Übungen zur Differentialrechnung – Lösungen Serie V

1. *Funktionsbestimmung Teil I*

   Bei den folgenden Lösungen verzichte ich auf die explizite Ausführung der Auflösung des sich ergebenden Gleichungssystems. Bei Bedarf darf gerne bei mir nachgefragt werden.

   (a) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f(-3) = 0$ und $f'(-3) = 6$
   $\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{2}{3}\,x^3 + 2x^2}}$

   (b) $f(1) = 4,\ f'(1) = 0,\ f(0) = 2$ und $f''(0) = 0 \Rightarrow$ 4 Bedingungen
   $\Rightarrow$ Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -x^3 + 3x + 2}}$

   (c) Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
   mit $f(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f(-1) = -2$ und $f'(-1) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 6x^4 + 8x^3}}$

   (d) $f(2) = 0,\ f''(2) = 0,\ f'(2) = -\frac{4}{3} \Rightarrow$ 3 Bedingungen für gerade Funktion
   $\Rightarrow$ Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}}}$

   (e) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f(2) = 1,\ f'(2) = 0,\ f''(2) = 0$ und $f(4) = 0$
   $\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{8}\,x^3 + \frac{3}{4}\,x^2 - \frac{3}{2}\,x + 2}}$

   (f) $f(-1) = 3,\ f(1) = 0,\ f(2) = 2$ und $f(3) = 1 \Rightarrow$ 4 Bedingungen
   $\Rightarrow$ Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{2}{3}\,x^3 + \frac{5}{2}\,x^2 - \frac{5}{6}\,x - 1}}$

   (g) $f(2) = -\frac{1}{2},\ f(\sqrt{3}) = 5,\ f''(\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$ 3 Bedingungen für gerade Funktion
   $\Rightarrow$ Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}\,x^4 - 9x^2 + \frac{55}{2}}}$

2. *Nicht-Existenz von Lösungen*

   (a) Zwar würden 3 Bedingungen zu einem Polynom 2. Grades (quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$) passen, aber diese Bedingungen sind hier **voneinander abhängig**. Klar: Bei einer Parabel liegt die Scheitelstelle (= Horizontalstelle) genau in der Mitte der beiden Nullstellen, was durch die gegebenen Bedingungen nicht erfüllt wird: $\frac{2+4}{2} = 3 \neq 0$.

   Interessante Ergänzung: Die Abhängigkeit zwischen Nullstellen und Scheitelstelle lässt sich ganz formal zeigen. Sind x_1 und x_2 die beiden Nullstellen, so lässt sich das Polynom 2. Grades faktorisieren, also in Nullstellenform bringen:

   $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)\,x + ax_1x_2$$

   Ich habe die Nullstellenform gleich wieder ausmultipliziert, damit wir $f(x)$ mit der Potenzregel ableiten können:

   $$f'(x) = 2ax - a(x_1 + x_2)$$

   Nun ist die Scheitelstelle x_S gegeben durch die Bedingung $f'(x) = 0$, woraus folgt:

   $$f'(x_S) = 2ax_s - a(x_1 + x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_S = x_1 + x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

   Damit ist die Abhängigkeit zwischen der Scheitelstelle und den beiden Nullstellen gezeigt.

   In der Aufgabenstellung müsste somit eine der drei Bedingungen weggelassen und dafür eine weitere hinzugegeben werden (denn nur die Angabe von speziellen Stellen auf der x-Achse verrät uns beispielsweise ja sicher noch nichts über den vertikalen Streckungsparameter a).

(b) Bei einer kubischen Funktion liegt die Wendestelle stets in der Mitte der beiden Horizontalstellen, falls diese existieren. Die gegebenen Werte passen also nicht zusammen: $\frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \neq 1$. D.h., diese drei Bedingungen sind wieder voneinander abhängig. Eine könnte weggelassen werden. Dann müsste allerdings eine neue Bedingung hinzugenommen werden, damit die Funktion eindeutig festgelegt ist.

