Übungen zur Differentialrechnung

SERIE VI: Ableitungen weiterer Funktionen

Klasse 155c / AGe

1. *Einsteiger*

   Wie lautet die Gleichung der Tangente mit Steigung 2 an den Graphen von $\sqrt{x}$?

2. *Tangenten an trigonometrische Funktionen*

   (a) Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von $\sin x$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{3}$.

   (b) Bestimme ebenso die Gleichung der Tangente an den Graphen von $\cos x$ über $x = \frac{3\pi}{4}$.

   (c) Wie lautet die Gleichung der Wendetangente an der ersten positiven Wendestelle von $\cos x$?

   (d) Über welchen Stellen x sind die Graphen der Sinus- und der Cosinusfunktion gleich steil?

   (e) Bestimme für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ die Gleichungen der Tangenten mit Steigung $\frac{4}{3}$ an den Graphen der Tangensfunktion.

3. *Repetition zu den elementaren Funktionsgraphen*

   Skizziere die Graphen zu $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, 2^x, $(\frac{1}{2})^x$, $\log_2 x$ und $\log_{1/2} x$.

   Wie lauten die jeweiligen Ableitungen und wie sieht der Ableitungsgraph aus?

4. *Eine Funktionsdifferenz*

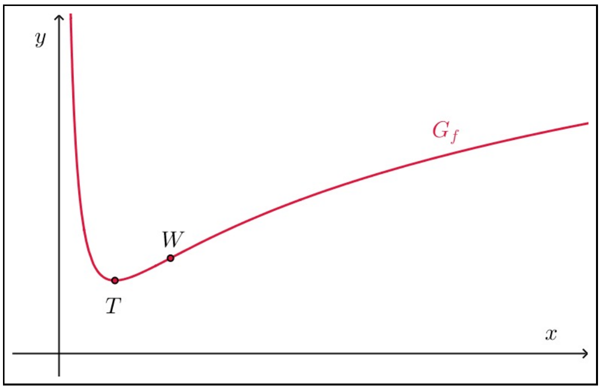
   (a) Betrachte die Funktion $f(x) = e^x - \frac{x}{e}$.
   Der Graph von $f(x)$ besitzt genau einen Tiefpunkt. Bestimme seine Koordinaten.

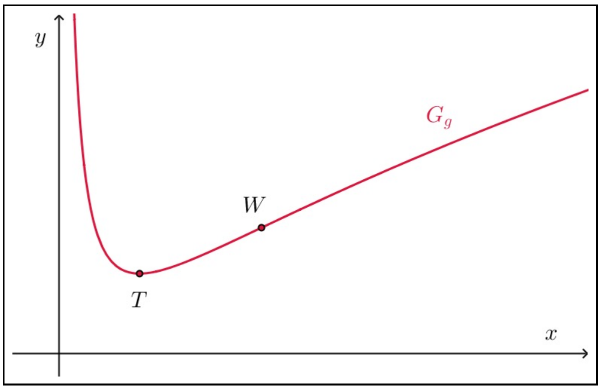
   (b) Verallgemeinern wir die vorherige Aufgabe und betrachten nun $f(x) = e^x - \frac{x}{e^a}$ mit $a \in \mathbb{R}$.
   Wie lauten nun die Koordinaten des Minimums in Abhängigkeit des Parameters a?

5. *Vermischtes*

   (a) Die Funktion $f(x) = x^2 + 4\cos x$ besitzt im Intervall $[0; \frac{\pi}{2}]$ genau eine Wendestelle. Welche Steigung besitzt die zugehörige Wendetangente?

   (b) **Anspruchsvoller!** Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x} + \log_2 x$ und $g(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} - 2$. Ihre beiden Graphen sehen recht ähnlich aus, wie unten zu sehen ist.
   Bestimme in beiden Fällen das Minimum und den Wendepunkt. Anspruchsvoller ist dabei v.a. die exakte Angabe einiger y-Koordinaten.





6. **Zusatzaufgabe:** *Wunderbares aus der Welt der höheren Mathematik – Potenzreihen*

Andeutungsweise haben wir bereits gezeigt bekommen, dass sich die Sinusfunktion $\sin x$ auch als unendlich lange Summe ungerader Potenzen von x schreiben lässt – wir sprechen von einer **Potenzreihe**:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

Dabei ist $k!$ (sprich: "k-Fakultät") das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis k, also:

$1! = 1 \qquad 2! = 1 \cdot 2 = 2 \qquad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \qquad 6! = 1 \cdot \ldots \cdot 6 = 720$ etc.

Sinnvollerweise definiert man zusätzlich: $0! := 1$.

Die Sinusfunktion kann somit also Polynom vom Grad ∞ verstanden werden. Das Gleiche gilt für die Cosinusfunktion, die sich wie folgt als Potenzreihe schreiben lässt:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

(a) Weshalb muss die Sinusfunktion zwingend den Grad ∞ aufweisen, wenn sie sich als Polynom schreiben lassen soll? Gib ein Argument an, das wir bei unseren bisherigen Betrachtungen von Polynomen kennengelernt haben.

(b) Zeige mittels obiger Potenzreihenschreibweisen von Sinus und Cosinus, dass $[\sin x]' = \cos x$, und ebenso, dass $[\cos x]' = -\sin x$. (Ist das nicht elegant?!)

(c) Die obigen Potenzreihen für die Sinus- und die Cosinusfunktion sind streng genommen nicht ganz korrekt notiert, weil ∞ keine natürliche Zahl ist. Eigentlich geht es hier um Grenzwerte, gegen die diese Summen im Limes von immer mehr Gliedern für jeden Wert der Variable x streben:

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \qquad \text{und} \qquad \cos x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right)$$

In gleicher Weise gilt nun ebenfalls:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)$$

Notiere die ersten sechs Glieder dieser Potenzreihe der Exponentialfunktion e^x ganz explizit, damit du siehst, wie sie funktioniert.

(d) Es ist $e^1 = e$. Notiere die ersten 10 Teilsummen der Potenzreihe für e^x an der Stelle $x = 1$ um zu sehen, wie sich diese Partialsummenfolge der Euler'schen Zahl e annähert.

(e) Zeige unter Verwendung der Potenzreihe für e^x, dass $[e^x]' = e^x$.

Bemerkung: Vielleicht fragst du dich, weshalb man sich soviel Mühe macht, eine Exponentialfunktion als Potenzreihe zu notieren. Was bringt das? Tatsächlich ist die Antwort auf diese Frage für die Mathematik von enormer Bedeutung! Erst mittels solcher Potenzreihen können nämlich Potenzen mit irrationalen Exponenten definiert werden...

Erinnern wir uns: Die Bedeutung von 2^6 ist uns sonnenklar: $2^6 := 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Auch negativen natürlichen Exponenten können wir eine Bedeutung zuordnen: $2^{-6} := \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}$. Gebrochene Exponenten verstehen wir als Lösungen von Potenzgleichungen: Z.B. ist $2^{\frac{1}{6}}$ per Definition die positive Lösung der Gleichung $x^6 = 2$, also eine Wurzel.

Was aber sollen wir uns beispielsweise unter $2^{\sqrt{6}}$ vorstellen? $\sqrt{6}$ ist eine irrationale Zahl, also keine ganze Zahl und kein Bruch. Wie bringen wir es fertig, dass $2^{\sqrt{6}}$ eine wohldefinierte Bedeutung hat?

Hier kommt die Antwort, die nun für jede beliebige Potenz mit Basis $a \in \mathbb{R}^+$ und Exponent $b \in \mathbb{R}$ gültig ist:

$$a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b \ln a} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b\,\ln a)^k}{k!} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k\,(\ln a)^k}{k!} \right)$$

Damit ist a^b durch eine Summe von natürlichen Potenzen von $\ln a$ und b ausgedrückt! Auch wenn das sehr kompliziert aussieht, ist diese Definition von a^b für die Mathematik von grösster Wichtigkeit.