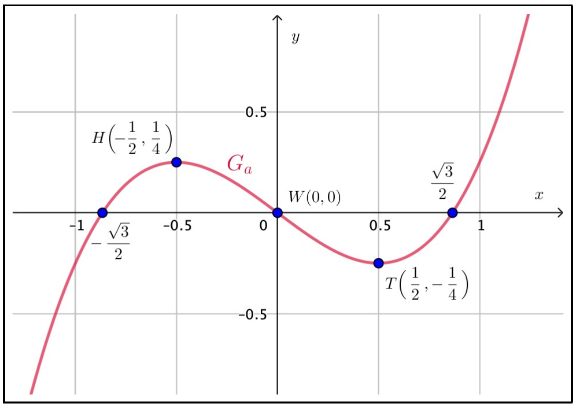
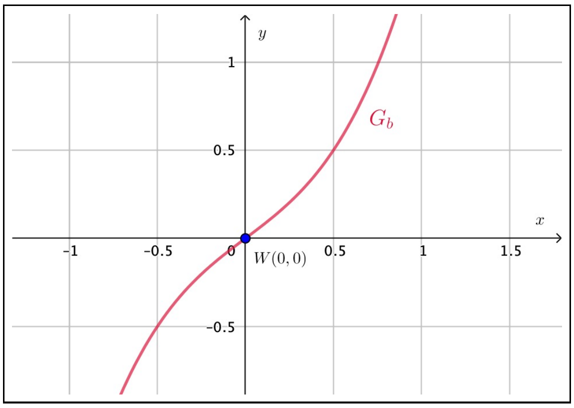
Übungen zur Differentialrechnung – Lösungen Serie IV

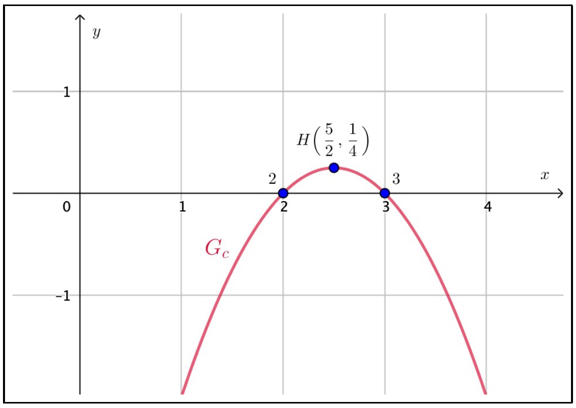
1. Hier die Angaben zu den verschiedenen Funktionen:

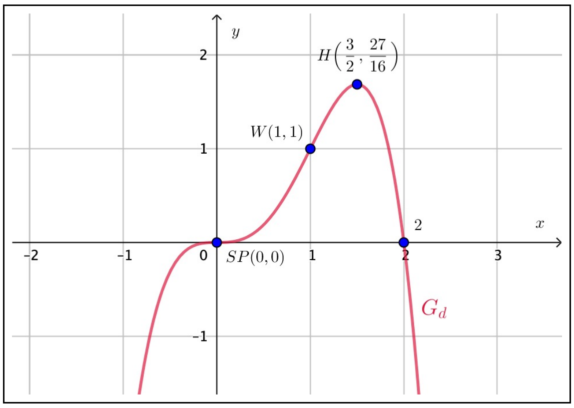
   - $a(x) = x^3 - \frac{3}{4}\,x = x(x^2 - \frac{3}{4}) = x(x + \frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow$ NS: $x = 0,\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
     $a'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4} = 3(x^2 - \frac{1}{4}) = 3(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow$ HS: $x = \pm\frac{1}{2}$
     $a(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ und $a(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} \Rightarrow H(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ und $T(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$
     $a''(x) = 6x \Rightarrow$ WS: $x = 0$ mit $a(0) = 0 \Rightarrow W(0, 0)$
     G_a kommt von unten links und geht nach oben rechts
     $a(x)$ enthält ausschliesslich ungerade Potenzen von $x \Rightarrow G_a$ punktsymmetrisch zu $(0, 0)$





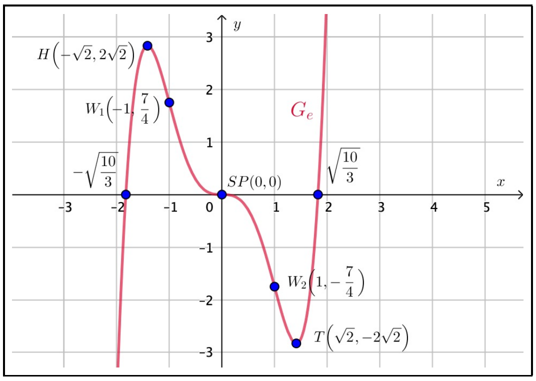
   - $b(x) = x^3 + \frac{3}{4}\,x = x(x^2 + \frac{3}{4})$ (keine weitere Faktorisierung!) $\Rightarrow$ NS: $x = 0$
     $b'(x) = 3x^2 + \frac{3}{4} = 3(x^2 + \frac{1}{4}) \Rightarrow$ keine HS!
     $b''(x) = 6x \Rightarrow$ WS: $x = 0$ mit $b(0) = 0 \Rightarrow W(0, 0)$
     G_b kommt von unten links und geht nach oben rechts
     $b(x)$ enthält ausschliesslich ungerade Potenzen von $x \Rightarrow G_b$ punktsymmetrisch zu $(0, 0)$
   - $c(x) = -x^2 + 5x - 6 = -(x^2 - 5x + 6) = -(x - 2)(x - 3) \Rightarrow$ NS: $x = 2,\ x = 3$
     $c'(x) = -2x + 5 = -2(x - \frac{5}{2}) \Rightarrow$ HS: $x = \frac{5}{2}$.
     $c(\frac{5}{2}) = \frac{1}{4} \Rightarrow H(\frac{5}{2}, \frac{1}{4})$
     $c''(x) = -2 \Rightarrow$ keine WS!
     G_c ist eine Parabel; kommt von oben links und geht nach oben rechts

