

Übungen zur Differentialrechnung

SERIE V: Funktionsbestimmung mit Polynomen

Klasse 155c / AGe

1. Funktionsbestimmung Teil I

- Bestimme das Polynom 3. Grades, dessen Graph die x -Achse im Ursprung berührt und dessen Tangente in $P(-3, 0)$ parallel zur Geraden $y = 6x$ ist.
- Gib die einfachst mögliche Polynomfunktion an, deren Graph in $P(1, 4)$ einen Extrempunkt und in $Q(0, 2)$ einen Wendepunkt hat.
- Bestimme das Polynom 4. Grades, dessen Graph den Wendepunkt $O(0, 0)$ mit der x -Achse als Wendetangente und den Tiefpunkt $A(-1, -2)$ hat.
- Bestimme die einfachst mögliche Polynomfunktion, deren Graph symmetrisch zur y -Achse ist und in $P(2, 0)$ eine Wendetangente mit der Steigung $-\frac{4}{3}$ hat.
- Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat im Punkt $P(2, 1)$ einen Terrassenpunkt und schneidet die x -Achse bei $x = 4$. Wie lautet die Funktionsgleichung?
- Bestimme das Polynom kleinsten Grades mit Graph durch $A(-1, 3)$, $B(1, 0)$, $C(2, 2)$ und $D(3, 1)$.
- Der Graph eines Polynoms ist zur y -Achse symmetrisch, geht durch den Punkt $P(2, -0.5)$ und hat den Wendepunkt $W(\sqrt{3}, 5)$. Bestimme die einfachste Funktionsgleichung.

2. Nicht-Existenz von Lösungen

Erkläre, weshalb es für die folgenden Bedingungskombinationen keine Lösung gibt:

- Polynom 2. Grades mit Nullstellen bei $x = 2$ und $x = 4$ und einem Maximum bei $x = 0$.
- Polynom vom Grad 3 mit Extremalstellen $x = 0$ und $x = 3$ sowie Wendestelle $x = 1$.

3. Funktionsbestimmung Teil II

- Ein Graph hat bei $x = -2$ eine Nullstelle und bei $x = 0$ eine Wendestelle. Die Wendetangente hat die Gleichung $x - 3y + 6 = 0$. Wie lautet das einfachste Polynom, das diese Bedingungen erfüllt?
- Bestimme ein möglichst einfaches Polynom, dessen Graph symmetrisch zum Nullpunkt ist und im Punkt $P(-2, -4)$ ein Minimum hat?
- Der Graph eines Polynoms 3. Grades berührt bei $x = 1$ die x -Achse und hat bei $P(-1, 8)$ ein lokales Maximum. Wie lautet seine Funktionsgleichung?
- Ein zu $(0, 0)$ punktsymmetrischer Graph eines Polynoms hat in $(0, 0)$ die Tangente $y = 7x$ und in $P(1, 0)$ einen Wendepunkt. Bestimme die einfachst mögliche Funktionsgleichung.
- Wie lautet die Gleichung des Polynoms 4. Grades, dessen Graph die x -Achse in $B(3, 0)$ berührt und in $A(0, 27)$ einen Sattelpunkt aufweist?
- Der Graph eines Polynoms $f(x)$ berührt die x -Achse an der Stelle $x = 1$ und es ist $f''(x) = 6x$. Bestimme die Funktionsgleichung von $f(x)$!
- Wie lautet die Gleichung des einfachst möglichen Polynoms mit y -Achsensymmetrie, Wendetangente $g(x) = -4x + 7$ über $x = 2$ und Extremum über $x = -1$? (Achtung: "hässliche Zahlen"!)

4. Algebraische Masteraufgaben ("Hors catégorie")

- Gegeben seien 3 Punkte $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$ und $R(x_R, y_R)$. Die zur quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ gehörende Parabel verlaufe durch P , Q und R . Wie berechnen sich allgemein die Koeffizienten a , b und c aus den Koordinaten der drei Punkte?
- Der Graph einer kubischen Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ habe in $P(x_P, y_P)$ einen Hoch- und in $Q(x_Q, y_Q)$ einen Tiefpunkt. Drücke die Koeffizienten a , b , c und d durch die Koordinaten von P und Q aus.