Weitere Betrachtung: Auch hier wollen wir kurz allgemein zeigen, dass die Wendestelle genau in der Mitte der Horizontalstellen liegt, sofern diese existieren.
Es sei also $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ mit Ableitungen $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$ und $f''(x) = 6ax+2b$. Weiter seien x_1 und x_2 die beiden Horizontalstellen von $f(x)$. Es handelt sich dabei also um die beiden Lösungen der Gleichung:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0 \qquad \text{mit} \qquad x_{1/2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

Wir wollen ja zeigen, dass die Wendestelle genau zwischen diesen beiden Horizontalstellen liegt. Deshalb bilden wir das arithmetische Mittel der beiden Horizontalstellen:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2b}{3a} = \frac{-b}{3a}$$

Gleichzeitig wissen wir, dass die Wendestelle x_W die Bedingung $f''(x) = 0$ erfüllt, woraus folgt:

$$f''(x_W) = 6ax_W + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3ax_W = -b \quad \Leftrightarrow \quad x_W = \frac{-b}{3a} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad !$$

Die Wendestelle ist tatsächlich das arithmetische Mittel der Horizontalstellen.

3. *Funktionsbestimmung Teil II*

(a) $f(-2) = 0$, $f''(0) = 0$, $f(0) = 2$ und $f'(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow$ 4 Bedingungen
$\Rightarrow$ Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x + 2}}$

(b) $f(-2) = -4$, $f'(-2) = 0 \Rightarrow$ 2 Bedingungen für ungerade Funktion
$\Rightarrow$ Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x}}$

(c) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f(-1) = 8$ und $f'(-1) = 0$
$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 2x^3 - 6x + 4}}$

(d) **Hinweis:** Man könnte meinen, auch $f(0) = 0$ sei eine gültige Bedingung. Das ist aber falsch, denn sie wird bereits dadurch erfüllt, dass es sich um eine zum Ursprung $(0, 0)$ symmetrische Funktion handeln soll. Eine ungerade Polynomfunktion verläuft automatisch durch den Nullpunkt des Koordinatensystems!
$f'(0) = 7$, $f(1) = 0$ und $f''(1) = 0 \Rightarrow$ 3 Bedingungen für ungerade Funktion
$\Rightarrow$ Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 7x}}$

(e) Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
mit $f(3) = 0$, $f'(3) = 0$, $f(0) = 27$, $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = x^4 - 4x^3 + 27}}$

(f) Die zweite Ableitung soll mit $f''(x) = 6x$ eine lineare Funktion sein. Dann muss die originale Funktion kubisch sein $\Rightarrow$ Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
mit $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$ und $f''(x) = 6x \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = x^3 - 3x + 2}}$

(g) $f(2) = -11$, $f'(2) = -4$, $f''(2) = 0$ und $f'(-1) = 0 \Rightarrow$ 4 Bedingungen für gerade Funktion
$\Rightarrow$ Ansatz: $f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{11}{216}x^6 - \frac{79}{144}x^4 + \frac{17}{18}x^2 + \frac{20}{27}}}$

4. *Masteraufgaben ("Hors catégorie")*

   (a) Der Ansatz für die quadratische Funktion lautet: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wir setzen drei Punkte ein, haben also eine lineares 3x3-Gleichungssystem zu lösen:

$$\left| \begin{array}{l} f(x_P) = y_P \\ f(x_Q) = y_Q \\ f(x_R) = y_R \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} ax_P^2 + bx_P + c = y_P \\ ax_Q^2 + bx_Q + c = y_Q \\ ax_R^2 + bx_R + c = y_R \end{array} \right| \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

Zunächst eliminieren wir den konstanten Parameter c, indem wir je zwei Gleichungen voneinander subtrahieren:

$$\begin{array}{l} ② - ① : \\ ③ - ② : \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a\big(x_Q^2 - x_P^2\big) + b(x_Q - x_P) = y_Q - y_P \\ a\big(x_R^2 - x_Q^2\big) + b(x_R - x_Q) = y_R - y_Q \end{array} \right| \begin{array}{l} ④ \\ ⑤ \end{array}$$