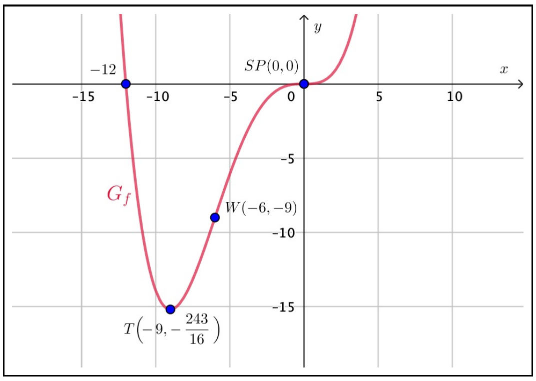




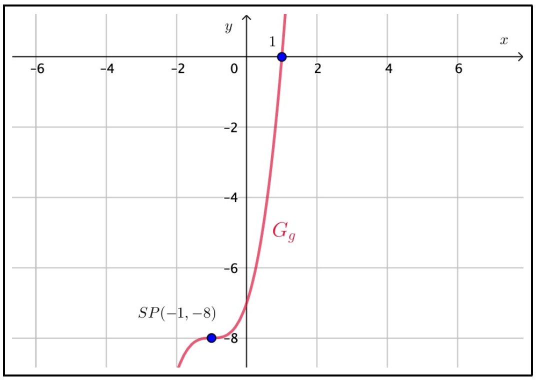
   - $d(x) = -x^4 + 2x^3 = -x^3(x - 2) \Rightarrow$ NS: $x = 0,\ x = 2$
     $d'(x) = -4x^3 + 6x^2 = -4x^2(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow$ HS: $x = 0$ und $x = \frac{3}{2}$ mit $d(\frac{3}{2}) = \frac{27}{16}$
     $d''(x) = -12x^2 + 12x = -12x(x - 1) \Rightarrow$ WS: $x = 0$ und $x = 1$
     mit $d(1) = 1 \Rightarrow SP(0, 0)$ und $W(1, 1)$
     $d''(\frac{3}{2}) = -9 < 0 \Rightarrow H(\frac{3}{2}, \frac{27}{16})$
     G_d kommt von unten links und geht nach unten rechts

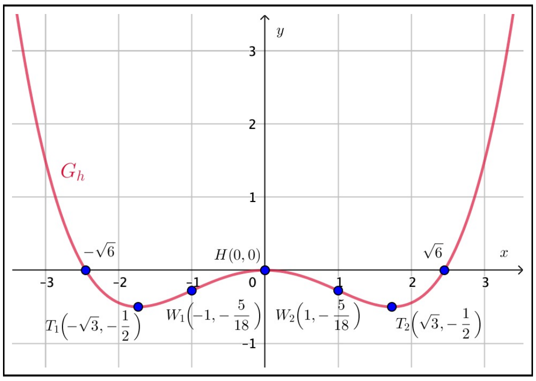
- $e(x) = \frac{3}{4}\,x^5 - \frac{5}{2}\,x^3 = \frac{3}{4}\,x^3(x^2 - \frac{10}{3}) = \frac{3}{4}\,x^3(x + \sqrt{10/3})(x - \sqrt{10/3}) \Rightarrow$ NS: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{10/3}$
  $e'(x) = \frac{15}{4}\,x^4 - \frac{15}{2}\,x^2 = \frac{15}{4}\,x^2(x^2 - 2) = \frac{15}{4}\,x^2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \Rightarrow$ HS: $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{2}$
  $e(-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ und $e(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$
  $e''(x) = 15x^3 - 15x = 15x(x^2 - 1) = 15x(x + 1)(x - 1) \Rightarrow$ WS: $x = 0$ und $x = \pm 1$
  mit $e(-1) = \frac{7}{4}$ und $e(1) = -\frac{7}{4} \Rightarrow SP(0,0)$, $W_1(-1, \frac{7}{4})$ und $W_2(1, -\frac{7}{4})$
  $e''(-\sqrt{2}) = -15\sqrt{2} < 0$ und $e''(\sqrt{2}) = 15\sqrt{2} > 0 \Rightarrow H(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ und $T(\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$
  G_e kommt von unten links und geht nach oben rechts
  $d(x)$ enthält ausschliesslich ungerade Potenzen von $x \Rightarrow G_e$ punktsymmetrisch zu $(0,0)$





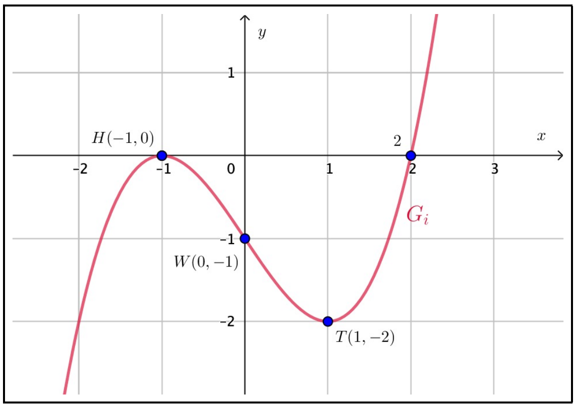
- $f(x) = \frac{1}{144}\,x^4 + \frac{1}{12}\,x^3 = \frac{1}{144}\,x^3(x + 12) \Rightarrow$ NS: $x = 0$, $x = -12$
  $f'(x) = \frac{1}{36}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^2 = \frac{1}{36}\,x^2(x + 9) \Rightarrow$ HS: $x = 0$ und $= -9$ mit $f(-9) = -\frac{243}{16} \approx -15.2$
  $f''(x) = \frac{1}{12}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x = \frac{1}{12}\,x(x + 6) \Rightarrow$ WS: $x = 0$ und $x = -6$ mit $f(-6) = -9$
  $\Rightarrow SP(0,0)$ und $W(-6,-9)$
  $f''(-9) = \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow T(-9, -\frac{243}{16})$
  G_f kommt von oben links und geht nach oben rechts
- $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 7 \Rightarrow$ erahne NS $x = 1$, denn: $1 + 3 + 3 - 7 = 0$
  $\Rightarrow g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 7 = (x - 1)(x^2 + 4x + 7)$
  Diskriminante von $x^2 + 4x + 7$: $D = 16 - 28 < 0 \Rightarrow$ keine weiteren NS!
  $g'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2 \Rightarrow$ HS: $x = -1$ mit $g(-1) = -8$
  $g''(x) = 6x + 6 = 6(x + 1) \Rightarrow$ WS: $x = -1 \Rightarrow W(-1, -8)$
  G_g kommt von unten links und geht nach oben rechts

