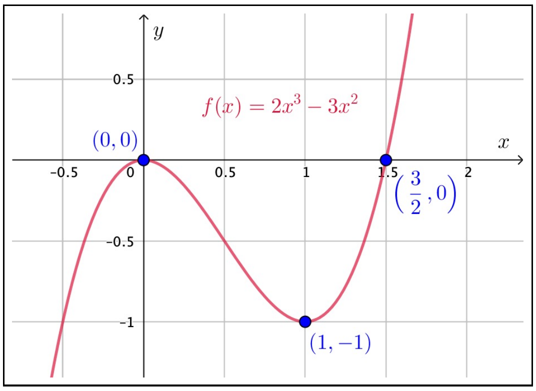
Übungen zur Differentialrechnung – Lösungen Serie II

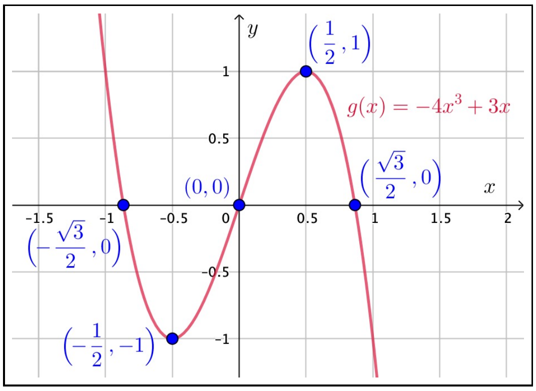
1. Für die Ableitung der Funktion $f(x)$ erhalten wir: $f(x) = 2x^3 - ax^2 - 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2 - 2ax - 3$. An der Stelle $x = 2$ muss diese Ableitung den Wert 5 annehmen. Daraus folgt für a:

$$f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 2a \cdot 2 - 3 = 24 - 4a - 3 = 21 - 4a \overset{!}{=} 5 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = 4}}$$

2. - $f(x) = 2x^3 - 3x^2 = 2x^2(x - \frac{3}{2}) \quad \Rightarrow \quad$ Nullstellen: $\quad x = 0 \quad$ und $\quad x = \frac{3}{2}$
   $\Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) \quad \Rightarrow \quad$ Horizontalstellen: $\quad x = 0 \quad$ und $\quad x = 1$
   $\Rightarrow \quad$ Horizontalpunkte: $\quad (0,0) \quad$ und $\quad (1,-1)$
   Glied der höchsten Potenz: $2x^3 \Rightarrow$ Graph kommt links von unten und geht rechts nach oben

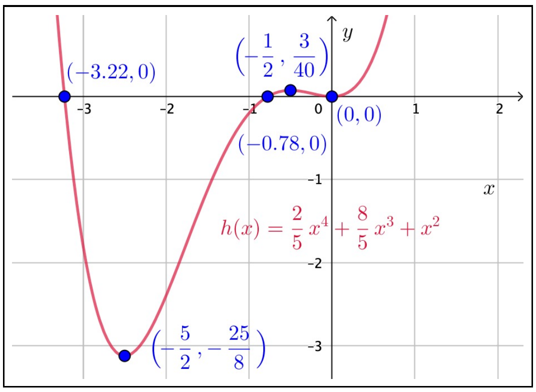
   - $g(x) = -4x^3 + 3x = -4x(x^2 - \frac{3}{4}) \quad \Rightarrow \quad$ Nullstellen: $\quad x = 0 \quad$ und $\quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.87$
   $\Rightarrow \quad g'(x) = -12x^2 + 3 = -12(x^2 - \frac{1}{4}) \quad \Rightarrow \quad$ Horizontalstellen: $\quad x = \pm\frac{1}{2}$
   $\Rightarrow \quad$ Horizontalpunkte: $\quad (-\frac{1}{2}, -1) \quad$ und $\quad (\frac{1}{2}, 1)$
   Glied der höchsten Potenz: $-4x^3 \Rightarrow$ Graph kommt links von oben und geht rechts nach unten

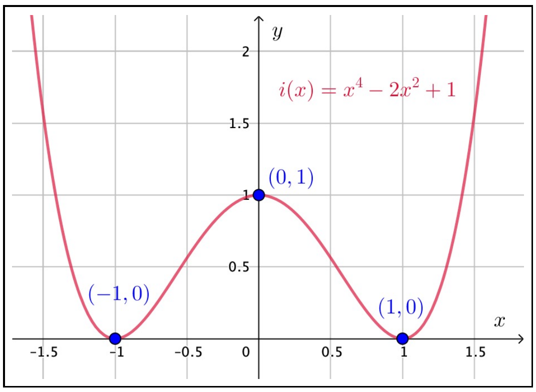




   - $h(x) = \frac{2}{5}\,x^4 + \frac{8}{5}\,x^3 + x^2 = \frac{2}{5}\,x^2(x^2 + 4x + \frac{5}{2}) \quad \Rightarrow \quad$ Mitternachtsformel!
   $\Rightarrow \quad$ Nullstellen: $\quad x = 0 \quad$ und $\quad x = -2 - \frac{\sqrt{6}}{2} \approx -3.22 \quad$ und $\quad x = -2 + \frac{\sqrt{6}}{2} \approx -0.78$
   $h'(x) = \frac{8}{5}\,x^3 + \frac{24}{5}\,x^2 + 2x = \frac{8}{5}\,x(x^2 - 3x + \frac{5}{2}) \quad \Rightarrow \quad$ Mitternachtsformel!
   $\Rightarrow \quad$ Horizontalstellen: $\quad x = 0 \quad$ und $\quad x = -\frac{5}{2} \quad$ und $\quad x = -\frac{1}{2}$
   $\Rightarrow \quad$ Horizontalpunkte: $\quad (-\frac{5}{2}, -\frac{25}{8}) \quad$ und $\quad (-\frac{1}{2}, \frac{3}{40}) = (-0.5, 0.075) \quad$ und $\quad (0,0)$
   Glied der höchsten Potenz: $\frac{2}{5}\,x^4 \Rightarrow$ Graph kommt links von oben und geht rechts nach oben

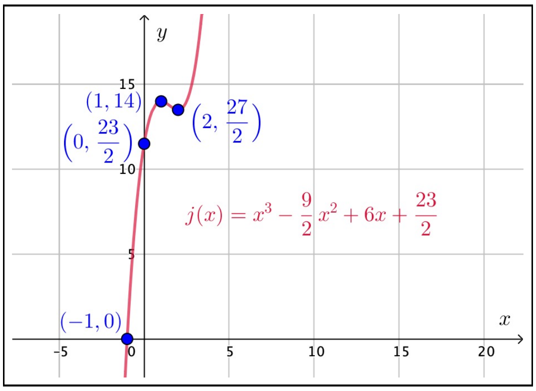
   - $i(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x+1)^2(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad$ Nullstellen: $\quad x = \pm 1$
   $i'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad$ Horizontalstellen: $\quad x = 0 \quad$ und $\quad x = \pm 1$
   $\Rightarrow \quad$ Horizontalpunkte: $\quad (-1,0) \quad$ und $\quad (0,1) \quad$ und $\quad (1,0)$
   Glied der höchsten Potenz: $x^4 \Rightarrow$ Graph kommt links von oben und geht rechts nach oben

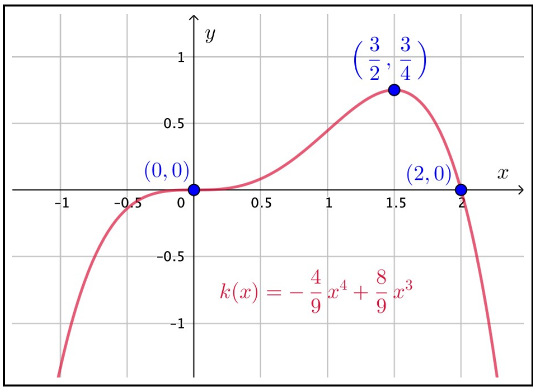




- $j(x) = (x+1)(x^2 - \frac{11}{2}\,x + \frac{23}{2}) \quad \Rightarrow \quad$ Nullstelle: $\quad x = -1$
  Diskriminante des Restterms: $\quad D = b^2 - 4ac = \frac{121}{4} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{23}{2} = \frac{121-184}{4} < 0$
  $\Rightarrow \quad$ keine weiteren Nullstellen!
  Ausmultiplizierte Form: $\quad j(x) = (x+1)(x^2 - \frac{11}{2}\,x + \frac{23}{2}) = x^3 - \frac{9}{2}\,x^2 + 6x + \frac{23}{2}$
  $j'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x^2 - 3x + 2) \quad \Rightarrow \quad$ Horizontalstellen: $\quad x = 1 \quad$ und $\quad x = 2$
  $\Rightarrow \quad$ Horizontalpunkte: $\quad (1, 14) \quad$ und $\quad (2, \frac{27}{2})$
  Glied der höchsten Potenz: $x^3 \Rightarrow$ Graph kommt links von unten und geht rechts nach oben

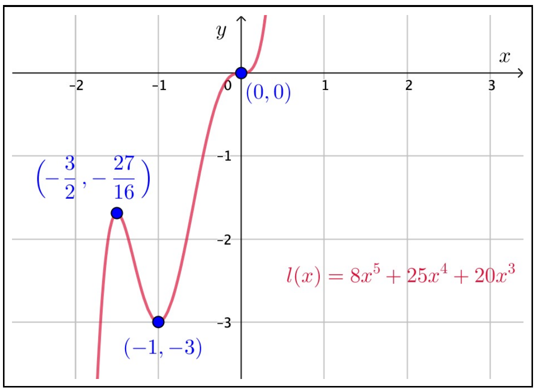
- $k(x) = -\frac{4}{9}\,x^4 + \frac{8}{9}\,x^3 = -\frac{4}{9}\,x^3(x-2) \quad \Rightarrow \quad$ Nullstellen: $\quad x = 0 \quad$ und $\quad x = 2$
  $k'(x) = -\frac{16}{9}\,x^3 + \frac{8}{3}\,x^2 = -\frac{16}{9}\,x^2(x - \frac{3}{2}) \quad \Rightarrow \quad$ Horizontalstellen: $\quad x = 0 \quad$ und $\quad x = \frac{3}{2}$
  $\Rightarrow \quad$ Horizontalpunkte: $\quad (0, 0) \quad$ und $\quad (\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$
  Glied der höchsten Potenz: $-\frac{4}{9}\,x^4 \Rightarrow$ Graph kommt links von unten und geht rechts nach unten

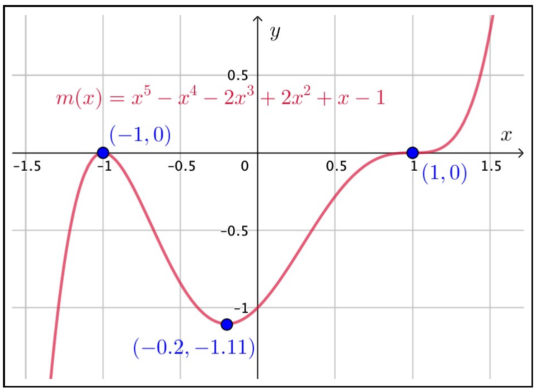




- $l(x) = 8x^5 + 25x^4 + 20x^3 = 8x^3(x^2 + \frac{25}{8}\,x + \frac{5}{2}) \quad \Rightarrow \quad$ Sichere Nullstelle: $\quad x = 0$
  $\Rightarrow \quad$ Diskriminante! $\quad \Rightarrow \quad D = (\frac{25}{8})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} = \frac{625-640}{64} < 0 \quad \Rightarrow \quad$ keine weiteren Nullstellen
  $l'(x) = 40x^4 + 100x^3 + 60x^2 = 40x^2(x^2 + \frac{5}{2}\,x + \frac{3}{2}) = 40x^2(x+1)(x + \frac{3}{2})$
  $\Rightarrow \quad$ Horizontalstellen: $\quad x = -\frac{3}{2} \quad$ und $\quad x = -1 \quad$ und $\quad x = 0$
  $\Rightarrow \quad$ Horizontalpunkte: $\quad (-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}) \approx (-1.5, -1.69) \quad$ und $\quad (-1, -3) \quad$ und $\quad (0, 0)$
  Glied der höchsten Potenz: $8x^5 \Rightarrow$ Graph kommt links von unten und geht rechts nach oben

- $m(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = (x-1)(x^4 - 2x^2 + 1) = (x-1)^3(x+1)^2$ (vgl. Fkt. $i(x)$)
  $\Rightarrow \quad$ Nullstellen: $\quad x = \pm 1$
  Wenn die Nullstellen von $m(x)$ ebenfalls Nullstellen der Ableitung $m'(x)$ sind, dann muss sich aus $m'(x)$ mindestens ein Faktor $(x^2 - 1) = (x+1)(x-1)$ ausklammern lassen! Tatsächlich:
  $$m'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = (x^2 - 1)(5x^2 - 4x - 1) = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)(x-1)^2(x+1)$$
  $\Rightarrow \quad$ Horizontalstellen: $\quad x = \pm 1 \quad$ und $\quad x = -\frac{1}{5}$
  $\Rightarrow \quad$ Horizontalpunkte: $\quad (-1, 0) \quad$ und $\quad (-\frac{1}{5}, -\frac{3456}{3125}) \approx (-0.2, -1.11) \quad$ und $\quad (1, 0)$.
  Glied der höchsten Potenz: $x^5 \Rightarrow$ Graph kommt links von unten und geht rechts nach oben





3. **Ein Polynom 5. Grades kann höchstens 4 Horizontalpunkte aufweisen!**

   Die Antwort ist ein Resultat der Potenzregel! Aus einem Polynom 5. Grades wird beim Ableiten ein Polynom 4. Grades. Dieses kann in maximal vier Klammern faktorisiert werden:

   $$f'(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

   Dabei handelt es sich bei x_1, x_2, x_3 und x_4 um maximal vier verschiedene Nullstellen der Ableitung $f'(x)$, also um maximal vier verschiedene Horizontalstellen des ursprünglichen Polynoms $f(x)$.

   Ganz allgemein lässt sich für jedes beliebige Polynom formulieren:

   Ein Polynom n-ten Grades besitzt maximal n Nullstellen und $n-1$ Horizontalstellen!

4. **Vermutung:** Eine Tangente mit Steigung $-\frac{1}{2}$ könnte über der Stelle $x = -1$ und über der Stelle $x = 1$ an den Graphen angelegt werden.

   Wir überprüfen, ob das stimmt, indem wir die passenden Stellen analytisch ermitteln. Wir fragen, für welche x die Ableitung $f'(x)$ den Wert $-\frac{1}{2}$ annimmt:

   $$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2 \overset{!}{=} -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-1) = 0$$

   Tatsächlich ergibt sich $x = \pm 1$ für die Stellen mit Tangentensteigung $-\frac{1}{2}$. Unsere Vermutung hat also gestimmt!

   Wir müssen nun die y-Koordinaten der Berührungspunkte ermitteln:

   $$f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1) + 1 = -\frac{1}{2} + 2 + 1 = \frac{5}{2}$$
   $$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{1}{2}$$

   Daraus folgt für die beiden Tangentengleichungen:

   $$t_1(x) = -\frac{1}{2}\big(x - (-1)\big) + \frac{5}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x + 2}} \qquad \text{und} \qquad t_2(x) = -\frac{1}{2}\big(x - 1\big) - \frac{1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x}}$$

5. Wir leiten die Funktionsgleichung ab und erhalten:

   $$f(x) = \frac{1}{n} \cdot x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot x^{n-1} = x^{n-1}$$

   Diese Ableitung soll an der Stelle $x = 8$ den Wert 4 aufweisen. Daraus folgt:

   $$f'(8) = 8^{n-1} \overset{!}{=} 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^3\right)^{n-1} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3(n-1)} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3(n-1) = 2$$
   $$\Leftrightarrow \quad 3n - 3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3n = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{n = \frac{5}{3}}}$$

   Mit diesem n lautet also die gesuchte Funktion:

   $$f(x) = \frac{1}{\frac{5}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}\,x\sqrt[3]{x^2} \quad \text{mit} \quad f'(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

   Überprüfen wir damit noch rasch die anfängliche Forderung:

   $$f'(8) = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4 \quad \checkmark$$