Hierin tauchen mehrfach Differenzen zwischen Koordinaten auf, die auch in der weiteren Behandlung andauernd wieder vorkommen werden. Zugunsten der Übersicht lohnt es sich diese Differenzen abzukürzen. Hier die Definitionen, die ich anwenden werde:

$$\begin{array}{lll} \Delta x_1 := x_Q - x_P & \Delta x_2 := x_R - x_Q & \Delta x_3 := x_P - x_R \\ \Delta y_1 := y_Q - y_P & \Delta y_2 := y_R - y_Q & \Delta y_3 := y_P - y_R \end{array}$$

Mit $x_Q^2 - x_P^2 = (x_Q + x_P)(x_Q - x_P) = (x_P + x_Q)\Delta x_1$ und analog $x_R^2 - x_Q^2 = (x_Q + x_R)\Delta x_2$ lassen sich ④ und ⑤ schreiben als:

$$\left| \begin{array}{l} a(x_P + x_Q)\Delta x_1 + b\Delta x_1 = \Delta y_1 \\ a(x_Q + x_R)\Delta x_2 + b\Delta x_2 = \Delta y_2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} a(x_P + x_Q) + b = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} \\ a(x_Q + x_R) + b = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} \end{array} \right| \begin{array}{l} ⑥ \\ ⑦ \end{array}$$

Durch Subtraktion lässt sich der lineare Parameter b eliminieren:

$$⑦ - ⑥ : \quad a\big(x_Q + x_R - (x_P + x_Q)\big) = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} - \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} \quad \Leftrightarrow \quad a(x_R - x_P) = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} - \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad -a\Delta x_3 = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} - \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1 \Delta x_3} - \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2 \Delta x_3}$$

Dieses für `GeoGebra` bereits ganz taugliche Resultat – in `GeoGebra` empfiehlt es sich ganz besonders die obigen Delta-Definitionen zur Definition zusätzlicher Variablen zu verwenden – wollen wir algebraisch noch weiter bearbeiten:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1 \Delta x_3} - \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2 \Delta x_3} = \frac{\Delta y_1 \Delta x_2 - \Delta y_2 \Delta x_1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \\ &= \frac{(y_Q - y_P)(x_R - x_Q) - (y_R - y_Q)(x_Q - x_P)}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \\ &= \frac{y_Q x_R - y_Q x_Q - y_P x_R + y_P x_Q - y_R x_Q + y_R x_P + y_Q x_Q - y_Q x_P}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \\ &= \frac{y_Q x_R - y_P x_R + y_P x_Q - y_R x_Q + y_R x_P - y_Q x_P}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \\ &= \frac{y_P(-x_R + x_Q) + y_Q(x_R - x_P) + y_R(-x_Q + x_P)}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \\ &= \frac{-y_P \Delta x_2 - y_Q \Delta x_3 - y_R \Delta x_1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} = -\frac{y_P \Delta x_2 + y_Q \Delta x_3 + y_R \Delta x_1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \end{aligned}$$

Dieses formale Resultat für den Parameter a ist sehr überzeugend, denn es ist "symmetrisch" in den Punkten P, Q und R. Will sagen, wir könnten P, Q und R miteinander vertauschen und der Ausdruck würde gleich aussehen. Man sagt: Die Gleichung für den Parameter a ist in P, Q und R **zyklisch vertauschbar**. Da in der Aufgabenstellung keiner der drei Punkte eine Sonderstellung einnimmt, war genau dies zu erwarten.

Wir setzen nun dieses Resultat für a zurück ein, z.B. in Gleichung ⑥:

$$a(x_P + x_Q) + b = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} - a(x_P + x_Q)$$

Für die `GeoGebra`-Bearbeitung ist dieser Ausdruck bereits perfekt. Wir möchten uns hier aber auch noch algebraisch davon überzeugen, dass der Ausdruck für den Parameter b in P, Q und R zyklisch vertauschbar ist. Das gibt allerdings ein bisschen was zu tun:

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} - a(x_P + x_Q) = \frac{(y_Q - y_P)}{\Delta x_1} + \frac{y_P\Delta x_2 + y_Q\Delta x_3 + y_R\Delta x_1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} \cdot (x_P + x_Q) \\
&= \frac{(y_Q - y_P)\Delta x_2\Delta x_3}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{y_P x_P\Delta x_2 + y_Q x_P\Delta x_3 + y_R x_P\Delta x_1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} + \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots + \frac{y_P x_Q\Delta x_2 + y_Q x_Q\Delta x_3 + y_R x_Q\Delta x_1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} \\
&= \frac{(y_Q - y_P)(x_R - x_Q)(x_P - x_R)}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{y_P x_P(x_R - x_Q) + y_Q x_P(x_P - x_R) + y_R x_P(x_Q - x_P)}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} + \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots + \frac{y_P x_Q(x_R - x_Q) + y_Q x_Q(x_P - x_R) + y_R x_Q(x_Q - x_P)}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} \\
&= \frac{y_Q x_P x_R - y_Q x_R^2 - y_Q x_P x_Q + y_Q x_Q x_R - y_P x_P x_R + y_P x_R^2 + y_P x_P x_Q - y_P x_Q x_R}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{y_P x_P x_R - y_P x_P x_Q + y_Q x_P^2 - y_Q x_P x_R + y_R x_P x_Q - y_R x_P^2}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} + \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots + \frac{y_P x_Q x_R - y_P x_Q^2 + y_Q x_P x_Q - y_Q x_Q x_R + y_R x_Q^2 - y_R x_Q x_P}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} \\
&= \frac{y_P(-x_P x_R + x_R^2 + x_P x_Q - x_Q x_R + x_P x_R - x_P x_Q + x_Q x_R - x_Q^2)}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{y_Q(x_P x_R - x_R^2 - x_P x_Q + x_Q x_R + x_P^2 - x_P x_R + x_P x_Q - x_Q x_R)}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} + \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots + \frac{y_R(x_P x_Q - x_P^2 + x_Q^2 - x_P x_Q)}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} \\
&= \frac{y_P(x_R^2 - x_Q^2) + y_Q(x_P^2 - x_R^2) + y_R(x_Q^2 - x_P^2)}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}
\end{aligned}$$

Auch im Ausdruck für den Parameter b sind somit – den Erwartungen entsprechend – die Punkte P, Q und R zyklisch vertauschbar. Es ist interessant, wie sich die Rechnung zwischenzeitlich aufbläht, nur damit sich anschliessend viele Terme wieder wegstreichen und ein neuer, einigermassen übersichtlicher Ausdruck entsteht! Seine Verwandtschaft mit demjenigen für a ist nicht von der Hand zu weisen.

Schliesslich gilt es auch noch den Parameter c zu bestimmen. Diesen findet man z.B. unter Ausnutzung von Gleichung ①:

$$ax_P^2 + bx_P + c = y_P \qquad \Rightarrow \qquad c = y_P - ax_P^2 - bx_P$$

Wiederum genügt dieser Ausdruck für die Behandlung in `GeoGebra`. Wir möchten aber eigentlich auch für c eine Gleichung finden, in der nur noch die Punktkoordinaten enthalten sind. Dabei wird die Rechnung nochmals so gross wie bei der Berechnung von b.

Ich verzichte an dieser Stelle auf die explizite Durchführung und präsentiere nur das Resultat:

$$c = -\frac{y_P x_Q x_R \Delta x_2 + y_Q x_P x_R \Delta x_3 + y_R x_P x_Q \Delta x_1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}$$

Erneut entdecken wir eine ähnlich Struktur und die zyklische Vertauschbarkeit ist gegeben. Damit kann ich nun die Lösung der Aufgabe nochmals übersichtlich zusammenstellen, wobei ich die Delta-Ausdrücke wieder durch die Punktkoordinaten ersetze.

Lösung: Sind drei Punkte durch ihre Koordinaten $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$ und $R(x_R, y_R)$ gegeben, so lautet die quadratische Funktion, deren zugehörige Parabel durch durch die Punkte P, Q und R verläuft, wie folgt:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

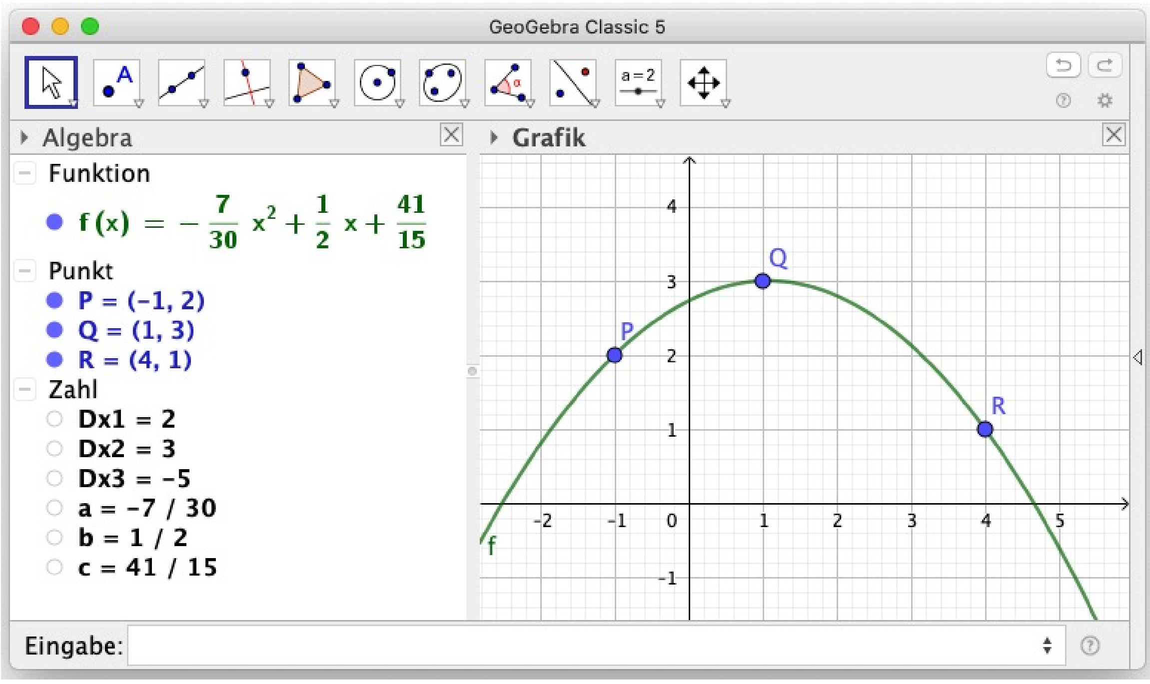
$$\text{mit} \quad a = -\frac{y_P(x_R - x_Q) + y_Q(x_P - x_R) + y_R(x_Q - x_P)}{(x_Q - x_P)(x_R - x_Q)(x_P - x_R)}$$

$$b = \frac{y_P(x_R^2 - x_Q^2) + y_Q(x_P^2 - x_R^2) + y_R(x_Q^2 - x_P^2)}{(x_Q - x_P)(x_R - x_Q)(x_P - x_R)}$$

$$c = -\frac{y_P x_Q x_R(x_R - x_Q) + y_Q x_P x_R(x_P - x_R) + y_R x_P x_Q(x_Q - x_P)}{(x_Q - x_P)(x_R - x_Q)(x_P - x_R)}$$

Zum Schluss noch dies: Dass die drei Differenzen $x_Q - x_P$, $x_R - x_Q$ und $x_P - x_R$ jeweils im Nenner auftreten, ist nicht weiter überraschend. Es bedeutet einfach, dass sich ein Problem ergibt, wenn zwei Punkte genau übereinander liegen. Dann nämlich wäre $f(x)$ nicht mehr eindeutig und somit darf es dann auch gar keine Lösung geben. Übereinander liegende Punkte haben aber eben dieselbe x-Koordinate, sodass die Differenz zu Null wird. Aber durch Null darf nicht geteilt werden!

Hier das Bild einer Parabel, der unter Eingabe der drei Ausdrücke für a, b und c oben erzeugt wurde. Dabei war die vorgängige Definition der Delta-Ausdrücke sehr nützlich zur Einsparung von Schreibarbeit und zugunsten der Übersichtlichkeit während der Eingabe.



Die Punkte P, Q und R sind nun frei bewegbar. Die Parabel passt sich jeweils so an, dass sie immer durch sie hindurch geht.

(b) Der Ansatz für die kubische Funktion lautet: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ mit $f'(x) = 3ax^2+2b+c$. Jeder Horizontalpunkt liefert zwei Gleichungen, eine für $f(x)$ und eine für $f'(x)$. So erhalten wir vier Gleichungen, aus denen sich die Parameter a, b, c und d bestimmen lassen sollten.

Es seien $P(x_P, y_P)$ und $Q(x_Q, y_Q)$. Dann folgt für die vier Gleichungen:

$$\left|\begin{array}{c} f(x_P) = y_P \\ f(x_Q) = y_Q \\ f'(x_P) = 0 \\ f'(x_Q) = 0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{c} ax_P^3 + bx_P^2 + cx_P + d = y_P \\ ax_Q^3 + bx_Q^2 + cx_Q + d = y_Q \\ 3ax_P^2 + 2bx_P + c = 0 \\ 3ax_Q^2 + 2bx_Q + c = 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

Zuerst eliminieren wir den Parameter d, indem wir Gleichung ① von Gleichung ② subtrahieren. Anschliessend teile ich diese neue Gleichung durch $(x_Q - x_P)$:

$$② - ① : \quad a\big(x_Q^3 - x_P^3\big) + b\big(x_Q^2 - x_P^2\big) + c(x_Q - x_P) = y_Q - y_P$$

$$\Rightarrow \quad a\big(x_Q^2 + x_Px_Q + x_P^2\big) + b\big(x_Q + x_P\big) + c = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad ⑤$$

Dabei habe ich verwendet, dass $x_Q^3 - x_P^3 = (x_Q - x_P)(x_Q^2 + x_Qx_P + x_P^2)$ (Kubenformel) und dass $x_Q^2 - x_P^2 = (x_Q + x_P)(x_Q - x_P)$ (3. binomische Formel).

$\Delta x := x_Q - x_P$ und $\Delta y := y_Q - y_P$ sind nützliche Zusatzdefinitionen, denn diese beiden Differenzen kommen in der Rechnung immer wieder vor.

Im nächsten Schritt eliminieren wir den Parameter c:

$$\begin{array}{r} ④ - ⑤ : \\ ④ - ③ : \end{array} \left|\begin{array}{c} 3ax_Q^2 + 2bx_Q + c - \Big(a\big(x_Q^2 + x_Px_Q + x_P^2\big) + b\big(x_Q + x_P\big) + c\Big) = -\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ 3a(x_Q^2 - x_P^2) + 2b(x_Q - x_P) = 0 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} 3ax_Q^2 + 2bx_Q + c - ax_Q^2 - ax_Px_Q - ax_P^2 - bx_Q - bx_P - c = -\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ 3a(x_Q + x_P)(x_Q - x_P) + 2b(x_Q - x_P) = 0 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{c} 2ax_Q^2 - ax_Px_Q - ax_P^2 + bx_Q - bx_P = -\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ 3a(x_P + x_Q) + 2b = 0 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a\big(2x_Q^2 - x_Px_Q - x_P^2\big) + b(x_Q - x_P) = -\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ 2b = -3a(x_P + x_Q) \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a(2x_Q + x_P)(x_Q - x_P) + b(x_Q - x_P) = -\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ 2b = -3ax_P - 3ax_Q \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{c} 2ax_Q + ax_P + b = -\frac{\Delta y}{(\Delta x)^2} \\ 2b = -3ax_P - 3ax_Q \end{array}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{c} 4ax_Q + 2ax_P + 2b = -\frac{2\Delta y}{(\Delta x)^2} \\ 2b = -3ax_P - 3ax_Q \end{array}\right| \begin{array}{c} ⑥ \\ ⑦ \end{array}$$

Setzen wir ⑦ in ⑥ ein, so folgt für a:

$$⑦ \text{ in } ⑥ : \quad 4ax_Q + 2ax_P - 3ax_P - 3ax_Q = -\frac{2\Delta y}{(\Delta x)^2} \quad \Leftrightarrow \quad ax_Q - ax_P = -\frac{2\Delta y}{(\Delta x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a(x_Q - x_P) = -\frac{2\Delta y}{(\Delta x)^2} \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{2\Delta y}{(\Delta x)^3}$$

Dies ist ein wunderbar einfaches Resultat nach einer derart langen Umformung. Erneut ist es so, wie schon in Aufgabe (a), dass die Punkte P und Q gleichwertig sind. D.h., auch dieses Resultat muss gleich herauskommen, wenn P und Q miteinander vertauscht werden. Das ist der Fall, denn wenn wir die Punkte vertauschen, wechselt sowohl Δy, als auch Δx das Vorzeichen, somit auch der Zähler und der Nenner im Ausdruck für a, der somit insgesamt gleich bleibt.

Mit dem Resultat für a beginnen wir das Zurückeinsetzen, zunächst in ⑦:

$$2b = -3ax_P - 3ax_Q = -3a(x_P + x_Q) = \frac{6\Delta y(x_P + x_Q)}{(\Delta x)^3} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{3\Delta y(x_P + x_Q)}{(\Delta x)^3}$$

Das ging überraschend schnell. Machen wir gleich weiter mit der Bestimmung des Parameters c unter Verwendung von Gleichung ③:

$$3ax_P^2 + 2bx_P + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -3ax_P^2 - 2bx_P = \frac{6\Delta y x_P^2}{(\Delta x)^3} - \frac{6\Delta y(x_P + x_Q)x_P}{(\Delta x)^3}$$
$$= \frac{6\Delta y(x_P^2 - x_P^2 - x_P x_Q)}{(\Delta x)^3} = -\frac{6\Delta y\, x_P x_Q}{(\Delta x)^3}$$

Es fehlt nur noch der Parameter d. Wir lösen Gleichung ① nach d auf und setzen die Ausdrücke für a, b und c ein:

$$d = y_P - ax_P^3 - bx_P^2 - cx_P = y_P + \frac{2\Delta y x_P^3}{(\Delta x)^3} - \frac{3\Delta y(x_P + x_Q)x_P^2}{(\Delta x)^3} + \frac{6\Delta y\, x_P\, x_Q\, x_P}{(\Delta x)^3}$$
$$= \frac{y_P(x_Q - x_P)^3 + 2(y_Q - y_P)x_P^3 - 3(y_Q - y_P)(x_P + x_Q)x_P^2 + 6(y_Q - y_P)x_P^2 x_Q}{(\Delta x)^3}$$
$$= \frac{y_P(x_Q^3 - 3x_p x_Q^2 + 3x_P^2 x_Q - x_P^3) + 2y_Q x_P^3 - 2y_P x_P^3}{(\Delta x)^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{-3y_Q x_P^3 - 3y_Q x_P^2 x_Q + 3y_P x_P^3 + 3y_P x_P^2 x_Q + 6y_Q x_P^2 x_Q - 6y_P x_P^2 x_Q}{(\Delta x)^3}$$
$$= \frac{y_P\big(x_Q^3 - 3x_p x_Q^2 + 3x_P^2 x_Q - x_P^3 - 2x_P^3 + 3x_P^3 + 3x_P^2 x_Q - 6x_P^2 x_Q\big)}{(\Delta x)^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{y_Q\big(2x_P^3 - 3x_P^3 - 3x_P^2 x_Q + 6x_P^2 x_Q\big)}{(\Delta x)^3}$$
$$= \frac{y_P\big(x_Q^3 - 3x_P x_Q^2\big) + y_Q\big(-x_P^3 + 3x_P^2 x_Q\big)}{(\Delta x)^3} = \frac{y_P x_Q^2(x_Q - 3x_P) - y_Q x_P^2(x_P - 3x_Q)}{(\Delta x)^3}$$

Damit ist die Funktion $f(x)$ komplett. Sie lautet:

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{2\Delta y}{(\Delta x)^3}x^3 + \frac{3\Delta y(x_P + x_Q)}{(\Delta x)^3}x^2 - \frac{6\Delta y\, x_P x_Q}{(\Delta x)^3}x + \frac{y_P x_Q^2(x_Q - 3x_P) - y_Q x_P^2(x_P - 3x_Q)}{(\Delta x)^3}}}$$

Hier das Beispiel eines Graphen mit vorgegebenem Hoch- und Tiefpunkt: