Übungen zur Differentialrechnung – Lösungen Serie I

1. (a) Die (Durchschnitts-)Geschwindigkeit ist definiert als *Strecke pro Zeitspanne*. Die Strecke Δs ist die Differenz der beiden Orte: $\Delta s = s_2 - s_1$. Die Zeitspanne Δt ist die Differenz der beiden Zeitpunkte: $\Delta t = t_2 - t_1$. Zusammen folgt:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{2.6\,\mathrm{m} - 1.2\,\mathrm{m}}{6.5\,\mathrm{s} - 1.6\,\mathrm{s}} = \frac{1.4\,\mathrm{m}}{4.9\,\mathrm{s}} = \frac{2}{7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq 0.29\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(b) Grundsätzlich gilt ja: Eine Geschwindigkeit ist eine Steigung im t-s-Diagramm. Um welche Steigung geht es bei der Durchschnittsgeschwindigkeit?

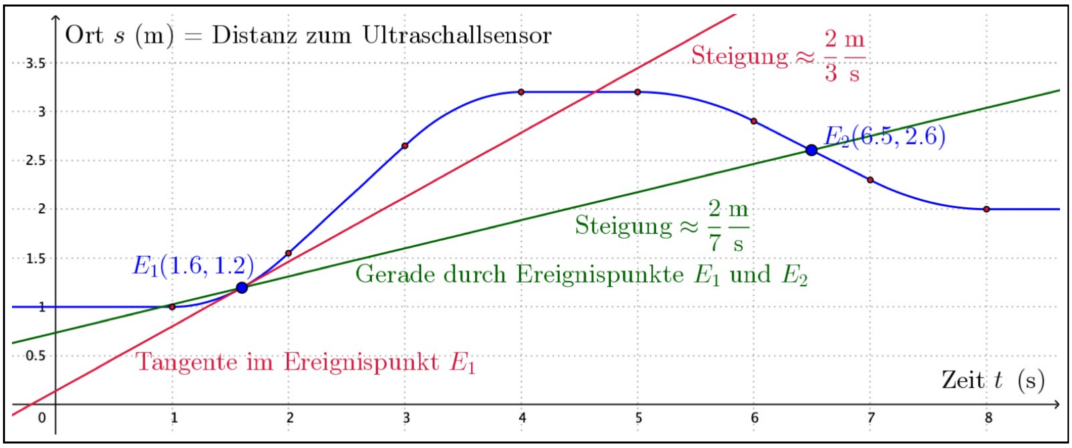
Legen wir eine Gerade durch die beiden Ereignisse E_1 und E_2, so entspricht die Steigung dieser Gerade genau der Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$.

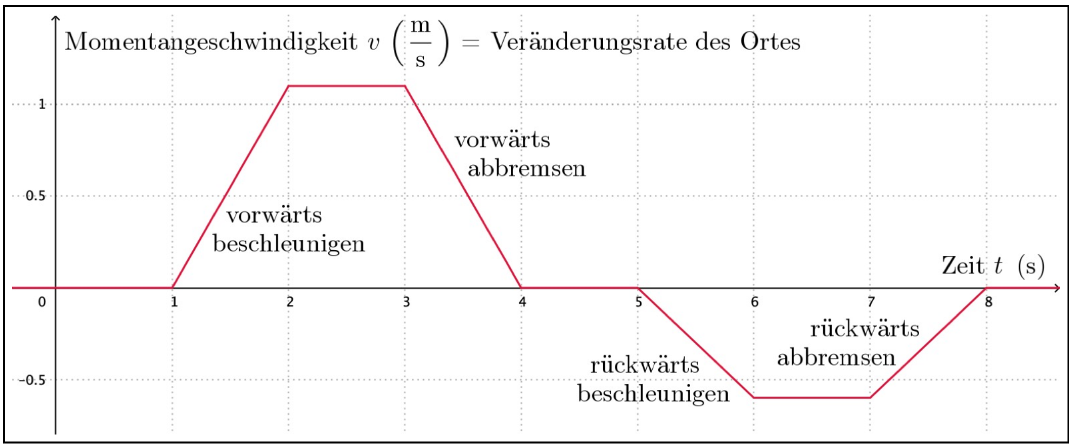
(c) Als Momentangeschwindigkeit v verstehen wir die Steigung des Graphen im t-s-Diagramm in einem bestimmten Punkt. Genauer: Um die Momentangeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt zu erfahren, legen wir über der Stelle t eine Tangente an den Graphen im t-s-Diagramm. Die Momentangeschwindigkeit ist die Steigung dieser Tangente. Da sich die Steigung des Graphen immer wieder verändert, verändert sich auch die Momentangeschwindigkeit.

Legen wir in E_1 eine Tangente an den Graphen, so beträgt deren Steigung etwa $\frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq 0.67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

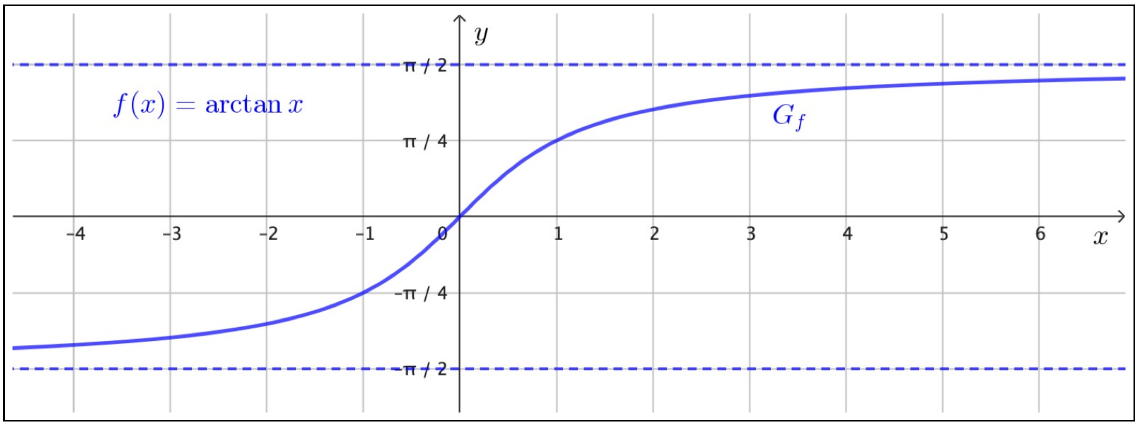
(d) Im Ereignis E_1 ist der Graph gerade *am steiler werden*. Die Momentangeschwindigkeit **nimmt zu**. Es wird **beschleunigt**. Wir erinnern uns (Physik 1. Klasse): Die Beschleunigung ist per Definition die Veränderungsrate der Geschwindigkeit (= Veränderung der Geschwindigkeit pro Zeitspanne).

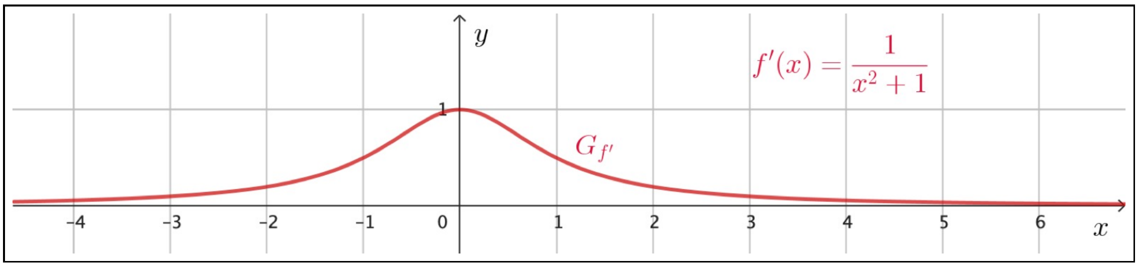
(e) Der Geschwindigkeitsgraph setzt sich aus lauter geraden Abschnitten zusammen, weil ausschliesslich gfBs (= *gleichförmige Bewegungen*) und gmbBs (= *gleichmässig beschleunigte Bewegungen*) vorkommen – die Geschwindigkeit bleibt gleich oder verändert sich gleichmässig.





2. Es ergeben sich die folgenden Graphen.





Da die Arcustangensfunktion ständig ansteigt, also *streng monoton steigend* ist, kann ihre Ableitung niemals genau gleich 0 werden. Ihr Graph schmiegt sich aber in beide ∞-Richtungen an die x-Achse an. Der Wert von f' strebt jeweils gegen 0, weil der Arcustangensgraph G_f in den Aussenbereichen immer flacher wird.

N.B.: Ohne dass wir im Moment zu verstehen brauchen, weshalb das so ist, sei hier explizit die Funktionsgleichung für die Ableitungsfunktion der Arcustangensfunktion angegeben:

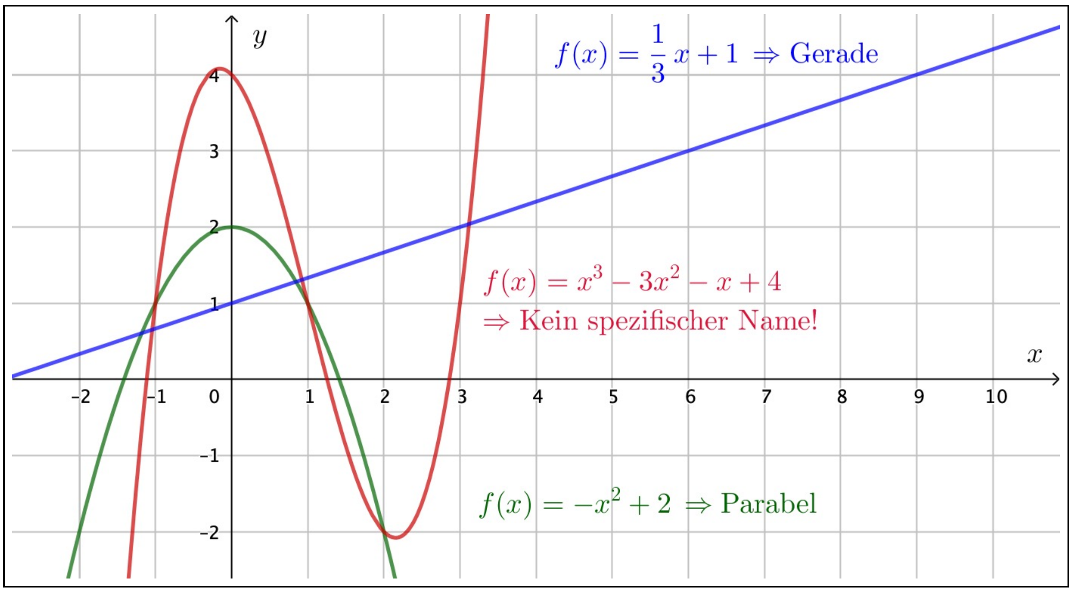
$$f(x) = \arctan x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

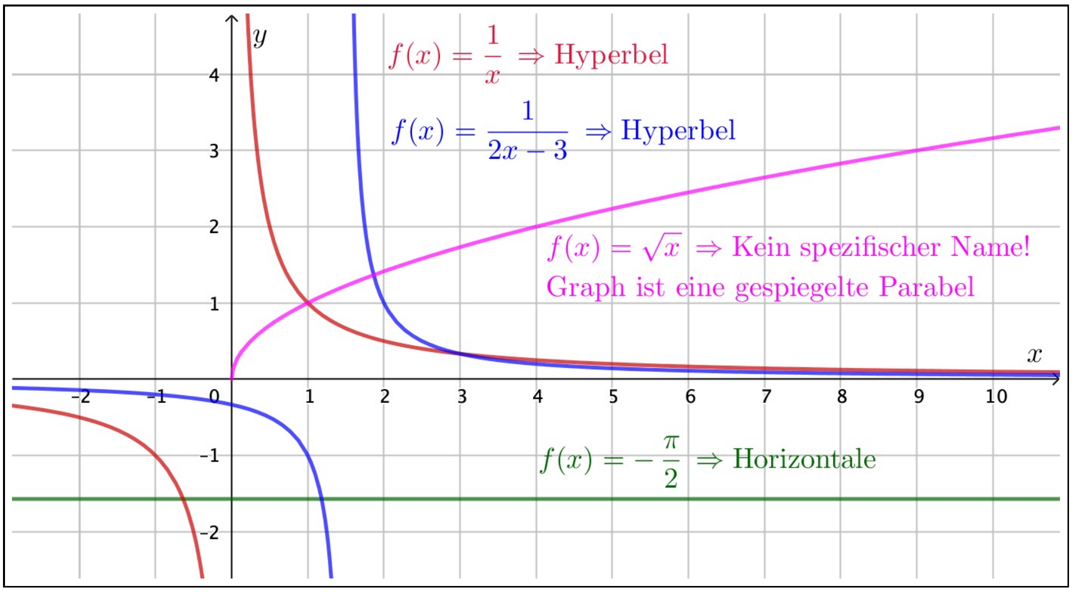
Damit wird klar, dass $f'(0) = 1$ ist.

Die Arcustangensfunktion ist **ungerade**, ihr Graph **punksymmetrisch** (zum Ursprung $(0,0)$).

Die Ableitung der Arcustangensfunktion ist **gerade**, ihr Graph also **achsensymmetrisch** (zur y-Achse).

3. (a) Die Funktionsgraphen sehen folgendermassen aus:





Hinweis zur zweiten Kehrwertfunktion: $f(x)=\frac{1}{2x-3}=\frac{1}{2(x-\frac{3}{2})}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow$ es handelt sich um die modifizierte $\frac{1}{x}$-Funktion! Der Graph von $\frac{1}{x}$ wird vertikal um den Faktor 2 gestaucht und dann um $\frac{3}{2}$ nach rechts verschoben.

(b) Wir notieren für jede Funktion den Differenzenquotienten und vereinfachen ihn:

$$f(x)=-x^2+2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-(x+h)^2+2-(-x^2+2)}{h}$$
$$=\frac{-x^2-2xh-h^2+2+x^2-2}{h}=\frac{-2xh-h^2}{h}=\underline{\underline{-2x-h}}$$

$$f(x)=x^3-3x^2-x+4$$
$$\Rightarrow\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-3(x+h)^2-(x+h)+4-(x^3-3x^2-x+4)}{h}$$
$$=\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-3x^2-6xh-3h^2-x-h+4-x^3+3x^2+x-4}{h}$$
$$=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-6xh-3h^2-h}{h}=\underline{\underline{3x^2+3xh+h^2-6x-3h-1}}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}x+1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{3}(x+h)+1-(\frac{1}{3}x+1)}{h}=\frac{\frac{1}{3}h}{h}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$f(x)=-\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})}{h}=\frac{0}{h}=\underline{\underline{0}}$$

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}=\underline{\underline{\frac{-1}{x(x+h)}}}$$

$$f(x)=\frac{1}{2x-3} \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{2(x+h)-3}-\frac{1}{2x-3}}{h}=\frac{\frac{2x-3-(2x+2h-3)}{(2x+2h-3)(2x-3)}}{h}$$
$$=\frac{\frac{2x-3-2x-2h+3}{(2x+2h-3)(2x-3)}}{h}=\frac{\frac{-2h}{(2x+2h-3)(2x-3)}}{h}=\underline{\underline{\frac{-2}{(2x+2h-3)(2x-3)}}}$$

$$f(x)=\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}}}$$

(c) Mit der Vorbereitung unter (b) lässt sich nun bei allen Funktionen leicht der Grenzwert für $h \to 0$ bilden und somit die Ableitungsfunktion $f'(x)$ bestimmen:

$$f(x) = -x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = -2x - h \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} (-2x - h) = \underline{\underline{-2x}}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + 3xh + h^3 - 6x - 3h - 1$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \big(3x^2 + 3xh + h^3 - 6x - 3h - 1\big) = \underline{\underline{3x^2 - 6x - 1}}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x+h)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x\cdot x} = \underline{\underline{\frac{-1}{x^2}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-2}{(2x+2h-3)(2x-3)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{(2x+2h-3)(2x-3)} = \underline{\underline{\frac{-2}{(2x-3)^2}}}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

(d) Diskussion der gefundenen Ableitungen:

$f(x) = -x^2 + 2$ mit $f'(x) = -2x$: Wir haben früher zwar schon einmal gehört und im Skript gesehen, dass die Ableitung einer quadratischen Funktion eine lineare Funktion ist, wie diese Funktion aber ganz genau lautet, hätten wir zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht voraussagen können.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 4$ mit $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$: Offensichtlich ergibt sich aus einer kubischen Funktion beim Ableiten eine quadratische Funktion. Mehr können wir bis zum jetzigen Zeitpunkt aber nicht sagen.

$f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ mit $f'(x) = \frac{1}{3}$: Diese Ableitungsfunktion konnten wir sehr wohl voraussagen. Die Ableitung steht ja für eine Tangentensteigung. Da der Graph einer linearen Funktion eine Gerade ist, ist die Tangente an diese Gerade in jedem Punkt die Gerade selber. Das heisst, die Tangente hat immer die gleiche Steigung wie die Gerade. Damit muss sich für die Ableitungsfunktion die Steigung der Gerade ergeben, hier also $\frac{1}{3}$.

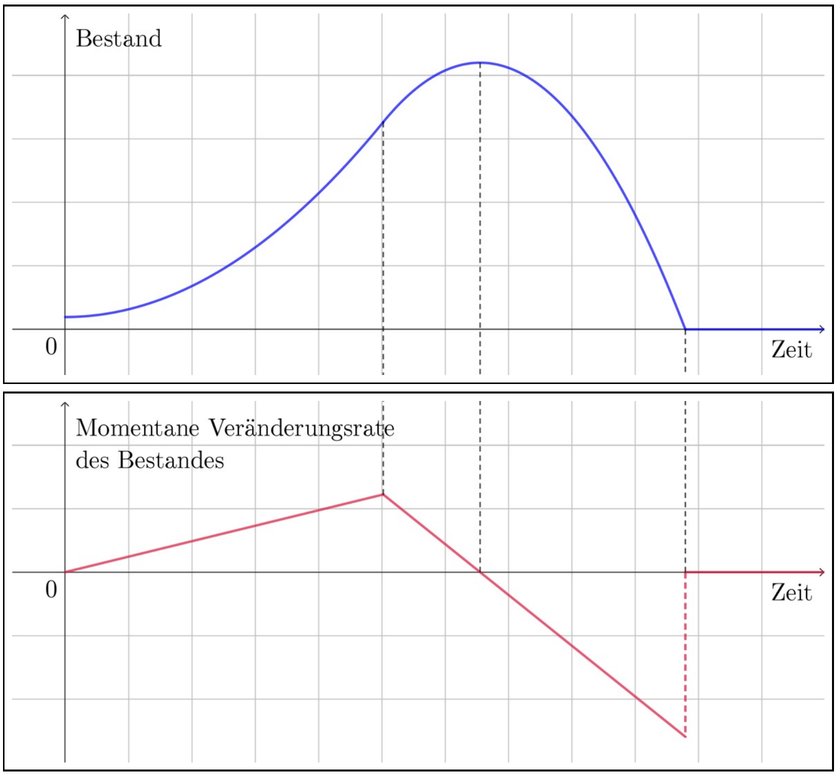
$f(x) = -\frac{\pi}{2}$ mit $f'(x) = 0$: Auch dieses Resultat hätten wir problemlos voraussagen können, denn eine Horizontale hat überall die Steigung 0.

Restliche: Sowohl bei den Kehrwert-Funktionen, wie auch bei der Wurzelfunktion wissen wir bis anhin nicht so recht, was rauskommen soll. Wir nehmen zur Kenntnis, dass bei beiden Kehrwert-Funktionen sowohl ein Minuszeichen, als auch ein Quadrat im Nenner entsteht. Bei der Wurzelfunktion taucht in der Ableitung eine Wurzel im Nenner auf.

4. (a) Die Fliegenpopulation steigt zunächst immer schneller an. Ab einem gewissen Zeitpunkt wird die Vermehrung allerdings langsamer, bis die Population ein Maximum erreicht. Danach fällt der Bestand immer schneller ab, bis die Population kurz darauf ganz ausgestorben ist.

Eine biologische Erklärung könnte ein beschränkter Nahrungsvorrat sein, sodass sich die Population zunächst stark vermehrt, letztlich aber eben ausstirbt.

(b) Da es sich gemäss Hinweis um Parabelabschnitte handelt (QFs), müssen sich die Veränderungsraten linear entwickeln (LFs). Beim Übergang von der nach oben offenen zur nach unten offenen Parabel muss die lineare Funktion wechseln. In dem Zeitpunkt, wo die Population ihr Maximum erreicht, ist der Verlauf des Bestandsgraphen korizontal. Das bedeutet, die Population verändert sich dort ganz kurzzeitig quasi nicht und die Veränderungsrate muss dort gleich 0 sein.



5. (a) Für den Differenzenquotienten und die Ableitung folgt bei der Funktion $g(x) = 5x^2 - 3x + 7$:

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{5(x+h)^2 - 3(x+h) + 7 - (5x^2 - 3x + 7)}{h}$$
$$= \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 - 3x - 3h + 7 - 5x^2 + 3x - 7}{h} = \frac{10xh + 5h^2 - 3h}{h} = 10x + 5h - 3$$
$$\Rightarrow \quad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (10x + 5h - 3) = \underline{\underline{10x - 3}}$$

Analog ergibt sich für $i(x) = -4x^2 + x + 3$:

$$\frac{\Delta i}{\Delta x} = \frac{i(x+h) - i(x)}{h} = \frac{-4(x+h)^2 + (x+h) + 3 - (-4x^2 + x + 3)}{h}$$
$$= \frac{-4x^2 - 8xh - 4h^2 + x + h + 3 + 4x^2 - x - 3}{h} = \frac{-8xh - 4h^2 + h}{h} = -8x - 4h + 1$$
$$\Rightarrow \quad i'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (-8x - 4h + 1) = \underline{\underline{-8x + 1}}$$

Und schliesslich folgt für $k(c) = 155c^2 - 155c - 155$:

$$\frac{\Delta k}{\Delta c} = \frac{k(c+h) - k(c)}{h} = \frac{155(c+h)^2 - 155(c+h) - 155 - (155c^2 - 155c - 155)}{h}$$
$$= \frac{155c^2 + 310ch + 155h^2 - 155c - 155h - 155 - 155c^2 + 155c + 155}{h}$$
$$= \frac{310ch + 155h^2 - 155h}{h} = 310c - 155h - 155$$
$$\Rightarrow \quad k'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta k}{\Delta c} = \lim_{h \to 0} (310c - 155h - 155) = \underline{\underline{310c - 155}}$$

(b) Die Regeln könnten folgendermassen lauten:

Konstantes Glied c: Das konstante Glied scheint beim Ableiten einfach wegzufallen. In den ersten beiden Beispielen ist von der $+7$ in $g(x)$ und von der $+3$ in $i(x)$ in der Ableitung nichts mehr zu sehen.
Bei der -155 in $k(c)$ sind wir nicht so ganz sicher, weil diese Zahl ja noch in der Ableitung auftritt.

Lineares Glied bx: Vom linearen Glied scheint bei der Ableitung einfach der Vorfaktor als konstantes Glied in Erscheinung zu treten. So wird aus der $-3x$ in $g(x)$ eine -3 in $g'(x)$, bei $i(x)$ wird das $+x$ zu $+1$ und bei $k(c)$ geht das $-155c$ in eine -155 über.

Quadratisches Glied ax^2: Aus dem quadratischen Glied wird beim Ableiten offenbar ein lineares Glied. Allerdings ist dessen Vorfaktor doppelt so gross wie derjenige des ursprünglichen quadratischen Gliedes. Bei $g(x)$ wird $5x^2$ zu $10x$, bei $i(x)$ geht $-4x^2$ in $-8x$ über und bei $k(c)$ entsteht aus dem $155c^2$ ein $310c$.

(c) Leiten wir $j(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 9$ ab, so müsste $\underline{\underline{j'(x) = \frac{1}{2}x - 2}}$ entstehen.

(d) Wir wollen nun die Ableitung des allgemeinen Falls $f(x) = ax^2 + bx + c$ bestimmen:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h}$$
$$= \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} = \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = 2ax + ah + b$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}(2ax + ah + b) = \underline{\underline{2ax + b}}$$

Dieses allgemeine Resultat für die Ableitung der quadratischen Funktion bestätigt unsere Vermutungen aus (b): Das Konstante Glied c verschwindet, aus dem linearen Glied bx wird ein konstantes Glied b und das quadratische Glied ax^2 wird zum linearen Glied $2ax$.

(e) Die Ableitung von $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist durch $f'(x) = 2ax + b$ gegeben. Mit der Ableitungsfunktion $f'(x)$ können wir aber zu jeder Stelle x direkt berechnen, wie steil der Funktionsgraph G_f von $f(x)$ über dieser Stelle verläuft (genauer: $f'(x)$ steht für die Steigung der Tangente an G_f über der Stelle x).
Alle Punkte auf der y-Achse haben die x-Koordinate $x = 0$. Wir müssen also $x = 0$ in die Ableitung einsetzen, um zu erfahren, mit welcher Steigung der Graph G_f die y-Achse durchquert. Dafür ergibt sich sofort:

$$f'(0) = 2a \cdot 0 + b = \underline{\underline{b}}$$

Der Parameter b in der allgemeinen Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ steht also stets für die Steigung, mit der die zugehörige Parabel die y-Achse durchquert.

(f) Die Gleichung $f'(x) = 0$ fragt nach allen Stellen x, bei denen die Ableitung den Wert 0 annimmt, über denen der zugehörige Funktionsgraph also horizontal verläuft. Bei einer quadratischen Funktion resp. bei einer Parabel gibt es aber nur einen Punkt mit Steigung 0, nämlich der Scheitelpunkt.
Das bedeutet, aus der Gleichung $f'(x) = 0$ lässt sich bei der quadratischen Funktion ganz direkt die x-Koordinate des Scheitelpunktes bestimmen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2ax + b \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b}{2a}$$

Das ist derselbe Ausdruck, der uns aus dem Thema *quadratische Funktionen* für die x-Koordinate des Scheitelpunktes bekannt ist.

6. Entscheidend ist folgender Gedanke: Dort, wo der Graph der ursprünglichen Funktion horizontal ist, muss die Ableitungsfunktion gleich Null sein, also eine Nullstelle aufweisen. Zwischen diesen Nullstellen müssen wir vor allem überlegen, ob der Graph der ursprünglichen Funktion ansteigt oder abfällt und ob die Steigung grösser oder kleiner wird.

   Mit diesen Überlegungen finden wir die folgenden Ableitungsgraphen: