Übungen zur Differentialrechnung

SERIE I: Differenzenquotient und Ableitungsbildung

Klasse 155c / AGe

1. **Rep. Kinematik:** *"Die Geschwindigkeit v eines Objekts beschreibt die Veränderungsrate seines Ortes."*

   Konkret: Wenn ich mich vor dem Ultraschall-Sensor bewege, so könnten dabei beispielsweise die folgenden beiden *Ereignisse* registriert werden:

   $$E_1: \quad (t_1, s_1) = (1.6\,\mathrm{s}, 1.2\,\mathrm{m}) \qquad \text{und} \qquad E_2: \quad (t_2, s_2) = (6.5\,\mathrm{s}, 2.6\,\mathrm{m})$$

   In Worten: Zum Zeitpunkt $t_1 = 1.6\,\mathrm{s}$ befand ich mich am Ort $s_1 = 1.2\,\mathrm{m}$, zu $t_2 = 6.5\,\mathrm{s}$ bei $s_2 = 2.6\,\mathrm{m}$.

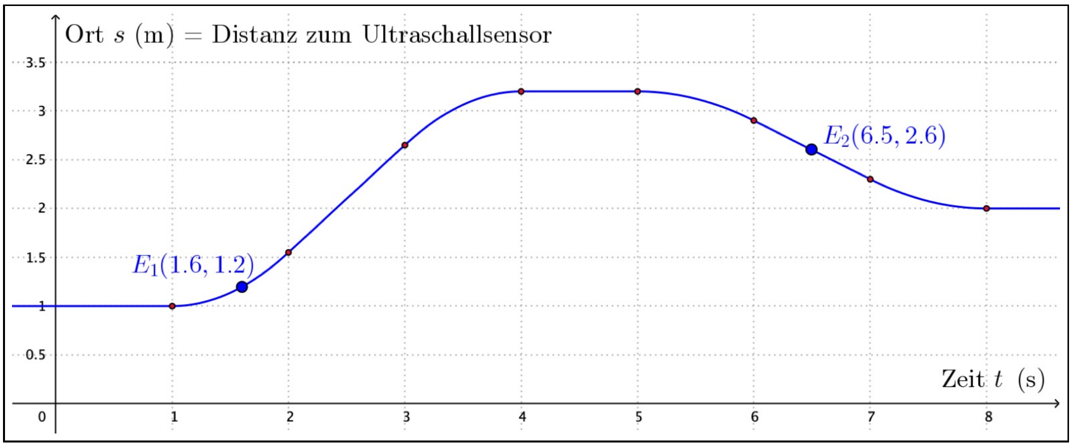
   (a) Wie gross war meine *durchschnittliche Veränderungsrate des Ortes*, also meine *Durchschnittsgeschwindigkeit* $\overline{v}$, während der Zeitspanne von t_1 bis t_2?

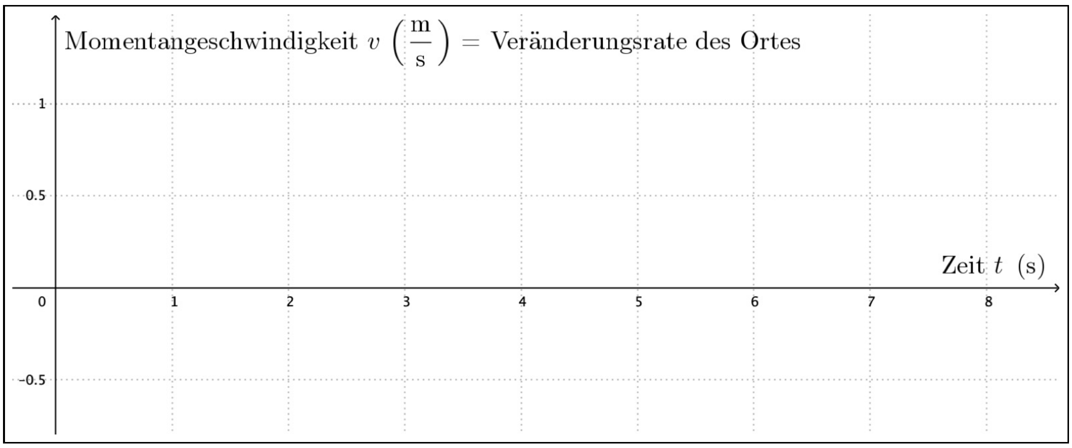
   (b) Tatsächlich wurde bei meinem Versuch vom Sensor das t-s-Diagramm unten aufgezeichnet. Wofür steht in diesem Diagramm die unter (a) berechnete Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$?

   (c) Was ist grafisch unter der *Momentangeschwindigkeit* v_1 im Ereignis E_1 zu verstehen? Wie gross ist v_1 etwa?

   (d) Wie ist sich die Momentangeschwindigkeit in E_1 gerade am verändern und wie nennen wir in der Physik eine solche *Veränderungsrate der Geschwindigkeit*?

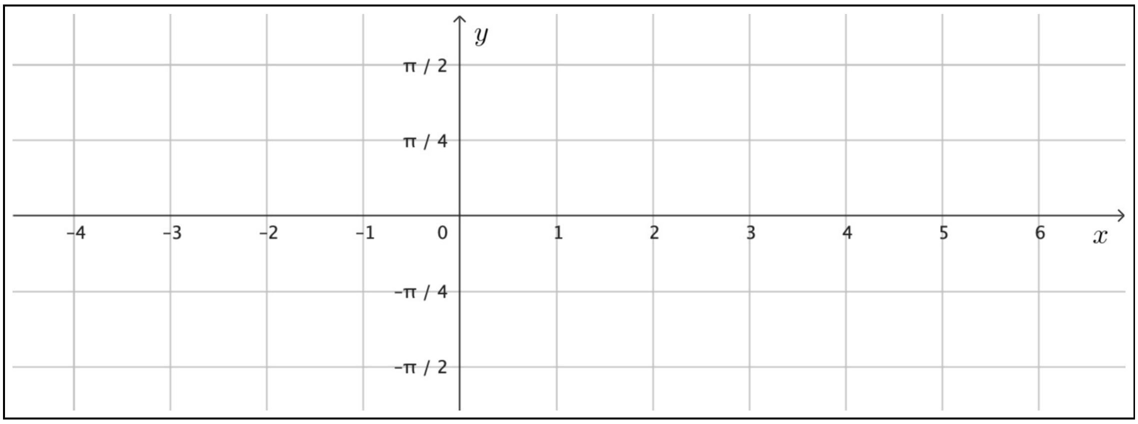
   (e) Skizziere den ungefähren Graphen der Momentangeschwindigkeit im vorbereiteten t-v-Diagramm. **Hinweis:** Bei jedem roten Punkt, also sekündlich, verändert sich mein Bewegungstyp von *gfB* zu *gmbB* oder umgekehrt.

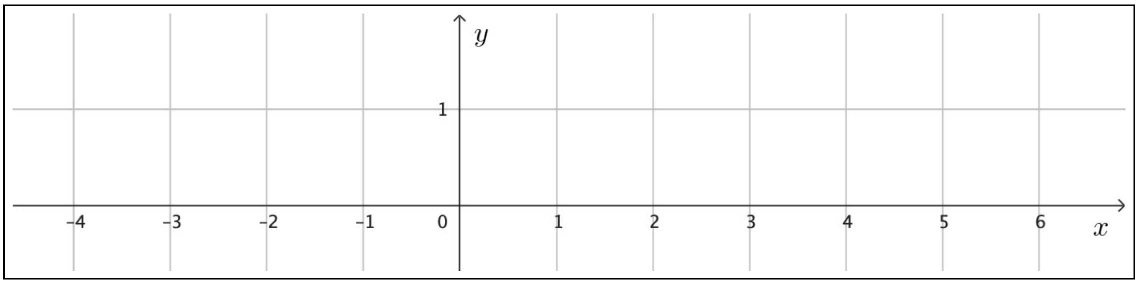




2. (a) Lasse dir den Graphen G_f der Funktion $f(x) = \arctan(x)$ in GeoGebra aufzeichnen und skizziere ihn hier im oberen Diagramm. Was für eine Symmetrie weist dieser Graph auf?

   (b) Skizziere darunter den Graphen der sogenannten *Ableitungsfunktion* f', also der Funktion, die zu jeder Stelle x den Wert der Steigung des G_f über x angibt. Symmetrie?





3. Wir betrachten die folgenden Funktionen:

Quadratische Funktion:	$f(x) = -x^2 + 2$
Kubische Funktion:	$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 4$
Lineare Funktion:	$f(x) = \dfrac{1}{3}x + 1$
Konstante Funktion:	$f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$
Kehrwert-Funktion (rein):	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
Kehrwert-Funktion (modifiziert):	$f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$
Wurzelfunktion:	$f(x) = \sqrt{x}$

   (a) Skizziere alle Funktionsgraphen und gib ihre Namen an (Gerade, Parabel, etc.).
   Hinweis: Den Graphen der kubischen Funktion darfst du dir auch von GeoGebra zeichnen lassen.

   (b) Gib zu jeder Funktion den Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ an der Stelle x mit Schritt h an und vereinfache ihn weitmöglichst.
   Tipp: Bei $f(x) = \sqrt{x}$ empfiehlt sich die Erweiterung von $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ mit $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$.

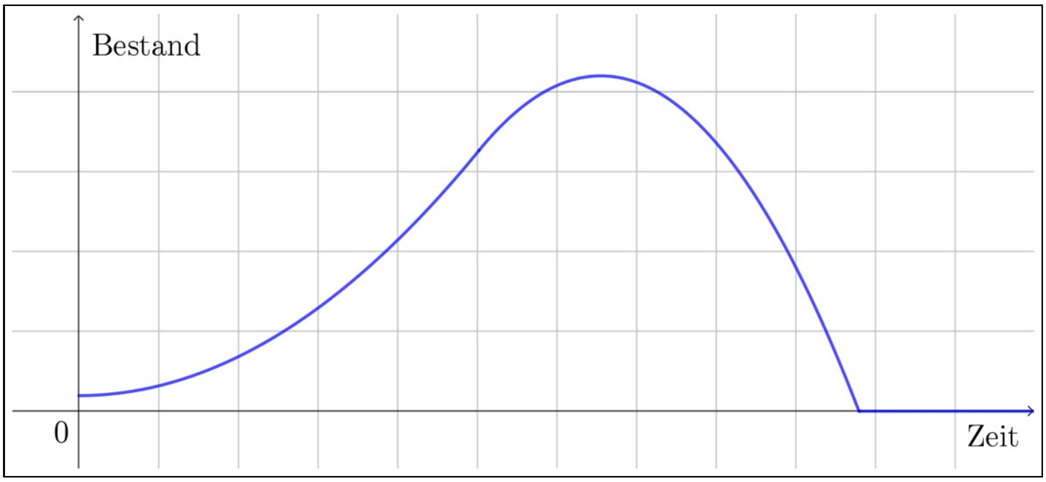
   (c) Bestimme mittels deiner Resultate aus (b) die Ableitungsfunktionen aller Funktionen.

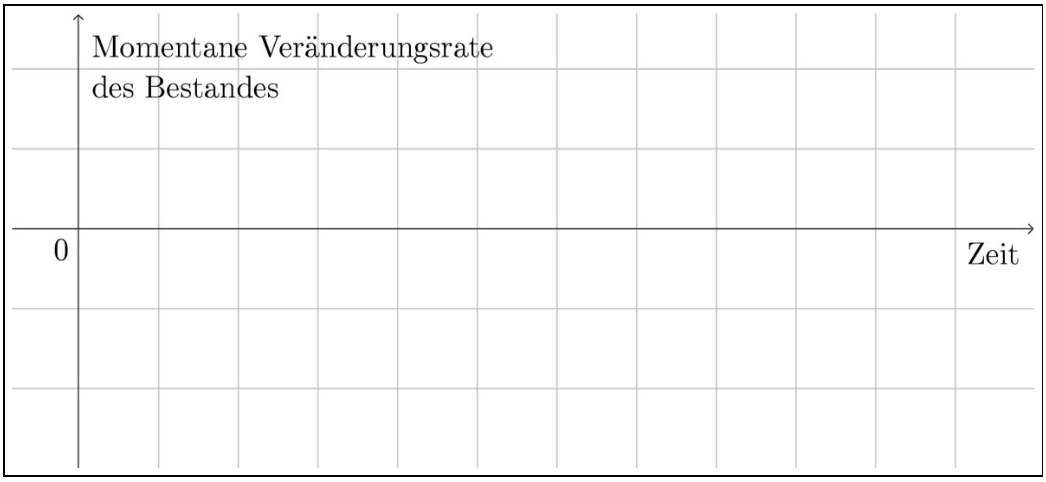
   (d) Bei welchen Funktionen hättest du das Resultat von (c) auch ohne Rechnen voraussagen können?

4. Der folgende Graph zeigt die Entwicklung einer Fruchtfliegenpopulation, die sich unter Laborbedingungen entwickelt.

   (a) Beschreibe die Entwicklung mit eigenen Worten. Finde eine mögliche biologische Begründung für den Verlauf der Kurve.

   (b) Skizziere den Graph der Bestandsänderungsrate im Diagramm darunter.
   Hinweis: Der gekrümmte Teil der Bestandskurve setzt sich aus zwei Parabelabschnitten zusammen!





5. Betrachte die folgenden quadratischen Funktionen $g(x)$, $i(x)$ und $k(c)$:

$$g(x) = 5x^2 - 3x + 7 \qquad i(x) = -4x^2 + x + 3 \qquad k(c) = 155c^2 - 155c - 155$$

   (a) Bestimme $g'(x)$, $i'(x)$ und $k'(c)$ mittels Limesbildung des Differenzenquotienten für $h \to 0$.

   (b) Was fällt dir auf? Kannst du Regeln ausmachen, was beim Ableiten mit dem konstanten Glied, mit dem linearen Glied und mit dem quadratischen Glied passiert?

   (c) Aufgrund deiner Antworten zu (b): Wie dürfte die Ableitung von $j(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 9$ lauten?

   (d) Bestimme die Ableitung der Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$ der quadratischen Funktion und bestätige (oder widerlege) damit deine unter (b) gefundenen Antworten.

   (e) Mit welcher Steigung durchquert eine durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ gegebene Parabel die y-Achse?

   (f) Welches Resultat liefert die Lösung der Bedingungsgleichung $f'(x) = 0$ bei einer quadratischen Funktion?

6. Unten siehst du die Graphen von vier Funktionen $f(x)$. Skizziere jeweils den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion $f'(x)$ im Koordinatensystem darunter.

   Tipp: In den Ableitungsgraphen gibt es keine Knicke.