer Division durch null, was verboten ist.

  Ist x_1 eine Nullstelle des Nennerpolynoms, so lässt sich aus diesem der Linearfaktor $(x - x_1)$ ausklammern. Dieser wird für $x \to x_1$ unendlich klein. D.h., der Nenner wird für $x \to x_1$ unendlich klein und somit strebt der Betrag des Polynombruchs für $x \to x_1$ gegen unendlich. Das Anschmiegen an die Vertikale $x = x_1$ ist eine direkte Folge davon.

Beispiel: Wir betrachten den folgenden Polynombruch:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - 2} = \frac{(x+1)(x-3)}{2(x-1)}$$

Aus den Faktorisierungen von Zähler- und Nennerpolynom schliessen wir, dass $f(x)$ Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ aufweist und bei $x_3 = 1$ eine Polstelle hat.

Aufgrund der drei Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$ können wir uns mithilfe der faktorisierten Form von $f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{2(x-1)}$ auch rasch überlegen, wo $f(x)$ positiv oder negativ ist, denn für jeden Linearfaktor können wir angeben, ob er auf dem entsprechenden Abschnitt gerade positiv oder negativ ist. Dabei steht $\ominus$ für einen negativen und $\oplus$ für einen positiven Wert:

$$x < -1: \quad f(x) = \frac{\ominus \cdot \ominus}{\ominus} < 0 \qquad -1 < x < 1: \quad f(x) = \frac{\oplus \cdot \ominus}{\ominus} > 0$$

$$1 < x < 3: \quad f(x) = \frac{\oplus \cdot \ominus}{\oplus} < 0 \qquad x > 3: \quad f(x) = \frac{\oplus \cdot \oplus}{\oplus} > 0$$

Damit haben wir auch herausgefunden, dass der G_f links von $x_3 = 1$ ins Positiv-Unendliche geht und rechts davon aus dem Minus-Unendlichen wieder auftaucht (siehe Abb. D.4).

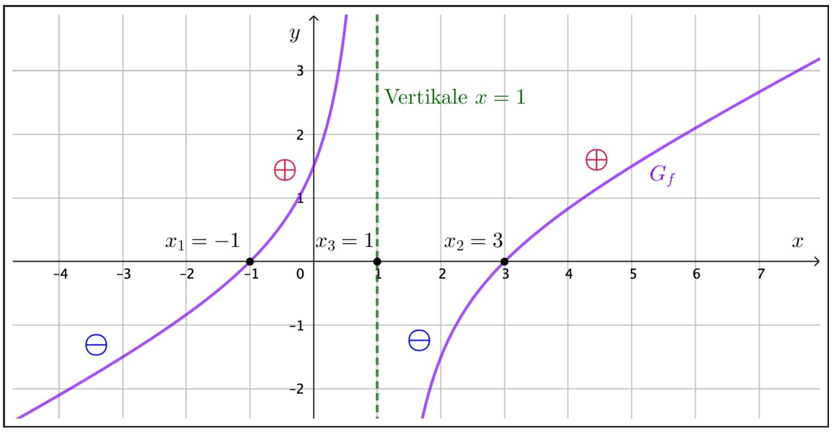


Abbildung D.4: Null- und Polstellen eines Polynombruchs.

D.5 Die Asymptotenfunktion $A(x)$

Als **Asymptotenfunktion** einer Funktion $f(x)$ bezeichnen wir dasjenige Polynom $A(x)$, welchem sich die Funktion $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ beliebig genau annähert. Der Graph einer Asymptotenfunktion $A(x)$ heisst **Asymptote** und ist die **Anschmiegekurve** des Graphen von $f(x)$.

Beispiel: Der Polynombruch zum Graphen in Abb. D.4 lautete $f(x) = \frac{x^3-2x-3}{2x-2}$. Dabei haben wir aufgrund der Faktorisierung von Zähler- und Nennerpolynom verstanden, wo die Nullstellen liegen und dass der Graph eine Polstelle aufweist. Das Verhalten des G_f für $x \to \pm\infty$ ist aus diesen Faktorisierungen aber noch nicht ersichtlich.

Der Graph in Abb. D.4, den ein Mathematik-Programm wie `GeoGebra` schön für uns zeichnen kann, scheint sich für $x \to \pm\infty$ dem Graphen einer linearen Funktion anzunähern. Die Asymptote scheint also eine Gerade zu sein. Das sollten wir doch aber auch analytisch voraussagen können; will heissen: wir möchten die Asymptotenfunktion $A(x)$ aus $f(x)$ berechnen können!

Tatsächlich erlaubt uns die Polynomdisvision diese Asymptotenfunktion direkt zu berechnen. Schliesslich steht ein Polynombruch für die Division zweier Polynome, wobei nicht gesagt ist, dass diese Division restlos aufgehen muss. Im Gegenteil, bei einem bereits gekürzten Polynombruch wird die Rechnung sicher nicht restlos aufgehen, denn sonst wäre ja das Nennerpolynom ein Teiler des Zählerpolynoms und man könnte noch weiter kürzen! Es wird also einen Rest geben und wir wollen uns nun am konkreten Beispiel anschauen, wie man diesen Rest erstens notiert und zweitens interpretiert:

$$
\begin{array}{rl}
 & \big(x^2 \;-2x\; -3\big) \;:\; (2x-2) \;=\; \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2} - \frac{4}{2x-2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2} - \frac{2}{x-1}}} \\
-\frac{1}{2}\,x \cdot (2x-2) = & \underline{-x^2 \;\; +x} \\
 & \qquad -x \; -3 \\
-\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (2x-2) = & \qquad \underline{+x \; -1} \\
 & \qquad\qquad -4
\end{array}
$$

Bemerke: Aus dem Rest -4 zu unterst kann sich kein weiterer Term eines Resultatpolynoms mehr ergeben, denn das "Polynom" $-4x^0$ hat einen kleineren Grad als derjenige unseres Divisor-Polynoms $2x - 2$. An dieser Stelle bricht deshalb die Polynomdivision ab und wir notieren im Resultat einen sogenannten **Restterm** $\frac{-4}{2x-2}$, also einen Bruch aus letztem Rest im Zähler und Divisor im Nenner.

Zunächst wollen wir uns kurz davon überzeugen, dass das Resultat tatsächlich immer noch gleich dem anfänglichen Polynombruch ist. Dazu machen wir gleichnamig und fassen im Zähler zusammen:

$$
\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2} - \frac{4}{2x-2} = \frac{x(x-1)-(x-1)-4}{2x-2} = \frac{x^2-x-x+1-4}{2x-2} = \frac{x^2-2x-3}{2x-2} \quad \checkmark
$$

Unsere Polynomdivision hat also einfach die Funktion $f(x)$ in eine neue Form gebracht, aber ansonsten nichts verändert!

Und was bringt uns das? In der neuen Form lässt sich nun sehr gut ermitteln, was $f(x)$ im Grenzwert für $x \to \pm\infty$ macht, denn der Restterm geht dabei gegen null:

$$
\lim_{|x|\to\infty} R(x) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{-2}{x-1} = 0
$$

Folglich nähert sich der Funktionswert für $x \to \pm\infty$ immer mehr dem Wert der linearen Funktion $\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$ an. Somit muss diese Funktion die Asymptotenfunktion $A(x)$ sein. Ihr Graph ist eine Gerade, an die sich der Graph von $f(x)$ für $|x| \to \infty$ immer mehr anschmiegt.

Dieses Resultat wollen wir allgemein festhalten und gerade um ein paar Aussagen erweitern:

Folgerungen aus der Polynomdivision bei einem Polynombruch

Gegeben sei ein gekürzter Polynombruch $f(x) = \frac{Z_m(x)}{N_n(x)} = \frac{a_0 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + \ldots + b_n x^n}$.

Führen wir damit eine Polynomdivision durch, so entsteht eine Summe aus einer **Asymptotenfunktion** $A(x)$ *und einem* **Restterm** $R(x)$*:*

$$f(x) = A(x) + R(x) \tag{D.1}$$

Dabei hat der Restterm die Eigenschaft für $|x| \to \infty$ *zu verschwinden.* $A(x)$ *steht somit für die Funktion, der sich* $f(x)$ *für* $|x| \to \infty$ *annähert. Den Graphen von* $A(x)$ *bezeichnen wir als* **Asymptote** *von* $f(x)$.

Durch den Vergleich der Grade m *und* n *von Zähler- und Nennerpolynom lassen sich drei Fälle voneinander unterscheiden:*

$m > n:$ $A(x)$ *ist ein Polynom vom Grad* $m - n$.

$m = n:$ $A(x) = \frac{a_m}{b_n}$ *ist eine konstante Funktion.*
Die Asymptote ist eine Horizontale auf der Höhe $y = \frac{a_m}{b_n}$.

$m < n:$ $A(x) = 0$*, d.h.* $f(x)$ *ist bereits der Restterm,* $R(x) = f(x)$.
Die Asymptote ist die x*-Achse.*

Beispiel: Schauen wir nochmal auf unser vorgängiges Beispiel zurück. Dort haben wir gefunden:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - 2} = \underbrace{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}_{=A(x)} \underbrace{-\frac{2}{x-1}}_{=R(x)}$$

Die Asymptotenfunktion $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ist eine lineare Funktion, weil der Zählergrad $m = 2$ unseres Polynombruches $f(x)$ um 1 grösser ist als der Nennergrad $n = 1$. Die Asymptote ist folglich eine Gerade, was in Abb. D.5 gezeigt wird.

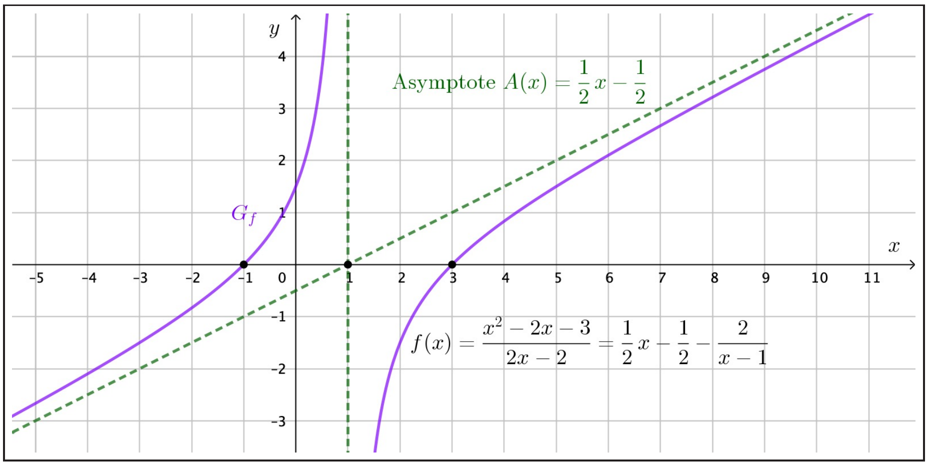


Abbildung D.5: Ein Beispiel zur Asymptote eines Polynombruchs.

D.6 Vielfachheiten von Polstellen

Auf Seite 76 hatten wir für Polynome $P_n(x)$ festgehalten, wie die Vielfachheit einer Nullstelle im zugehörigen Graphen sichtbar wird. Blättere nochmals zurück, wenn es dir nicht mehr ganz präsent sein sollte.

Bei einem (gekürzten!) Polynombruch $f(x) = \frac{Z_m(x)}{N_n(x)}$ haben die Vielfachheiten der Nullstellen von Zählerpolynom $Z_m(x)$ und Nennerpolynom $N_n(x)$ ebenfalls einen sichtbaren Einfluss auf das Aussehen des Graphen.

Das Zählerpolynom $Z_m(x)$ bestimmt über die **Nullstellen** des Polynombruchs $f(x)$ ("ein Bruch ist genau dann gleich null, wenn sein Zähler gleich null ist.").

Für diese Nullstellen gelten in Abhängigkeit von $Z_m(x)$ die gleichen Regeln für das Aussehen des Graphen von $f(x)$, wie wir sie auf Seite 76 für ein einzelnes Polynom festgehalten hatten.

Begründung: In einer hinreichend kleinen Umgebung um die Nullstelle des Zählerpolynoms und damit des Polynombruchs insgesamt kann der Wert des Nenners (inkl. Vorzeichen) als konstanter Wert angesehen werden, sodass es für die Art des Durchgangs durch die Nullstelle nur auf das Zählerpolynom ankommt.

Das Nennerpolynom $N_n(x)$ bestimmt über **Polstellen** des Polynombruchs (= Nullstellen des Nennerpolynoms). Auch bei Polstellen spricht man von ihrer **Vielfachheit**.

In unserem vorigen Beispiel $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-2}$ lautet die Faktorisierung des Nenners $2x - 2 = 2(x-1)^1$. D.h., die Polstelle bei $x_3 = 1$ hat die Vielfachheit 1.

Rep.: Bei allen Polstellen ist der Polynombruch nicht definiert und der Graph verschwindet links und rechts davon gegen $\pm\infty$.

Neu: Auch bei Polstellen hat die Vielfachheit eine Auswirkung auf das Aussehen des Graphen. Dem wollen wir auf den Grund gehen. Für weitere Aussagen benötigen wir allerdings Betrachtungsmaterial von Polstellen höherer Vielfachheit.

Beispiel: Untersuchen wir also z.B. den folgenden Polynombruch:

$$f(x) = \frac{100}{x^6 - 3x^5 - 18x^4 + 28x^3 + 120x^2 - 128} = \frac{100}{(x+2)^3 \cdot (x-1) \cdot (x-4)^2}$$

Der zugehörige Graph G_f wird in Abb. D.6 gezeigt. Er ist nicht stetig, sondern besteht aus vier **Ästen**.

Zunächst ist klar, dass die Asymptote hier die x-Achse sein muss ($A(x) = 0$), denn der Grad des Nennerpolynoms ist um 6 grösser als derjenige des konstanten Zählerpolynoms $Z(x) = 1$. Wir erkennen drei Polstellen mit unterschiedlichen Vielfachheiten: $x_1 = -2$ mit Vielfachheit 3, $x_2 = 1$ mit Vielfachheit 1 und $x_3 = 4$ mit Vielfachheit 2. Wo liegen nun die Unterschiede in der Qualität dieser Polstellen?

Bei genauem Hinschauen erkennen wir einen Zusammenhang: Bei der einzigen Polstelle mit gerader Vielfachheit, also bei $x_3 = 2$, gehen die beiden Äste in die gleiche Richtung ins Unendliche. Man könnte fast sagen, sie verlaufen **symmetrisch zur Polachse**.

Anders bei den Polen mit ungerader Vielfachheit. Dort strebt der Ast auf der einen Seite nach $+\infty$, derjenige auf der anderen Seite nach $-\infty$. Wir sehen eine Art von **Punktsymmetrie** bezüglich eines Punktes auf der Polachse.

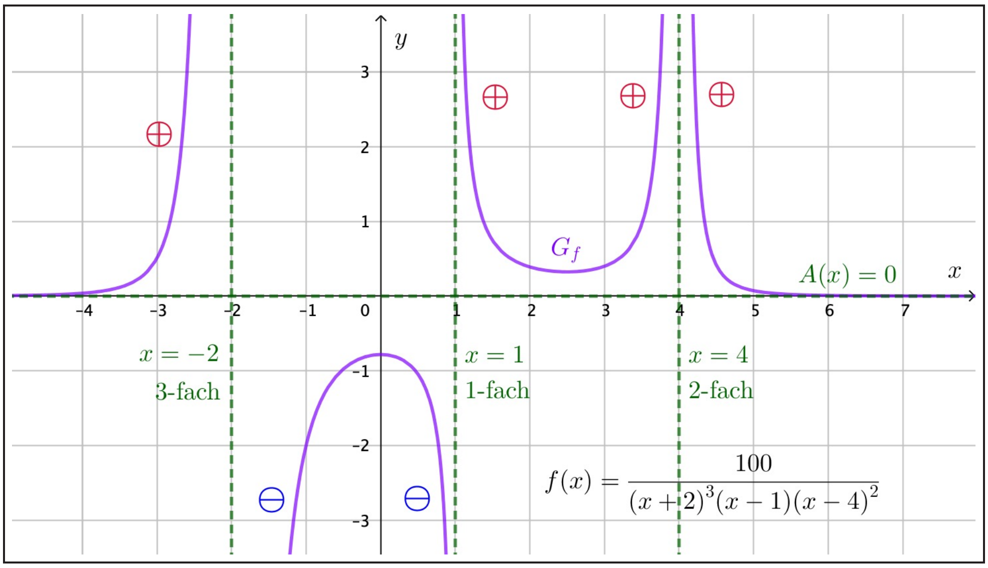


Abbildung D.6: Ein Beispiel zur Asymptote eines Polynombruchs.

Dieses Beispiel lässt uns allgemein formulieren:

Aussehen des Graphen eines Polynombruchs bei einer Polstelle

- *Bei einer Polstelle mit* **gerader Vielfachheit** *(2, 4, 6, ...) wechselt das Vorzeichen der Funktion nicht. Der Graph sieht dort ungefähr* **achsensymmetrisch** *aus.*
- *Bei einer Polstelle mit* **ungerader Vielfachheit** *(1, 3, 5, ...) wechselt das Vorzeichen der Funktion. Der Graph sieht dort ungefähr* **punktsymmetrisch** *aus.*

D.7 Kurvendiskussion eines Polynombruchs – ein Beispiel

Zum Schluss dieses Kapitels soll die **Kurvendiskussion eines Polynombruchs** an einem Beispiel komplett durchgeführt werden. Bei einer solchen Kurvendiskussion wollen wir analytisch die folgenden Angaben ermitteln:

- **Null**- und **Polstellen** inkl. Vielfachheiten
- **Asymptotenfunktion** $A(x)$
- **Hoch**- und **Tiefpunkte**, sowie **Sattel**- und **Wendepunkte** (T, H, SP und W)

Aus diesen Angaben soll mitunter auch das Aussehen des Funktionsgraphen vorhergesagt werden.

Es spielt im Prinzip keine Rolle, in welcher Reihenfolge man vorgeht, aber die eine oder andere Abhandlungsweise mag geschickter sein, da das Resultat eines bestimmten Schrittes hilfreich für einen anderen Schritt sein kann.

Unsere Beispiel-Polynombruch

Wir wollen die folgende Funktion untersuchen:

$$f(x) = \frac{4x^3 + 2x^2 - 8x - 6}{30x - 15}$$

Dabei sei bekannt, dass $x = -1$ eine Nullstelle von $f(x)$ ist, was sich auch rasch überprüfen lässt:

$$f(-1) = \frac{4 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 6}{30 \cdot (-1) - 15} = \frac{-4 + 2 + 8 - 6}{-30 - 15} = 0$$

1. Faktorisierung von Zähler und Nenner

Bei der Analyse von Polynombrüchen empfiehlt sich zunächst die **vollständige Faktorisierung** von Zähler- und Nennerpolynoms, denn so lässt sich der Polynombruch ev. vor allen weiteren Untersuchungen **kürzen**! Ausserdem werden dadurch direkt alle **Null**- und **Polstellen** sichtbar.

Für den Nenner ist die Faktorisierung in unserem Beispiel ganz einfach:

$$30x - 15 = 30\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Beim Zähler ist das Faktorisieren schwieriger. Da wir mit $x = -1$ eine Nullstelle des Zählerpolynoms kennen, kommen wir mit einer Polynomdivision weiter. Diese ergibt:

$$Z(x) = 4x^3 + 2x^2 - 8x - 6 = (x+1)\big(4x^2 - 2x - 6\big)$$

Nun lässt sich der Zähler ohne grössere Schwierigkeiten zuende faktorisieren, denn in der hinteren Klammer steht eine quadratische Funktion, deren Nullstellen sich z.B. mit der Mitternachtsformel bestimmen lassen. Wir finden:

$$Z(x) = 4x^3 + 2x^2 - 8x - 6 = \ldots = 4(x+1)^2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Somit schreiben wir für den komplett faktorisierten Polynombruch:

$$f(x) = \frac{4x^3 + 2x^2 - 8x - 6}{30x - 15} = \frac{4\,(x+1)^2\,(x - \frac{3}{2})}{30\,(x - \frac{1}{2})} = \frac{2\,(x+1)^2\,(x - \frac{3}{2})}{15\,(x - \frac{1}{2})}$$

Kürzen lässt sich da nichts!

So aufwändig das Faktorisieren erscheinen mag, es liefert eine Vielzahl nützlicher Informationen! Bereits jetzt wissen wir Folgendes über $f(x)$:

- $f(x)$ besitzt eine zweifache **Nullstelle** bei $x_1 = -1$. Dort muss sich also ein Hoch- oder ein Tiefpunkt befinden. Der Graph berührt auf jeden Fall die x-Achse.
- $f(x)$ besitzt eine einfache **Nullstelle** bei $x_2 = \frac{3}{2}$. Dort wird die x-Achse "durchstochen".
- $f(x)$ besitzt eine einfache und somit **ungerade Polstelle** bei $x_3 = \frac{1}{2}$.

2. Asymptotenfunktion bestimmen

Knüpfen wir uns als zweite Betrachtung das asymptotische Verhalten des Polynombruches vor. Dazu setzen wir direkt die Polynomdivision an:

$$\begin{array}{rllll}
 & \left(4x^3\right. & +2x^2 & -8x & \left.-6\right) \; : \; (30x-15) = \underbrace{\frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{15}x - \frac{1}{5}}_{=A(x)} + \underbrace{\frac{-9}{30x-15}}_{=R(x)} \\
-\frac{2}{15}x^2\,(30x-15): & \underline{-4x^3} & \underline{+2x^2} & & \\
 & & 4x^2 & -8x & \\
-\frac{2}{15}x\,(30x-15): & & \underline{-4x^2} & \underline{+2x} & \\
 & & & -6x & -6 \\
-\left(-\frac{1}{5}\right)(30x-15): & & & \underline{+6x} & \underline{-3} \\
 & & & & -9
\end{array}$$

Der Grad des Nennerpolynoms ist um 2 kleiner als derjenige des Zählerpolynoms. Daher ergibt sich als Asymptotengleichung eine **quadratische Funktion**:

$$A(x) = \frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{15}x - \frac{1}{5} = \frac{1}{15}\left(2x^2 + 2x - 3\right)$$

Die Asymptote ist also, wegen der zwar kleinen, aber positiven Öffnung $\frac{2}{15}$, eine **weite, nach oben offene Parabel**. Ermitteln wir ihren Scheitelpunkt S_A:

$$x_{S_A} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y_{S_A} = A(x_{S_A}) = -\frac{7}{30} \quad \Rightarrow \quad S_A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{30}\right)$$

Damit ergibt sich eine erste Grobübersicht des Funktionsgraphen erstellen (vgl. Abb. D.7), wobei wir Schritt für Schritt überlegen können:

i. Die Asymptote ist eine nach oben geöffnete Parabel. D.h., der linke Ast des Graphen kommt links von oben und der rechte Ast verschwindet rechts wieder nach oben.

ii. Die Polstelle bei $x_3 = \frac{1}{2}$ tragen wir als Vertikale ein. Wie sich der Graph an diese Vertikale anschmiegt, wird sich gleich ergeben.

iii. Von links oben kommend wird der Graph die x-Achse bei $x_1 = -1$ berühren (doppelte Nullstelle). Danach bleibt er oberhalb der x-Achse und muss daher links der Polstelle ins positiv-Unendliche verschwinden.

iv. Da es sich um eine ungerade Polstelle (Vielfachheit 1) handelt, wird der Graph rechts davon aus dem negativ-Unendlichen auftauchen, weil er links davon ins positiv-Unendliche verschwunden ist.

v. Tatsächlich geht diese Überlegung auf, denn bei $x_2 = \frac{3}{2}$ durchsticht der Graph die x-Achse. So gelangt er wieder ins Positive, wo er dann ja der Asymptote folgt und ins positiv-Unendliche verschwindet.

Bereits jetzt sehen wir, wie sich alles zu einem Gesamtbild zusammenzusetzen beginnt. Wir brauchen also nicht mehr viele weitere zusätzliche Informationen.

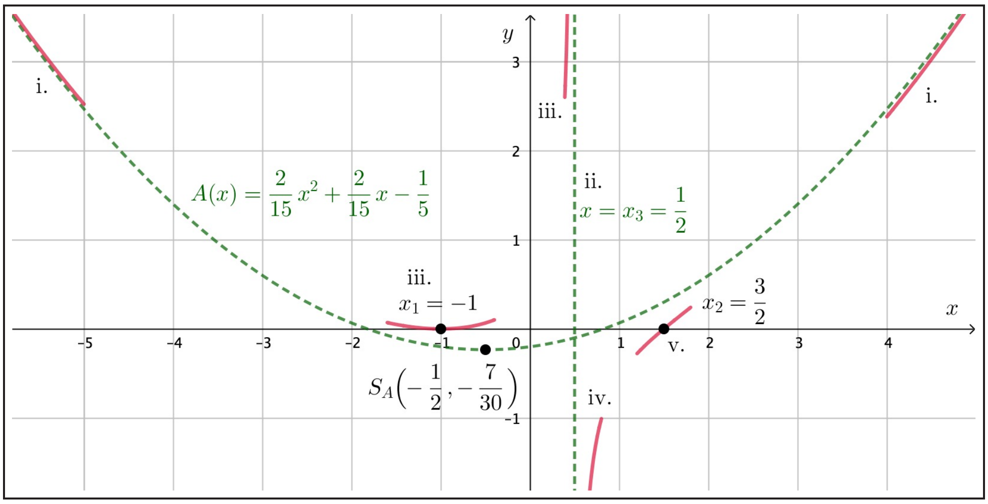


Abbildung D.7: Die grafische Umsetzung der Informationen nach Faktorisierung und Polynomdivision mit dem Beispielpolynombruch.

3. Differentialrechnung anwenden

Nun ist es an der Zeit, den Polynombruch abzuleiten. Da wir es mit einem Bruch von Funktionen zu tun haben, kommt die **Quotientenregel** zur Anwendung:

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{N^2(x)}$$

Beim Ableiten ist es oftmals einfacher die nicht-faktorisierte Form zu verwenden. Multiplikative Konstanten sollte man vorher ausklammern, um die Zahlen möglichst klein zu halten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{4x^3 + 2x^2 - 8x - 6}{30x - 15}\right]' = \frac{2}{15} \cdot \left[\frac{2x^3 + x^2 - 4x - 3}{2x - 1}\right]' \\ &= \frac{2}{15} \cdot \frac{(6x^2 + 2x - 4)(2x - 1) - (2x^3 + x^2 - 4x - 3) \cdot 2}{(2x - 1)^2} \\ &= \frac{2}{15} \cdot \frac{12x^3 - 6x^2 + 4x^2 - 2x - 8x + 4 - 4x^3 - 2x^2 + 8x + 6}{(2x - 1)^2} \\ &= \frac{2}{15} \cdot \frac{8x^3 - 4x^2 - 2x + 10}{(2x - 1)^2} = \frac{4}{15} \cdot \frac{4x^3 - 2x^2 - x + 5}{(2x - 1)^2} \end{aligned}$$

Aus der 1. Ableitung sollen die Horizontalstellen gewonnen werden. Eine solche kennen wir aber bereits. $x_1 = -1$ muss, als zweifache Nullstelle, auch eine Horizontalstelle sein. Im Zähler der 1. Ableitung muss sich also ein Linearfaktor $(x + 1)$ ausklammern lassen:

$$4x^3 - 2x^2 - x + 5 = (x + 1)\,(4x^2 - 6x + 5)$$

Die Funktion in der hinteren Klammer besitzt keine Nullstelle mehr, denn:

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 36 - 80 = -44 < 0$$

Die vollständig faktorisierte 1. Ableitung lautet somit:

$$f'(x) = \frac{4\,(x + 1)\,(4x^2 - 6x + 5)}{15\,(2x - 1)^2}$$

D.h., $f(x)$ besitzt genau eine Horizontalstelle bei $x_1 = -1$. Wir wissen bereits, dass es sich um ein lokales Minimum handelt. (Dies liesse sich auch noch explizit überprüfen: $f''(-1) > 0$.)

Ermitteln wir schliesslich noch die zweite Ableitung:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{4}{15} \cdot \left[\frac{4x^3 - 2x^2 - x + 5}{(2x-1)^2}\right]' \\
&= \frac{4}{15} \cdot \frac{(12x^2 - 4x - 1)(2x-1)^2 - (4x^3 - 2x^2 - x + 5) \cdot 2^2\,(2x-1)}{(2x-1)^4} \\
&= \frac{4}{15} \cdot \frac{24x^3 - 12x^2 - 8x^2 + 4x - 2x + 1 - 16x^3 + 8x^2 + 4x - 20}{(2x-1)^3} \\
&= \frac{4}{15} \cdot \frac{8x^3 - 12x^2 + 6x - 19}{(2x-1)^3}
\end{aligned}
$$

Von dieser zweiten Ableitung eine Nullstelle und somit eine Wendestelle zu finden ist nun allerdings nicht von Hand möglich. Dazu müssten wir das Polynom im Zähler faktorisieren können, was in diesem Beispiel nicht gut geht.

Aufgrund der grafischen Vorarbeit in Abb. D.7 können wir immerhin erahnen, wo sich eine Wendestelle befinden sollte, nämlich irgendwo in der Nähe der rechten Nullstelle $x_3 = \frac{3}{2}$.

Ein Rechner oder auch `GeoGebra` liefert einen approximierten Werte von $x_4 \approx 1.81$ und als y-Koordinate erhalten wir so $y_4 \approx 0.25$. Der **Wendepunkt** liegt also bei $W \approx (1.81, 0.25)$.

Abschluss der Kurvendiskussion

Ohne technische Hilfsmittel würden wir nun den Graphen aus Abb. D.7 vervollständigen. Hier zeige ich in Abb. D.8, wie der Graph effektiv herauskommt. Er erfüllt alle unsere Erwartungen.

Bemerkung: Es ist von Anfang an klar, dass der Graph die y-Achse beim Punkt $(0, \frac{2}{5})$ durchstösst, denn das Einsetzen von $x = 0$ in die $f(x)$ liefert eben genau den Wert $f(0) = \frac{-6}{-15} = \frac{2}{5}$.

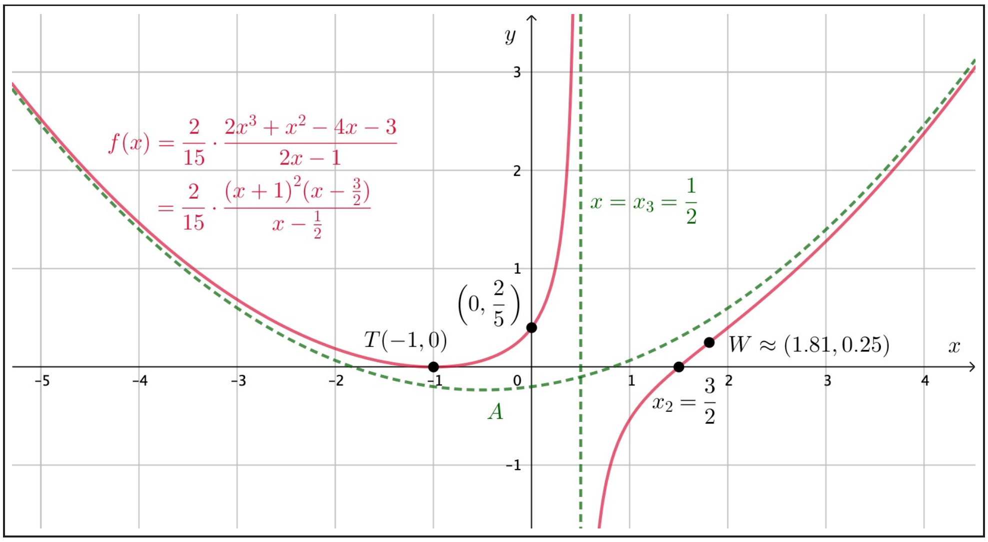


Abbildung D.8: Der vollständige Graph des untersuchten Polynombruchs inkl. aller speziellen Punkte, Polstelle und Asymptote.