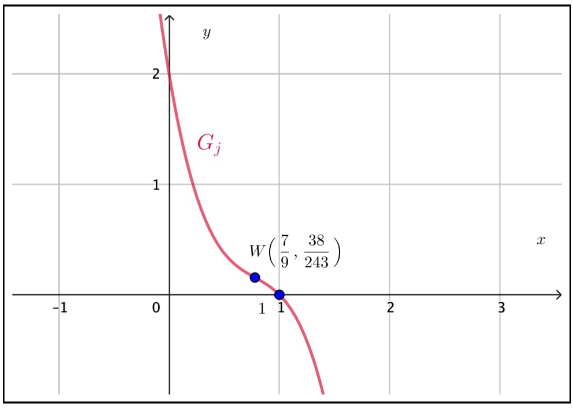




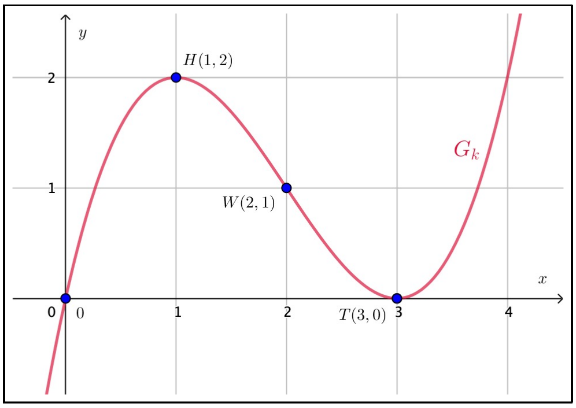
- $h(x) = \frac{1}{18}\,x^4 - \frac{1}{3}\,x^2 = \frac{1}{18}\,x^2(x^2 - 6) = \frac{1}{18}\,x^2(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6}) \Rightarrow$ NS: $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{6}$
  $h'(x) = \frac{2}{9}\,x^3 - \frac{2}{3}\,x = \frac{2}{9}\,x(x^2 - 3) = \frac{2}{9}\,x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \Rightarrow$ HS: $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{3}$
  $h(-\sqrt{3}) = h(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$
  $h''(x) = \frac{2}{3}\,x^2 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(x^2 - 1) = \frac{2}{3}(x + 1)(x - 1) \Rightarrow$ WS: $x = \pm 1$
  $h(-1) = h(1) = -\frac{5}{18} \Rightarrow W_1(-1, -\frac{5}{18})$ und $W_2(1, -\frac{5}{18})$
  $h''(0) = -\frac{2}{3}$ und $h''(-\sqrt{3}) = h''(\sqrt{3}) = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow H(0,0)$, $T_1(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ und $T_2(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$
  G_h kommt von oben links und geht nach oben rechts
  $h(x)$ enthält ausschliesslich gerade Potenzen von $x \Rightarrow G_h$ symmetrisch zur y-Achse

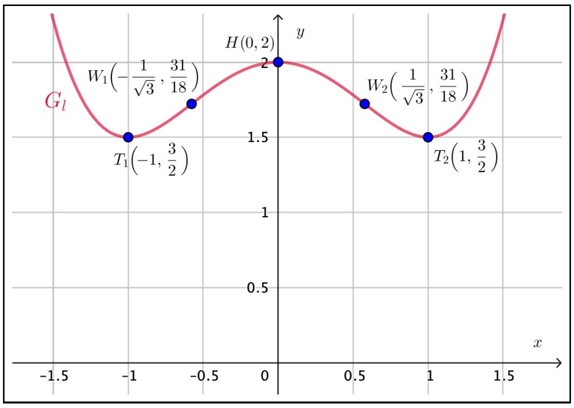
- $i(x) = \frac{1}{2}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x - 1 = \frac{1}{2}(x^3 - 3x - 2)$
  $i'(x) = \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(x^2 - 1) = \frac{3}{2}(x+1)(x-1) \Rightarrow$ HS: $x = \pm 1$ mit $i(-1) = 0$ und $i(1) = -2$
  $\Rightarrow i(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x - 2) = \frac{1}{2}(x+1)(x^2 - x - 2) = \frac{1}{2}(x+1)^2(x-2) \Rightarrow$ NS: $x = -1$ und $x = 2$
  $i''(x) = 3x \Rightarrow$ WS: $x = 0$ mit $i(0) = -1 \Rightarrow W(0,-1)$
  $i''(-1) = -3 < 0$ und $i''(1) = 3 > 0 \Rightarrow H(-1,0)$ und $T(1,-2)$
  G_i kommt von unten links und geht nach oben rechts





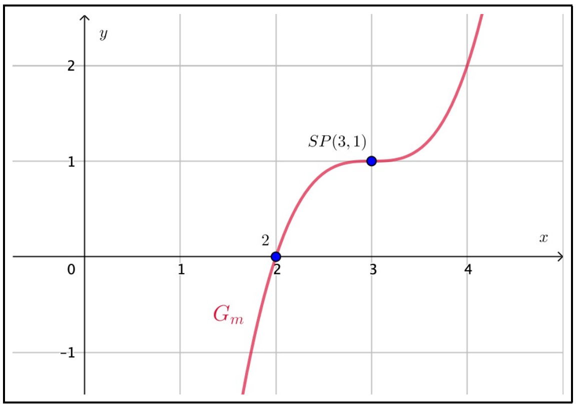
- $j(x) = -3x^3 + 7x^2 - 6x + 2 \Rightarrow$ erahne NS $x = 1$, denn: $-3 + 7 - 6 + 2 = 0$
  $\Rightarrow j(x) = -3x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = -3(x^3 - \frac{7}{3}\,x^2 + 2x - \frac{2}{3}) = -3(x-1)(x^2 - \frac{4}{3}\,x + \frac{2}{3})$
  Diskriminante von $x^2 - \frac{4}{3}\,x + \frac{2}{3}$: $D = \frac{16}{9} - \frac{8}{3} < 0 \Rightarrow$ keine weiteren NS!
  $j'(x) = -9x^2 + 14x - 6$ hat Diskriminante $D = 14^2 - 4 \cdot 9 \cdot 6 = 196 - 216 < 0 \Rightarrow$ keine HS!
  $j''(x) = -18x + 14 = -18(x - \frac{7}{9}) \Rightarrow$ WS: $x = \frac{7}{9}$ mit $j(\frac{7}{9}) = \frac{38}{243} \Rightarrow W(\frac{7}{9}, \frac{38}{243})$
  G_j kommt von oben links und geht nach unten rechts
- $k(x) = \frac{1}{2}\,x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}\,x = \frac{1}{2}\,x(x^2 - 6x + 9) = \frac{1}{2}\,x(x-3)^2 \Rightarrow$ NS: $x = 0$ und $x = 3$
  $k'(x) = \frac{3}{2}\,x^2 - 6x + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 3) = \frac{3}{2}(x-1)(x-3) \Rightarrow$ HS: $x = 1$ und $x = 3$ mit $k(1) = 2$
  $k''(x) = 3x - 6 = 3(x-2) \Rightarrow$ WS: $x = 2$ mit $k(2) = 1 \Rightarrow W(2,1)$
  $k''(1) = -3 < 0$ und $i''(3) = 3 > 0 \Rightarrow H(1,2)$ und $T(3,0)$
  G_k kommt von unten links und geht nach oben rechts

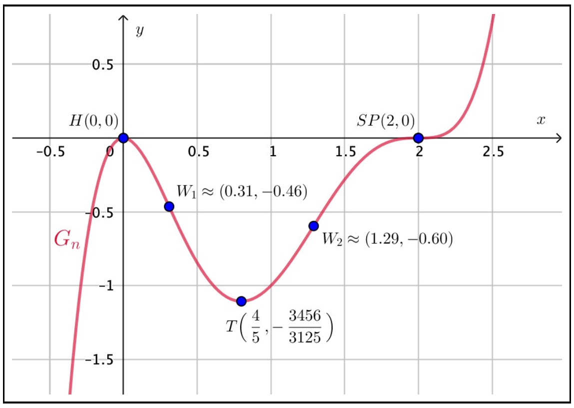




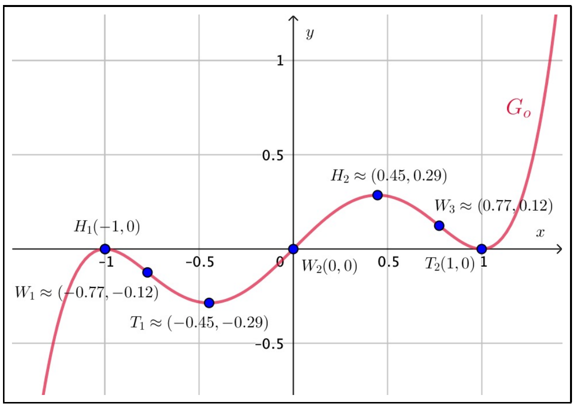
- $l(x) = \frac{1}{2}\,x^4 - x^2 + 2 \Rightarrow$ Substitution: $y = x^2 \Rightarrow l(y) = \frac{1}{2}\,y^2 - y + 2$
  $l(y)$ hat keine NS, denn $D = 1 - 4 < 0 \Rightarrow l(x)$ hat keine NS!
  $l'(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x+1)(x-1) \Rightarrow$ HS: $x = 0$ und $x = \pm 1$
  $l(0) = 2$ und $l(-1) = l(1) = \frac{3}{2}$
  $l''(x) = 6x^2 - 2 = 6(x^2 - \frac{1}{3}) = 6(x + \frac{1}{\sqrt{3}})(x - \frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow$ WS: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ mit $l(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = l(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{31}{18}$
  $\Rightarrow W_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{31}{18})$ und $W_2(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{31}{18})$
  $l''(0) = -2 < 0$ und $l''(-1) = l''(1) = 4 > 0 \Rightarrow H(0,2)$, $T_1(-1, \frac{3}{2})$ und $T_2(1, \frac{3}{2})$
  G_l kommt von oben links und geht nach oben rechts
  $l(x)$ enthält ausschliesslich gerade Potenzen von $x \Rightarrow G_l$ symmetrisch zur y-Achse

- $m(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 26 \Rightarrow$ erahne NS $x = 2$, denn: $8 - 36 + 54 - 26 = 0$
  $\Rightarrow m(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 26 = (x-2)(x^2 - 7x + 13)$
  Diskriminante von $x^2 - 7x + 13$: $D = 49 - 52 < 0 \Rightarrow$ keine weiteren NS!
  $m'(x) = 3x^2 - 18x + 27 = 2(x^2 - 6x + 9) = 3(x-3)^2 \Rightarrow$ HS: $x = 3$ mit $m(3) = 27 - 81 + 81 - 26 = 1$
  $m''(x) = 6x - 18 = 6(x-3) \Rightarrow$ WS: $x = 3 \Rightarrow SP(3,1)$
  G_m kommt von unten links und geht nach oben rechts

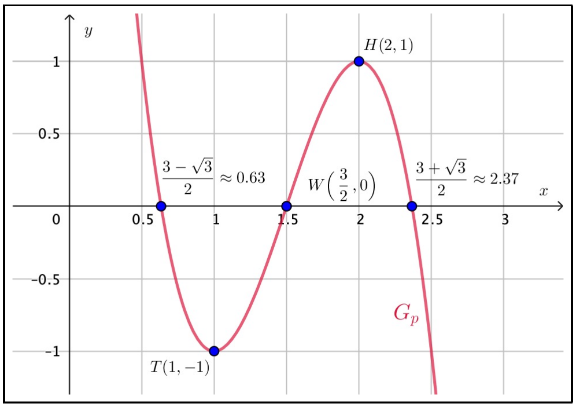


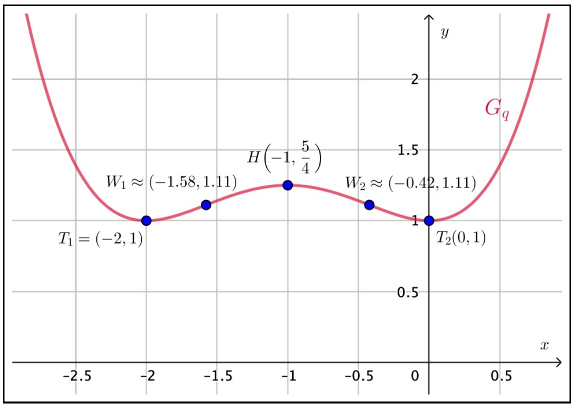


- $n(x) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2 = x^2(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \Rightarrow$ eine NS: $x = 0$
  versuche $(x-2)$ auszuklammern (vgl. Hinweis): $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)(x^2 - 4x + 4) = (x-2)^3$
  $\Rightarrow n(x) = x^2(x-2)^3$
  $n'(x) = 5x^4 - 24x^3 + 36x^2 - 16x = x(5x^3 - 24x^2 + 36x - 16) = x(x-2)(5x^2 - 14x + 8)$
  $\Rightarrow n'(x) = x(x-2)^2(5x-4) \Rightarrow$ HS: $x = 0$, $x = 2$ und $x = \frac{4}{5}$ mit $n(\frac{4}{5}) = -\frac{3456}{3125} \approx -1.1$
  $n''(x) = 20x^3 - 72x^2 + 72x - 16 = 4(5x^3 - 18x^2 + 18x - 4) = 4(x-2)(5x^2 - 8x + 2)$
  Weitere Faktorisierung mittels MNF: $x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-40}}{10} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}$
  $\Rightarrow$ WS: $x = 2$, $x = \frac{4-\sqrt{6}}{5} \approx 0.31$ und $x = \frac{4+\sqrt{6}}{5} \approx 1.29$
  mit $n(\frac{4-\sqrt{6}}{5}) \approx -0.46$ und $n(\frac{4+\sqrt{6}}{5}) \approx -0.60$
  $\Rightarrow SP(2,0)$ $W_1 \approx (0.31, -0.46)$ und $W_2 \approx (1.29, -0.60)$
  $n''(0) = -16 < 0 \Rightarrow H(0,0)$
  G_n kommt von unten links und geht nach oben rechts
- $o(x) = x^5 - 2x^3 + x = x(x^4 - 2x^2 + 1) = x(x^2-1)^2 = x(x+1)^2(x-1)^2 \Rightarrow$ NS: $x = 0$, $x = \pm 1$
  $o'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1 = (5x^2 - 1)(x^2 - 1) = 5(x - \frac{1}{\sqrt{5}})(x + \frac{1}{\sqrt{5}})(x+1)(x-1)$
  $\Rightarrow$ HS: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \approx \pm 0.45$ und $x = \pm 1$ mit $o(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}) = \pm\frac{16}{25\sqrt{5}} \approx \pm 0.29$
  $o''(x) = 20x^3 - 12x = 20x(x^2 - \frac{3}{5}) = 20x \cdot (x + \sqrt{\frac{3}{5}})(x - \sqrt{\frac{3}{5}}) \Rightarrow$ WS: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \approx \pm 0.77$
  mit $o(\pm\sqrt{\frac{3}{5}}) = \pm\frac{4\sqrt{3}}{25\sqrt{5}} \approx \pm 0.12 \Rightarrow W_1 \approx (-0.77, -0.12)$, $W_2(0,0)$ und $W_3 \approx (0.77, 0.12)$
  $o''(\pm 1) = \pm 8$ und $o''(\pm 0.29) \approx \mp 3.58$
  $\Rightarrow H_1(-1,0)$, $T_1 \approx (-0.45, -0.12)$, $H_2(0.45, 0.12)$ und $T_2(1,0)$
  G_o kommt von unten links und geht nach oben rechts, Punktsymmetrie zu $(0,0)$



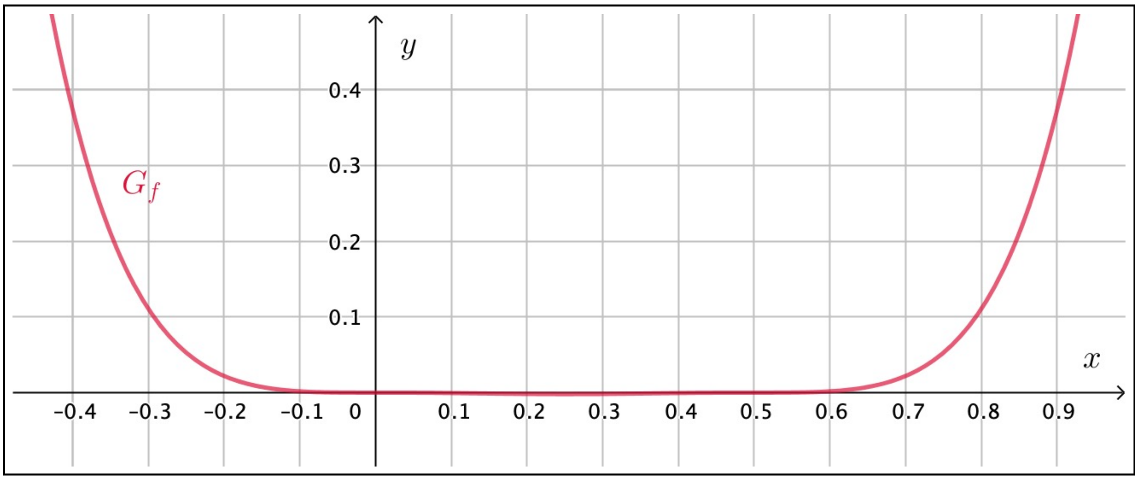
- $p(x) = -4x^3 + 18x^2 - 24x + 9 = -4(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - \frac{9}{4}) \Rightarrow$ keine NS auf Anhieb...
  $p'(x) = -12x^2 + 36x - 24 = -12(x^2 - 3x + 2) = -12(x-1)(x-2) \Rightarrow$ HS: $x = 1$ und $x = 2$
  mit $p(1) = -1$ und $p(2) = 1$
  $p''(x) = -24x + 36 = -24(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow$ WS: $x = \frac{3}{2}$ mit $p(\frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow W(\frac{3}{2}, 0) \Rightarrow$ NS: $x = \frac{3}{2}$
  $\Rightarrow p(x) = -4(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - \frac{9}{4}) = -4(x - \frac{3}{2})(x^2 - 3x + \frac{3}{2})$
  $\Rightarrow$ weitere NS aus MNF: $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$
  $p''(1) = 12 > 0$ und $p''(2) = -12 < 0 \Rightarrow T(1, -1)$ und $H(2, 1)$
  G_p kommt von oben links und geht nach unten rechts





- $q(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2 + 1$ hat keine NS, daher auch keine Faktorisierung
  $q'(x) = x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x+2)(x+1) \Rightarrow$ HS: $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$
  mit $q(-2) = 1$, $q(-1) = \frac{5}{4}$ und $q(0) = 1$
  $q''(x) = 3x^2 + 6x + 2 \Rightarrow$ MNF: $x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \approx -1.58$ oder -0.42
  Berechnung der y-Koordinaten durch `GeoGebra`: $W_1 \approx (-1.58, 1.11)$ und $W_2 \approx (-0.42, 1.11)$
  $q''(-2) = 2 > 0$, $q''(-1) = -1 < 0$ und $q''(0) = 2 > 0 \Rightarrow T_1(-2, 1)$, $H(-1, \frac{5}{4})$ und $T_2(0, 1)$
  G_q kommt von oben links und geht nach oben rechts

2. Der Funktionsgraph sieht auf den ersten Blick folgendermassen aus:



Zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ folgt dieser Graph im Wesentlichen der x-Achse. Ganz knapp lässt sich erahnen, dass er sie aber auch verlässt und dass er nicht immer ganz horizontal ist. Wie sollte er auch?! Wir wissen ja, dass es sich um den Graphen eines Polynoms 6-ten Grades handelt. Dieses kann maximal sechs Nullstellen aufweisen. Der Graph darf maximal sechs gemeinsame Punkte mit der x-Achse aufweisen. Tatsächlich wissen wir bereits, dass es maximal vier solche Stellen geben kann, denn ein erster Faktorisierungsschritt lautet:

$$f(x) = 8x^6 - 12x^5 + 6x^4 - x^3 = x^3(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$$

Überlegen wir, ob eine weitere Faktorisierung geht. Das scheint zunächst schwierig, allerdings ergibt sich bei näherer Betrachtung des kubischen Ausdrucks in der Klammer ein Verdacht: Es könnte sich um die 3. Potenz eines Binoms handeln! Hinweise sind das $8x^3$ vorne und die 1 hinten (beides Kuben), dass die Vorzeichen abwechseln und dass die mittleren zwei Glieder je einen Faktor 3 beinhalten. Versuchen wir es:

$$(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 1 + 3\cdot 2x\cdot 1^2 - 1^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \qquad \checkmark$$

Das hat funktioniert. Mit $(2x-1) = 2(x-\frac{1}{2})$ folgt für die vollständige Faktorisierung von $f(x)$:

$$f(x) = 8x^6 - 12x^5 + 6x^4 - x^3 = x^3(2x-1)^3 = 8x^3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$$

Somit gibt es nur die beiden Nullstellen $x=0$ und $x=\frac{1}{2}$. Dass die zugehörigen Linearfaktoren x und $(x-\frac{1}{2})$ je in der 3. Potenz auftreten, weist bereits darauf hin, dass sie auch in den Ableitungen wieder auftreten werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 48x^5 - 60x^4 + 24x^3 - 3x^2 = 3x^2(16x^3 - 20x^2 + 8x - 1) \\ &= 3x^2(2x-1)(8x^2-6x+1) = 3x^2(2x-1)^2(4x-1) = 48\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Damit lauten die Horizontalstellen: $x=0$, $x=\frac{1}{4}$ und $x=\frac{1}{2}$. Für die y-Koordinate des mittleren Horizontalpunktes ergibt sich:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{8}{4^6} - \frac{12}{4^5} + \frac{6}{4^4} - \frac{1}{4}^3 = \frac{1}{4^3}\left(\frac{2^3}{4^3} - \frac{12}{16} + \frac{6}{4} - 1\right) = \frac{1}{4^3}\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{4^3}\cdot\frac{1-6+12-8}{8} = -\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1}{8} = -\frac{1}{512} \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir für die 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 240x^4 - 240x^3 + 72x^2 - 6x = 6x(40x^3 - 40x^2 + 12x - 1) = 6x(2x-1)(20x^2-10x+1) \\ &= 240x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\right) = 240x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)\left(x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

Dabei resultiert der letzte Faktorisierungsschritt aus einer Anwendung der Mitternachtsformel.

Wir haben also vier Wendestellen: $x=0$, $x=\frac{1}{2}$ und $x=\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4\sqrt{5}}$.

Das Einsetzen der beiden mittleren Wendestellen in $f(x)$ soll gemäss Aufgabenstellung zwar übersprungen werden, würde sich aber als algebraisch interessant erweisen, denn es ergibt sich als Wert exakt $y=-\frac{1}{1000}$. Das zeige ich hier mit einer Stelle kurz vor. Am besten benutzt man die faktorisierte Form von $f(x)$ und wendet rigoros die 3. binomische Formel und Potenzgesetze an:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right) &= 8\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\right)^3 = 8\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^3\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^3 \\ &= 8\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)\right]^3 = 8\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4\sqrt{20}}\right)^2\right]^3 = 8\left[-\frac{1}{16}+\frac{1}{80}\right]^3 \\ &= 8\cdot\left[\frac{-5+1}{80}\right]^3 = 8\left[-\frac{4}{80}\right]^3 = 8\left[-\frac{1}{20}\right]^3 = -8\cdot\frac{1}{8000} = -\frac{1}{1000} \end{aligned}$$

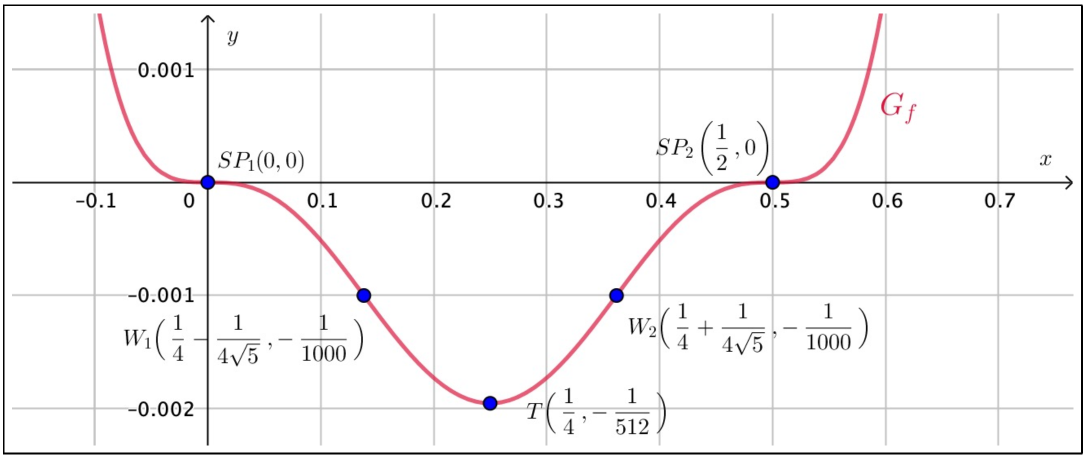
Somit haben wir die Information zu den Wendepunkten zusammen:

$$SP_1(0,0) \qquad W_1\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4\sqrt{5}}, -\frac{1}{1000}\right) \qquad W_2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{5}}, -\frac{1}{1000}\right) \qquad SP_2\left(\frac{1}{2},0\right)$$

Obwohl es eigentlich schon klar ist, wollen wir auch noch rechnerisch prüfen, dass der Horizontalpunkt $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{512})$ einem lokalen Minimum entspricht. Auch hier verwende ich für ein rasches Rechnen besser die faktorisierte Form von $f''(x)$:

$$
\begin{aligned}
f''\left(\frac{1}{4}\right) &= 240 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right) \\
&= 240 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right) = 240 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{80} = \frac{3}{16} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \text{ ist Minimalstelle}
\end{aligned}
$$

Mit $T(\frac{1}{4}, -\frac{1}{512})$ haben wir nun alles beisammen um den Graphen zu zeichnen. Dabei vergrössere ich die vertikale Achse gegenüber vorher um den Faktor 100. So wird der Verlauf des G_f gut sichtbar:



Natürlich kann ich dieses Aufzoomen in `GeoGebra` von Anfang an vornehmen, nämlich mit einem Rechtsklick auf einen freien Fleck in der Grafik, worauf dann im Dialog das Achsenverhältnis `xAchse : yAchse` auf `100 : 1` eingestellt werden kann.

3. In dieser Aufgabe wird die Differentialrechnung viel gezielter angewendet als in einer vollständigen Kurvendiskussion. Wir haben Wendetangenten zu bestimmen. Das bedeutet, wir wollen die Wendepunkte und die dort vorhandenen Steigungen bestimmen, um daraus die linearen Gleichungen für die Tangenten zu gewinnen. Am Ende muss noch der Schnittpunkt der beiden Wendetangenten ermittelt werden.

   i. Ermittlung der Wendestellen. Wir leiten zweimal ab:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{20}x^4 - \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{10}x + \frac{1}{5} \\
f'(x) &= \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{10}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{1}{10} \\
f''(x) &= \frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{6}{5} = \frac{3}{5}\left(x^2 - x - 2\right) = \frac{3}{5}(x+1)(x-2)
\end{aligned}
$$

   Damit sind $\underline{x = -1}$ und $\underline{x = 2}$ unsere Wendestellen.

   ii. Ermittlung der Wendepunkte. Wir setzen die Wendestellen in $f(x)$ ein:

$$
f(-1) = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} - \frac{3}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1+2-12+2+4}{20} = -\frac{3}{20} \quad \Rightarrow \quad \underline{W_1\left(-1, -\frac{3}{20}\right)}
$$

$$
f(2) = \frac{8}{10} - \frac{8}{10} - \frac{12}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = -\frac{12}{5} \quad \Rightarrow \quad \underline{W_2\left(2, -\frac{12}{5}\right)}
$$

   iii. Ermittlung der Tangentensteigungen. Einsetzen der Wendestellen in die 1. Ableitung $f'(x)$:

$$
\begin{aligned}
m_1 = f'(-1) &= -\frac{1}{5} - \frac{3}{10} + \frac{6}{5} - \frac{1}{10} = \frac{-2-3+12-1}{10} = \frac{6}{10} = \underline{\frac{3}{5}} \\
m_2 = f'(2) &= \frac{8}{5} - \frac{6}{5} - \frac{12}{5} - \frac{1}{10} = \frac{16-12-24-1}{10} = \underline{-\frac{21}{10}}
\end{aligned}
$$

iv. Tangentengleichungen ansetzen. Mit den Wendepunktkoordinaten und den Tangentensteigungen lassen sich die beiden linearen Tangentenfunktionen direkt ansetzen:

$$t_1(x) = m_1(x - x_1) + y_1 = \frac{3}{5}(x+1) - \frac{3}{20} = \underline{\frac{3}{5}x + \frac{9}{20}}$$
$$t_2(x) = m_2(x - x_2) + y_2 = -\frac{21}{10}(x-2) - \frac{12}{5} = \underline{-\frac{21}{10}x + \frac{9}{5}}$$

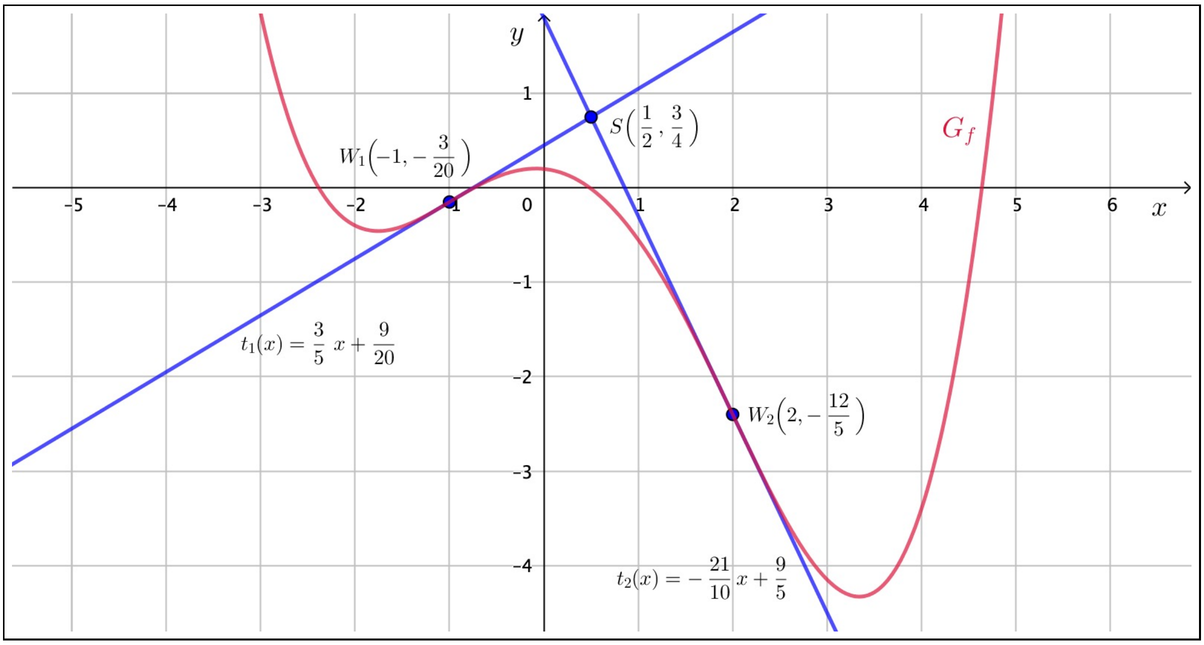
v. Schnittstelle bestimmen. Gleichsetzen der Tangentengleichungen liefert die Schnittstelle:

$$t_1(x) = t_2(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{5}x + \frac{9}{20} = -\frac{21}{10}x + \frac{9}{5} \quad\Leftrightarrow\quad 12x + 9 = -42x + 36$$
$$\Leftrightarrow\quad 54x = 27 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x = \frac{1}{2}}$$

vi. Schnittpunkt bestimmen. Die Schnittstelle in eine der beiden Tangentengleichungen einsetzen:

$$t_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{20} = \frac{3}{10} + \frac{9}{20} = \frac{6}{20} + \frac{9}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{S\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)}}$$

Der Vollständigkeit halber hier noch die `GeoGebra`-Grafik zur gesamten Situation:



4. **Zur Erinnerung:** Die Ableitung der Funktion $a(x) = \frac{1}{x}$ ermitteln wir durch Ausnutzung der Potenzschreibweise von Brüchen:

$$a(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad\Rightarrow\quad a'(x) = (-1)\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Natürlich darf/sollte man sich die Ableitung von $\frac{1}{x}$ für die Zukunft sowieso merken, sodass man nicht jedesmal diese Herleitung zu machen braucht. Für die zweite Ableitung folgt:

$$a'(x) = -\frac{1}{x}^2 = -x^{-2} \quad\Rightarrow\quad a''(x) = -(-2)\cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

Nun wenden wir uns der Kurvendiskussion von $f(x) = \frac{1}{x} + x$ zu.

- **Nullstellen?** Wir setzen $f(x) = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{x} + x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{es gibt keine NS, da } x^2 \geq 0 \text{ und somit } 1 + x^2 > 0$$

- **Horizontalstellen?** Gibt es Nullstellen der 1. Ableitung?

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HS:} \quad \underline{x = \pm 1}$$

- **y-Koordinaten der Horizontalpunkte?** Setze die HS in $f(x)$ ein:

$$f(-1) = \frac{1}{-1} + (-1) = -2 \qquad \text{und} \qquad f(1) = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

- **Wendestellen?** Weist die 2. Ableitung Nullstellen auf?

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine WS!}$$

- **Qualität der Extremalpunkte?** Wir setzen die HS in die 2. Ableitung ein:

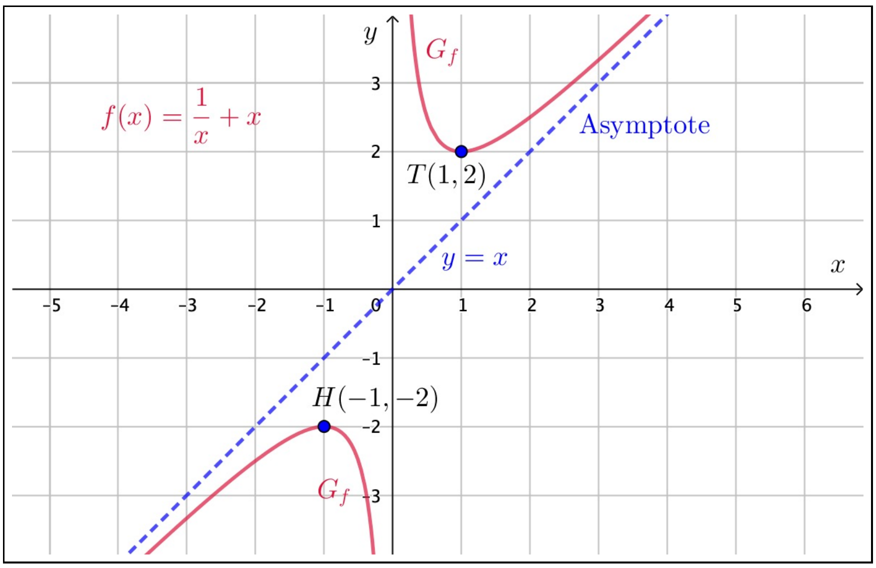
$$f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \quad \text{und} \quad f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{H(-1,-2)} \quad \text{und} \quad \underline{T(1,2)}$$

- **Skizzieren des Funktionsgraphen:** Wir haben nicht besonders viele Anhaltspunkte und müssen uns deshalb anderweitig versuchen noch ein bisschen weiter zu denken.
  - **Was passiert in den Aussenbereichen?** Für $x \to \pm\infty$ wird das Glied $\frac{1}{x}$ unendlich klein. Dann spielt nur noch x eine Rolle. D.h. im Aussenbereich schmiegt sich der Funktionsgraph immer mehr an die Gerade $y = x$ an (= Asymptote).
  - **Wie sieht es für $x \to 0$ aus?** An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion nicht definiert, denn durch 0 zu teilen ist bekanntlich nicht erlaubt. Klar ist, dass das Glied x für $x \to 0$ verschwindet. Dagegen "explodiert" das Glied $\frac{1}{x}$, denn es wir durch eine immer kleiner werdende Zahl x geteilt. Das Vorzeichen des Funktionswert bleibt dabei aber dasjenige von x. Es ist also:

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{x} + x \right) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \nearrow 0} \left(\frac{1}{x} + x \right) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

  Das bedeutet, der G_f schmiegt sich zweimal an die y-Achse an. Von links her kommend verschwindet er ins negativ-Unendliche, von rechts her kommend ins positiv-Unendliche.

Schauen wir uns nun diesen Funktionsgraphen an:



5. Wir gehen gleich vor wie bei Aufgabe 4:

- **Nullstellen?**

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{\sqrt{1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

  Allerdings: Wegen $\sqrt{x}$ darf x nicht negativ sein. Die Funktion ist wegen der Wurzel nur auf $\mathbb{R}^+$ definiert und dort gibt es **keine Nullstellen**!

- **Horizontalstellen?** Wir leiten ab:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HS: } \quad \underline{x = 1}$$

- **y-Koordinate des Horizontalpunktes?**

$$f(1) = \sqrt{1} + \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 + 1 = 2$$

- **Wendestellen?**

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\left(1 - \frac{3}{x}\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{3}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WS: } \quad \underline{x = 3}$$

- **y-Koordinate des Wendepunktes?**

$$f(3) = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3+1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2.31 \quad \Rightarrow \quad \underline{W\left(3, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)} \approx (3, 2.31)$$

- **Qualität des Extremalpunktes?**

$$f''(1) = -\frac{1}{4\sqrt{1}} + \frac{3}{4\sqrt{1}} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{T(1,2)}$$

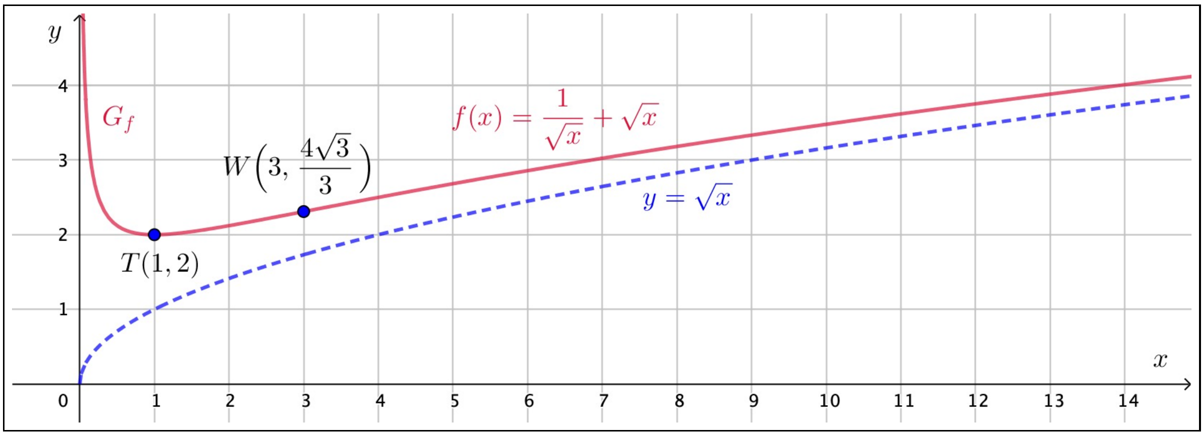
- **Verhalten im Aussenbereich $x \to +\infty$?**

  Für $x \to +\infty$ wird $\frac{1}{\sqrt{x}}$ unendlich klein. Somit schmiegt sich der G_f an die Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ an. D.h., der Funktionswert geht zwar auch gegen $+\infty$, aber eben nur recht langsam.

- **Verhalten für $x \to 0$?**

  Für $x \to 0$ verschwindet geht $\sqrt{x}$ gegen 0, währenddem $\frac{1}{\sqrt{x}}$ gegen $+\infty$ strebt, da durch immer kleinere Werte geteilt wird. Wieder ist die y-Achse eine vertikale Asymptote.

Auch hier wollen wir am Ende natürlich einen Blick auf den Funktionsgraphen werfen:



6. Die grafischen Ableitungen sehen folgendermassen aus: