

## SERIE V: Funktionsbestimmung mit Polynomen

Klasse 155c / AGe

### 1. Funktionsbestimmung Teil I

- (a) Bestimme das Polynom 3. Grades, dessen Graph die  $x$ -Achse im Ursprung berührt und dessen Tangente in  $P(-3, 0)$  parallel zur Geraden  $y = 6x$  ist.
- (b) Gib die einfachst mögliche Polynomfunktion an, deren Graph in  $P(1, 4)$  einen Extrempunkt und in  $Q(0, 2)$  einen Wendepunkt hat.
- (c) Bestimme das Polynom 4. Grades, dessen Graph den Wendepunkt  $O(0, 0)$  mit der  $x$ -Achse als Wendetangente und den Tiefpunkt  $A(-1, -2)$  hat.
- (d) Bestimme die einfachst mögliche Polynomfunktion, deren Graph symmetrisch zur  $y$ -Achse ist und in  $P(2, 0)$  eine Wendetangente mit der Steigung  $-\frac{4}{3}$  hat.
- (e) Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat im Punkt  $P(2, 1)$  einen Terrassenpunkt und schneidet die  $x$ -Achse bei  $x = 4$ . Wie lautet die Funktionsgleichung?
- (f) Bestimme das Polynom kleinsten Grades mit Graph durch  $A(-1, 3)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(2, 2)$  und  $D(3, 1)$ .
- (g) Der Graph eines Polynoms ist zur  $y$ -Achse symmetrisch, geht durch den Punkt  $P(2, -0.5)$  und hat den Wendepunkt  $W(\sqrt{3}, 5)$ . Bestimme die einfachste Funktionsgleichung.

### 2. Nicht-Existenz von Lösungen

Erkläre, weshalb es für die folgenden Bedingungskombinationen keine Lösung gibt:

- (a) Polynom 2. Grades mit Nullstellen bei  $x = 2$  und  $x = 4$  und einem Maximum bei  $x = 0$ .
- (b) Polynom vom Grad 3 mit Extremalstellen  $x = 0$  und  $x = 3$  sowie Wendestelle  $x = 1$ .

### 3. Funktionsbestimmung Teil II

- (a) Ein Graph hat bei  $x = -2$  eine Nullstelle und bei  $x = 0$  eine Wendestelle. Die Wendetangente hat die Gleichung  $x - 3y + 6 = 0$ . Wie lautet das einfachste Polynom, das diese Bedingungen erfüllt?
- (b) Bestimme ein möglichst einfaches Polynom, dessen Graph symmetrisch zum Nullpunkt ist und im Punkt  $P(-2, -4)$  ein Minimum hat?
- (c) Der Graph eines Polynoms 3. Grades berührt bei  $x = 1$  die  $x$ -Achse und hat bei  $P(-1, 8)$  ein lokales Maximum. Wie lautet seine Funktionsgleichung?
- (d) Ein zu  $(0, 0)$  punktsymmetrischer Graph eines Polynoms hat in  $(0, 0)$  die Tangente  $y = 7x$  und in  $P(1, 0)$  einen Wendepunkt. Bestimme die einfachst mögliche Funktionsgleichung.
- (e) Wie lautet die Gleichung des Polynoms 4. Grades, dessen Graph die  $x$ -Achse in  $B(3, 0)$  berührt und in  $A(0, 27)$  einen Sattelpunkt aufweist?
- (f) Der Graph eines Polynoms  $f(x)$  berührt die  $x$ -Achse an der Stelle  $x = 1$  und es ist  $f''(x) = 6x$ . Bestimme die Funktionsgleichung von  $f(x)$ !
- (g) Wie lautet die Gleichung des einfachst möglichen Polynoms mit  $y$ -Achsensymmetrie, Wendetangente  $g(x) = -4x + 7$  über  $x = 2$  und Extremum über  $x = -1$ ? (Achtung: "hässliche Zahlen"!)

### 4. Algebraische Masteraufgaben ("Hors catégorie")

- (a) Gegeben seien 3 Punkte  $P(x_P, y_P)$ ,  $Q(x_Q, y_Q)$  und  $R(x_R, y_R)$ . Die zur quadratischen Funktion  $f(x) = ax^2 + bx + c$  gehörende Parabel verlaufe durch  $P$ ,  $Q$  und  $R$ .  
Wie berechnen sich allgemein die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  aus den Koordinaten der drei Punkte?
- (b) Der Graph einer kubischen Funktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  habe in  $P(x_P, y_P)$  einen Hoch- und in  $Q(x_Q, y_Q)$  einen Tiefpunkt.  
Drücke die Koeffizienten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  durch die Koordinaten von  $P$  und  $Q$  aus.