Übungen zur Differentialrechnung

SERIE II: Erste Ableitungsregeln und Tangentenbestimmung

Klasse 155c / AGe

1. Zunächst ein Beispiel zur Ableitung eines **Polynoms** (= Summe mehrerer natürlicher Potenzen von x):

$$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 7x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x - 7 = \underline{\underline{12x^2 + 10x - 7}}$$

Hier wurden alle Regeln aus Kapitel 2 angewendet:

- Die **additive Konstante** $+3$ fällt einfach weg.
- Die **multiplikativen Konstanten** 4, 5 und 7 bleiben erhalten.
- Das Polynom $f(x)$ ist eine **Summe resp. Differenz** einzelner Potenzterme von x. Die Ableitung ist dann die Summe der einzelnen Ableitungen.
- Die einzelnen **Potenzen** x^3, x^2 und x^1 haben die Ableitungen $3x^2$, $2x$ $(= 2x^1)$ und 1 $(= 1x^0)$.

Leite nun selber ein paar Polynome ab. Dabei solltest du bereits jetzt deine Geschwindigkeit trainieren! **Ein Polynom abzuleiten sollte künftig im Handumdrehen erledigt sein!**

$$a(x) = 2x + 5 \qquad b(x) = 7x^2 - 5x + 29 \qquad c(x) = 13x^3 - 8x^2 + 15x - 14$$

$$d(x) = 12x^5 - 9x^3 \qquad e(x) = 155c \qquad f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{100}$$

$$g(x) = 6x^6 - \frac{1}{5}x^5 \qquad h(x) = -\frac{1}{23}x^8 - \frac{3}{10}x^5 \qquad i(x) = \frac{4}{81}x^{27} - \frac{5}{9}x^{12} + \frac{12}{25}x^5 + \pi$$

2. Auch Polynome mit Parametern solltest du ohne Weiteres ableiten können:

Beispiel: $\quad f(x) = ax^3 + (5-b)x^2 - \pi x + \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2(5-b)x - \pi$

Führe dazu ein paar Ableitungen durch:

$$a(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad b(x) = mx^3 - 7qx + 8z \qquad c(x) = 2(a+d)x^6 - 7(v-3)x^5$$

$$d(x) = \frac{b+c}{14}x^7 - \frac{b-c}{12}x^4 \qquad e(x) = \frac{1}{n}x^n \qquad f(x) = \frac{m}{np}x^p + \frac{m}{n}x^m$$

3. Die Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ gilt nicht nur für natürliche Exponenten $n \in \mathbb{N}$, sondern für beliebige reelle Exponenten ausser 0, also für alle $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Damit lassen sich auch **Bruchfunktionen** relativ einfach ableiten, denn $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$:

Beispiel: $\quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (-1) \cdot x^{-1-1} = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Und auch **Wurzelfunktionen** sind damit ableitbar, denn $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$:

Beispiel: $\quad f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Offenbar folgt man bei solchen Ableitungen immer demselben Rezept:

i. Bruch resp. Wurzel in die Potenzschreibweise verwandeln.
ii. Ableiten durch Anwendung der Potenzregel.
iii. Zurückverwandeln in einen Bruch- resp. Wurzelausdruck.

Leite damit die folgenden Funktionen ab:

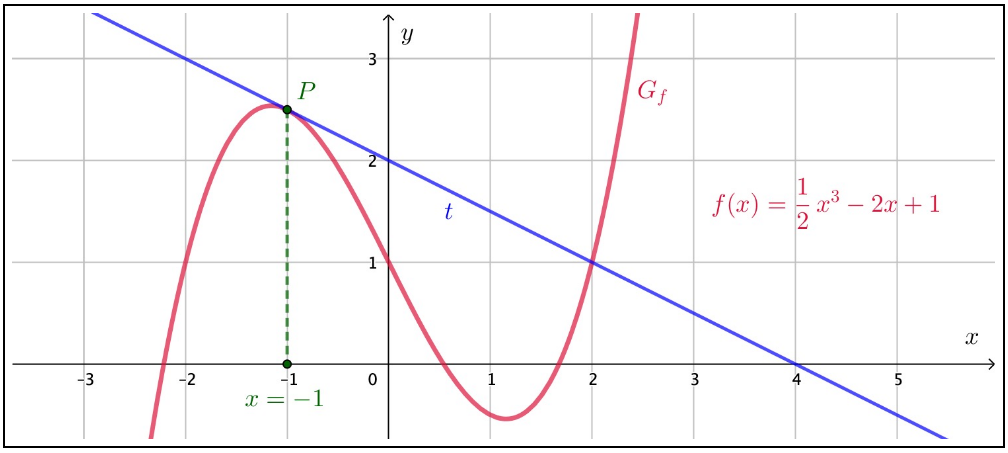
$$a(x)=\frac{1}{x^2}\qquad b(x)=\frac{3}{x^3}\qquad c(x)=-\frac{1}{x^4}\qquad d(x)=\frac{2}{5x^5}\qquad e(x)=\sqrt{2}$$

$$f(x)=12\sqrt[3]{x}\qquad g(x)=12\sqrt[4]{x}\qquad h(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}\qquad i(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\qquad j(x)=x^2\sqrt{x}$$

$$k(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\qquad l(x)=\frac{4}{5x\sqrt[4]{x}}\qquad m(x)=\frac{155\sqrt{x^{155}}}{x^{76}}\qquad n(x)=3\sqrt{x}+x\sqrt{x}$$

4. **Tangentenbestimmung mit Differentialrechnung**

Musterbeispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3-2x+1$. Hier ihr Graph:



Gesucht ist die Gleichung der Tangente t an den G_f über der Stelle $x=-1$.

Lösung: Die y-Koordinate von $P\in G_f$ über $x_P=-1$ ist durch den Funktionswert $f(-1)$ gegeben:

$$y_P=f(x_P)=f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)^3-2\cdot(-1)+1=\underline{\frac{5}{2}}$$

"Die Ableitung $f'(x)$ ist stets die Steigung der Tangente an den G_f über der Stelle x." Also ist $f'(-1)$ die Steigung m der gesuchten Tangente t. Dafür erhalten wir:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-2x+1\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-2\quad\Rightarrow\quad m=f'(-1)=\frac{3}{2}\cdot(-1)^2-2=\underline{-\frac{1}{2}}$$

Wir haben (auswendig!) gelernt: Eine Gerade mit Steigung m, die durch den Punkt $P(x_P,y_P)$ verläuft, wird beschrieben durch:

$$g(x)=m(x-x_P)+y_P\tag{1}$$

(Rep.: $g_0(x)=mx$ beschreibt eine Gerade mit Steigung m durch $(0,0)$. Diese verschieben wir um x_P nach rechts ($x\to x-x_P$) und um y_P ($\to +y_P$) nach oben, sodass sie durch $P(x_P,y_P)$ verläuft.)

Mit (1) können wir nun die Tangentengleichung direkt aufschreiben und noch ein wenig vereinfachen:

$$t(x)=m(x-x_P)+y_P=-\frac{1}{2}\big(x-(-1)\big)+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x+2}}$$

Tatsächlich hat t im Diagramm oben die Steigung $-\frac{1}{2}$ und der y-Achsenabschnitt ist 2.

Bestimme nun jeweils die Gleichung der Tangente über der Stelle x:

$$f(x)=5x^2\quad\text{mit}\quad x=3\qquad\qquad g(x)=-x^3+4x-5\quad\text{mit}\quad x=1$$

$$h(x)=\frac{1}{x^2}\quad\text{mit}\quad x=-2\qquad\qquad i(x)=2\sqrt{x}\quad\text{mit}\quad x=4$$

$$j(x)=\frac{2}{x\sqrt[3]{x}}\quad\text{mit}\quad x=-1\qquad\qquad k(x)=2x-\frac{3}{x}\quad\text{mit}\quad x=2$$