Übungen zur Differentialrechnung – Lösungen Serie VI

Hinweis: In der Regel lassen sich alle Lösungen sehr rasch und anschaulich mittels `GeoGebra` kontrollieren – was für das Verständnis des Gemachten sicher nicht schädlich ist!

1. *Einsteiger*

$$f(x)=\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \stackrel{!}{=} 2 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x}=\frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{16}$$

$$f\left(\frac{1}{16}\right)=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad t(x)=2\left(x-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}=\underline{\underline{2x+\frac{1}{8}}}$$

2. *Tangenten an trigonometrische Funktionen*

(a) $f(x)=\sin x$ mit $f'(x)=\cos x \quad\Rightarrow\quad f(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $f'(\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Tangente: $\quad t(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\,x+\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}}}$

(b) $f(x)=\cos x$ mit $f'(x)=-\sin x \quad\Rightarrow\quad f(\frac{3\pi}{4})=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $f'(\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ Tangente: $\quad t(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{3\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2}\,x+\frac{3\pi\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{8}}}$

(c) $f(x)=\cos x$ mit $f'(x)=-\sin x$ und $f''(x)=-\cos x$

$\Rightarrow$ erste positive Wendestelle von $\cos x$ ist auch erste positive Nullstelle: $\cos x=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad f(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}=0$ und $f'(\frac{\pi}{2})=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

$\Rightarrow \quad$ Wendetangente: $\quad t(x)=-1(x-\frac{\pi}{2})+0=\underline{\underline{-x+\frac{\pi}{2}}}$

(d) $f(x)=\sin x$ und $g(x)=\cos x$ mit $f(x)'=\cos x$ und $g'(x)=-\sin x$

$f'(x)=g'(x) \quad\Rightarrow\quad \cos x=-\sin x \quad\Rightarrow\quad -1=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{x=-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi \,|\, k\in\mathbb{Z}\}}}$

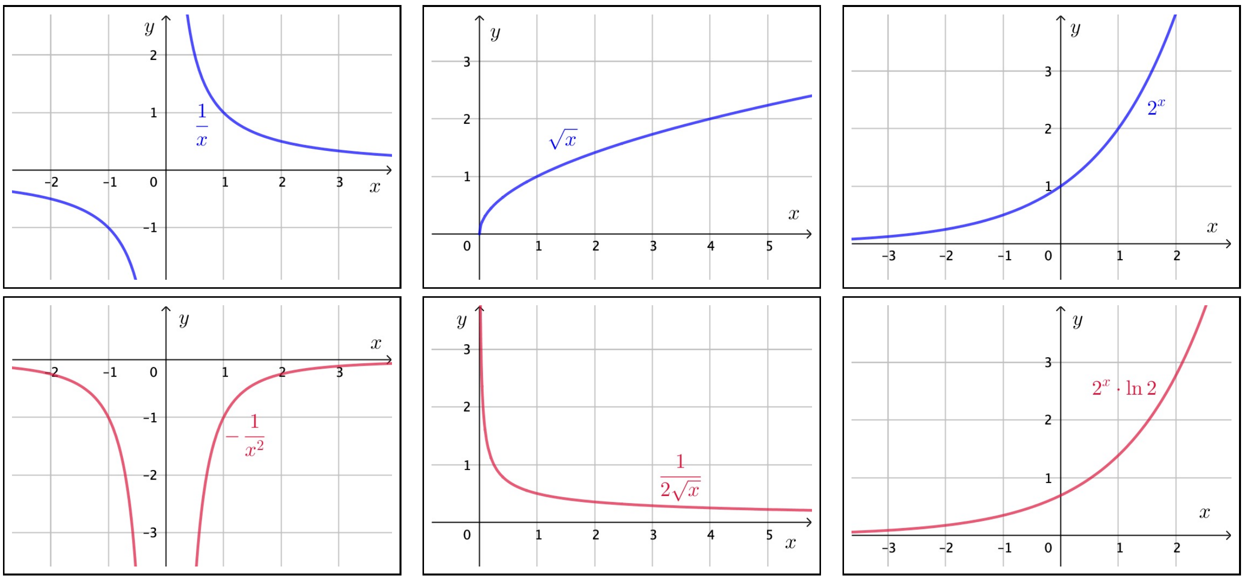
(e) $f(x)=\tan x$ mit $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\stackrel{!}{=}\frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad \cos x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

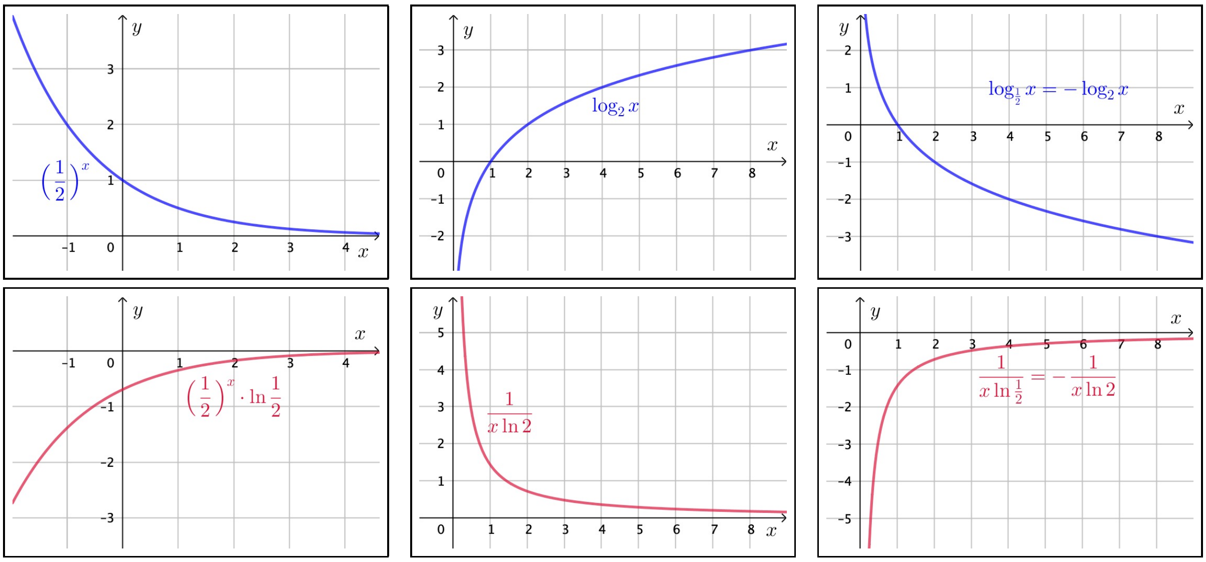
$\Rightarrow \quad$ nur $x=\pm\frac{\pi}{6}$, da $x\in\,]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ liegen soll

$\Rightarrow \quad f(\frac{\pi}{6})=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad$ und $\quad f(-\frac{\pi}{6})=\tan(-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \quad t_1(x)=\frac{4}{3}(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\sqrt{3}}{3}=\underline{\underline{\frac{4}{3}\,x+\frac{3\sqrt{3}-2\pi}{9}}} \quad$ und $\quad t_2(x)=\frac{4}{3}(x+\frac{\pi}{6})-\frac{\sqrt{3}}{3}=\underline{\underline{\frac{4}{3}\,x+\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{9}}}$

3. *Repetition zu den elementaren Funktionsgraphen*





4. *Eine Funktionsdifferenz*

   (a) $f(x)=e^x-\frac{x}{e} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=e^x-\frac{1}{e}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad e^x=\frac{1}{e} \quad\Rightarrow\quad \underline{x=-1}$
   $\Rightarrow\quad f(-1)=e^{-1}-\frac{-1}{e}=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{2}{e} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{T(-1,\frac{2}{e})}}$

   (b) $f(x)=e^x-\frac{x}{e^a} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=e^x-\frac{1}{e^a}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad e^x=\frac{1}{e^a} \quad\Rightarrow\quad x=-a$
   $\Rightarrow\quad f(-a)=e^{-a}-\frac{-a}{e^a}=\frac{1}{e^a}+\frac{a}{e} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{T(-a,\frac{1}{e^a}+\frac{a}{e})}}$

5. *Vermischtes*

   (a) $f(x)=x^2+4\cos x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=2x-4\sin x \quad\Rightarrow\quad f''(x)=2-4\cos x\overset{!}{=}0$
   $\Rightarrow\quad \cos x=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{3}\in[0;\frac{\pi}{2}] \quad\Rightarrow\quad f'(\frac{\pi}{3})=2\cdot\frac{\pi}{3}-4\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\underline{\frac{2\pi-6\sqrt{3}}{3}}}$

   (b) $f(x)=\frac{1}{x}+\log_2 x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\cdot\ln 2} \quad\Rightarrow\quad f''(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2\cdot\ln 2}$

   Für die Minimalstelle ist $f'(x)=0$ zu setzen, für die Wendestelle $f''(x)=0$:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\cdot\ln 2}\overset{!}{=}0 \quad\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}\quad -1+\frac{x}{\ln 2}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{\ln 2}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=\ln 2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2\cdot\ln 2}\overset{!}{=}0 \quad\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}\quad 2-\frac{x}{\ln 2}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{\ln 2}=2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=2\ln 2}$$

   Für die y-Koordinaten dieser speziellen Punkte erhalten wir:

$$f(\ln 2)=\frac{1}{\ln 2}+\log_2(\ln 2) \qquad \text{und} \qquad f(2\ln 2)=\frac{1}{2\ln 2}+\log_2(2\ln 2)$$

   Damit haben wir für die Funktion $f(x)$ also gefunden:

$$\underline{\underline{T\left(\ln 2,\frac{1}{\ln 2}+\log_2(\ln 2)\right)}}\approx(0.69,0.91) \quad \text{und} \quad \underline{\underline{W\left(2\ln 2,\frac{1}{2\ln 2}+\log_2(2\ln 2)\right)}}\approx(1.39,1.19)$$

   Ganz analog gehen wir bei $g(x)$ vor:

$$g(x)=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}-2 \quad\Rightarrow\quad g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}} \quad\Rightarrow\quad g''(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\overset{!}{=}0 \quad\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}\quad -1+x\sqrt{x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=1}$$

$$g''(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\overset{!}{=}0 \quad\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}\quad 4-x\sqrt{x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3=16 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=2\sqrt[3]{2}}$$

$$\Rightarrow\quad \ldots \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{T(1,1)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{W\left(2\sqrt[3]{2},\frac{9\sqrt[3]{4}-8}{4}\right)}}\approx(2.52,1.57)$$

6. **Zusatzaufgabe:** *Wunderbares aus der Welt der höheren Mathematik – Potenzreihen*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

(a) Die Sinusfunktion ist *periodisch* mit *Periode* 2π. In jeder Periode gibt es zwei Nullstellen. Somit hat die Funktion insgesamt unendlich viele *Nullstellen*. Würde sich die Sinusfunktion als Polynom vom Grad n schreiben lassen, so liesse sie sich in maximal n *Linearfaktoren* zerlegen und könnte daher maximal n Nullstellen aufweisen. Daraus folgern wir, dass der Grad eben unendlich (∞) sein muss, wenn sich die Sinusfunktion als Polynom schreiben lassen soll. Wir landen von der Idee her automatisch bei der *Potenzreihe*!

(b) Ich beginne damit die ersten paar Glieder in der Potenzreihenschreibweise der beiden Funktion abzuleiten. Dadurch sehen wir bereits, dass die Sache funktioniert:

$$\begin{aligned}[\sin x]' &= \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right]' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \ldots \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos x \\ [\cos x]' &= \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots\right]' = 0 - \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \frac{8x^7}{8!} - \ldots \\ &= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \ldots = -\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = -\sin x\end{aligned}$$

Dabei habe ich verwendet, dass

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)! \qquad \text{z.B.:} \quad 7! = 7 \cdot 6! \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{7!} = \frac{1}{6!}$$

Allgemein ist also $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$, so jetzt dann z.B. auch $\frac{2k+1}{(2k+1)!} = \frac{1}{(2k)!}$.

Obige Resultate können wir auch allgemein in der Schreibweise mit dem Summenzeichen erzeugen. Betrachten wir zuerst die Sinusfunktion:

$$\begin{aligned}[\sin x]' &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]' = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]' \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k+1) \cdot x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos x\end{aligned}$$

Wichtig ist hier, dass die Ableitung hinter das Summenzeichen, also in die Summe hinein genommen werden darf. Das dürfen wir, weil für die Ableitung einer Summe von Funktionen gilt, dass sie gleich der Summe der Ableitungen der einzelnen Funktionen ist (*Summenregel*).

Bei der Cosinusfunktion ist die Sache anspruchsvoller, weil wir zwischendurch eine Umindexierung vornehmen müssen. Wir starten wie gehabt:

$$[\cos x]' = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right]' = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right]'$$

An dieser Stelle bemerken wir, dass das erste Glied dieser Summe (das zu $k = 0$) gleich 0 ist:

$$\left[\frac{(-1)^0 x^{2\cdot 0}}{0!}\right]' = \left[\frac{1\cdot x^0}{1}\right]' = [1]' = 0$$

Folglich dürfen wir der Summe auch mit dem Index $k = 1$ beginnen anstatt mit dem Index $k = 0$:

$$[\cos x]' = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right]' = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right]'$$

Ich hätte aber gerne, dass das erste Glied der Summe wieder zum Indexwert 0 gehört, damit sich unser Resultat direkt und einfach mit der Potenzreihenschreibweise für die Sinusfunktion vergleichen lässt. Also definiere ich einen neuen Laufindex m:

$$m := k - 1 \quad \Rightarrow \quad k = m + 1 \quad \text{und} \quad 2k = 2(m+1) = 2m + 2$$

Wenn unsere Summe bei $k = 1$ startet, so beginnt sie unter Verwendung des Laufindex m nun bei $m = k - 1 = 1 - 1 = 0$. Das ist, was wir haben wollten. Wir schreiben also neu:

$$[\cos x]' = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right]' = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{m+1} x^{2m+2}}{(2m+2)!}\right]'$$

Jetzt nehmen wir die Ableitung wie gewohnt vor:

$$[\cos x]' = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{m+1} x^{2m+2}}{(2m+2)!}\right]' = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\cdot(2m+2)\cdot x^{2m+1}}{(2m+2)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1} x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Damit wir ganz beim erwarteten Ausdruck landen, klammere ich noch einen Faktor (-1) aus. Dabei bemerken wir vorab, dass $(-1)^{m+1} = (-1)^m \cdot (-1)$. Es folgt:

$$[\cos x]' = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1} x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)\cdot\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = -\sin x$$

(c) Die ersten paar Glieder der Potenzreihe für die Funktion e^x lauten:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

(d) Für $x = 1$ ergeben die ersten 10 Partialsummen der Potenzreihe für e^x:

n	Summe	Resultat
0	$\sum_{k=0}^{0}\frac{1^k}{k!} = \frac{1^0}{0!} = \frac{1}{1}$	$= 1$
1	$\sum_{k=0}^{1}\frac{1^k}{k!} = 1 + \frac{1^1}{1!} = 1 + 1$	$= 2$
2	$\sum_{k=0}^{2}\frac{1^k}{k!} = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} = 1 + 1 + \frac{1}{2}$	$= \frac{5}{2} = 2.5$
3	$\sum_{k=0}^{3}\frac{1^k}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1^3}{3!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	$= \frac{16}{6} = 2.\overline{6}$
4	$\sum_{k=0}^{4}\frac{1^k}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$	$= \frac{65}{24} = 2.708\overline{3}$
5	$\sum_{k=0}^{5}\frac{1^k}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$	$= \frac{326}{120} = 2.71\overline{6}$
6	$\sum_{k=0}^{6}\frac{1^k}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$	$= \frac{1957}{720} = 2.7180\overline{5}$
7	$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040}$	$= \frac{13700}{5040} = 2.71\overline{825396}$
8	$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320}$	$= \frac{109601}{40320} \approx 2.718278769841$
9	$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \frac{1}{362880}$	$= \frac{9864101}{362880} \approx 2.71828152557$

Wir sehen, wie sich diese Partialsummenfolge der irrationalen Euler'schen Zahl

$$e \approx 2.718281828459\ldots$$

annähert. e ist eben dieser Potenzreihe, also:

$$e = e^1 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

(e) Das ist nun mit all unserer Erfahrung aus den vorherigen Aufgaben, insbesondere aus (b), relativ winfach. Zunächst bemerken wir, dass wir die Ableitung wieder hinter das Summenzeichen schreiben dürfen, also die einzelnen Summanden ableiten können. Dann ist aber auch klar, dass der erste Summand 1 beim Ableiten wegfällt. Es folgt:

$$[e^x]' = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right]' = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x^k}{k!}\right]' = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x^k}{k!}\right]' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

Mit der Neuindexierung $m = k - 1$ ergibt sich sofort:

$$[e^x]' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!} = e^x$$