Übungen zur Differentialrechnung

SERIE III: Analyse von Polynomfunktionen

Klasse 155c / AGe

1. Gegeben sei das Polynom $f(x) = 2x^3 - ax^2 - 3x + 1$.

   Für welchen Wert von a besitzt der Graph an der Stelle $x = 2$ die Steigung 5?

2. Skizziere die Graphen der folgenden Polynomfunktionen, indem du zuerst allfällige Nullstellen und Horizontalpunkte rechnerisch bestimmst und in ein Koordinatensystem einträgst.

   - $f(x) = 2x^3 - 3x^2$
   - $g(x) = -4x^3 + 3x$
   - $h(x) = \frac{2}{5}x^4 + \frac{8}{5}x^3 + x^2$
   - $i(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
     Hinweis: $i(x)$ kann mit Hilfe von binomischen Formeln perfekt faktorisiert werden!
   - $j(x) = (x+1)\big(x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{23}{2}\big)$
     Hinweis: Überprüfe zuerst, ob $j(x)$ neben $x = -1$ noch weitere Nullstellen besitzt!
   - $k(x) = -\frac{4}{9}x^4 + \frac{8}{9}x^3$
   - $l(x) = 8x^5 + 25x^4 + 20x^3$
   - $m(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ **Schwieriger!**
     Hinweis 1: Die Faktorisierung erscheint zunächst als ein Ding der Unmöglichkeit. Tatsächlich ist aber $x = 1$ eine Nullstelle und man kann ansetzen:

     $$m(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = (x-1)(x^4 - \ldots + 1)$$

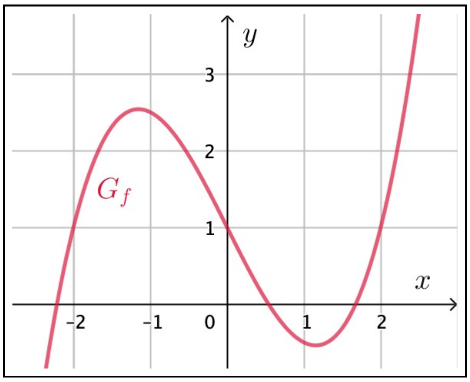
     Überlege dir, wie der fehlende Term in der zweiten Klammer aussehen muss und betrachte anschliessend nochmals die Faktorisierung der Funktion $i(x)$ oben.
     Hinweis 2: Die Faktorisierung der Ableitung $m'(x)$ scheint ebenfalls ein schwieriges Unterfangen zu sein. Allerdings ist es hier so, dass alle Nullstellen von $m(x)$ nicht ganz zufällig auch Nullstellen der Ableitungsfunktion $m'(x)$ sind. Sobald du den Graphen einmal vor dir siehst, wird diese Aussage bildlich nachvollziehbar!

3. Mittlerweile haben wir einige Erfahrung mit Polynomen, ihren Graphen und ihren Ableitungen. Daher die folgende Frage, die du nun sicher beantworten kannst:

   Wie viele Horizontalpunkte kann ein Polynom 5. Grades maximal aufweisen?

4. Gegeben sei die kubische Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 1$. Den Graph dazu siehst du rechts.

   Überlege dir, wie die beiden Tangenten mit Steigung $-\frac{1}{2}$ an den G_f in etwa zu liegen kommen. Bestimme anschliessend die Gleichungen dieser Tangenten.



5. Für welchen Wert des Parameters n besitzt der Graph zu $f(x) = \frac{1}{n} \cdot x^n$ über der Stelle $x = 8$ die Steigung 4?