

Übungen zur Differentialrechnung – Lösungen Serie VII

1. Für die Ableitungen ergibt sich:

$$a'(x) = \sin x + x \cos x$$

$$b'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+2}{2\sqrt{x}}$$

$$c'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin x = \frac{\cos x - 2x \sin x}{2\sqrt{x}}$$

$$d'(x) = -3 \sin x + (5 - 3x) \cos x$$

$$e'(x) = \frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x}$$

$$f'(x) = 3^x \ln 3 \cdot x^4 + 3^x \cdot 4x^3 = 3^x x^3 (x \ln 3 + 4)$$

$$g'(x) = -\frac{2 \cos x}{x^2} - \frac{2 \sin x}{x} = -\frac{2(\cos x + x \sin x)}{x^2}$$

$$h'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$i'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$j'(x) = 3x^2 \log_4 x + \frac{x^2}{\ln 4}$$

$$k'(x) = -\frac{\cos x}{2x\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = -\frac{\cos x + 2x \sin x}{2x\sqrt{x}}$$

$$l'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$$

2. Die Produktregel wurde falsch resp. nicht angewendet. Es wurden beide Einzelableitungen miteinander multipliziert. Das ist aber falsch: $f'(x) \neq u'(x) \cdot v'(x)$. Vielmehr gilt:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$$

3. (a) Wir teilen $f(x)$ zunächst in zwei Funktionen auf:

$$f(x) = \underbrace{2^x \cdot x^2}_{=:g(x)} \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot \sin x + g(x) \cdot \cos x$$

Bei der Ableitung von $g(x) = 2^x \cdot x^2$ kommt die Produktregel ein zweites Mal zur Anwendung:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2^x \ln 2 \cdot x^2 + 2^x \cdot 2x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (2^x \ln 2 \cdot x^2 + 2^x \cdot 2x) \cdot \sin x + 2^x \cdot x^2 \cdot \cos x \\ &= 2^x \ln 2 \cdot x^2 \sin x + 2^x \cdot 2x \sin x + 2^x \cdot x^2 \cos x \\ &= 2^x \cdot x (x \ln 2 \cdot \sin x + 2 \sin x + x \cos x) \end{aligned}$$

(b) Allgemein ergibt sich für die Ableitung eines Produktes $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$$

4. **Produktregel:** $f'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} = \frac{5}{2} x\sqrt{x}$

Potenzgesetz: $f(x) = x^2\sqrt{x} = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} x\sqrt{x}$

In beiden Fällen entsteht (natürlich resp. zum Glück!) dieselbe Ableitung.

5. Mit der Produktregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = (6x-1)(x^3-1) + (3x^2-x) \cdot 3x^2 \\ &= 6x^4 - 6x - x^3 + 1 + 9x^4 - 3x^3 = 15x^4 - 4x^3 - 6x + 1 \end{aligned}$$

Multiplizieren wir $f(x)$ zuerst aus, so finden wir:

$$f(x) = (3x^2 - x)(x^3 - 1) = 3x^5 - 3x^2 - x^4 + x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 15x^4 - 4x^3 - 6x + 1$$

Ich persönlich finde hier das zuerst Ausmultiplizieren einfacher (A. Gertsch).

6. Leiten wir direkt mit der Produktregel ab, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = (4x - 3)(x^2 - 4x) + (2x^2 - 3x + 1)(2x - 4) \\ &= 4x^3 - 16x^2 - 3x^2 + 12x + 4x^3 - 8x^2 - 6x^2 + 12x + 2x - 4 = 8x^3 - 33x^2 + 26x - 4 \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich durch sofortiges Ausmultiplizieren von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 8x^3 - 3x^3 + 12x^2 + x^2 - 4x = 2x^4 - 11x^3 + 13x^2 - 4x \\ \Rightarrow f'(x) &= 8x^3 - 33x^2 + 26x + 4 \end{aligned}$$

Nach wie vor finde ich das Ausmultiplizieren vor dem Ableiten die einfachere Variante (A. Gertsch).

7. Für die Ableitungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} a'(x) &= \frac{5(x+1) - 5x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} & b'(x) &= \frac{2(1+3x) - 2x \cdot 3}{(1+3x)^2} = \frac{2}{(1+3x)^2} \\ c'(x) &= \frac{-1 \cdot (x+2) - (1-x) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2} \\ d'(x) &= \frac{\cos x \cdot (2x-1) - \sin x \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{(2x-1) \cos x - 2 \sin x}{(2x-1)^2} \\ e'(x) &= \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} & f'(x) &= \frac{2x(8-x) - x^2 \cdot (-1)}{(8-x)^2} = \frac{x(16-x)}{(8-x)^2} \\ g'(x) &= \frac{\frac{x+2}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{\frac{x+2-2x}{2\sqrt{x}}}{(x+2)^2} = \frac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2} \\ h(x) &= \frac{x-2x^2}{x^3} = \frac{1-2x}{x^2} \Rightarrow h'(x) = \frac{(-2) \cdot x^2 - (1-2x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2(x-1)}{x^3} \\ i'(x) &= \frac{3x^2 \cdot 3^x - x^3 \cdot 3^x \cdot \ln 3}{(3^x)^2} = \frac{x^2(3-x \ln x)}{3^x} & j'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1-2 \ln x}{x^3} \\ k'(x) &= \frac{e^x \cdot 5x - e^x \cdot 5}{25x^2} = \frac{e^x(x-1)}{5x^2} \\ l'(x) &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 3x) - (x^4 - 3x^2 + 2)(2x - 3)}{(x^2 - 3x)^2} = \frac{2x^5 - 9x^4 + 9x^2 - 4x + 6}{(x^2 - 3x)^2} \end{aligned}$$

8. Mit der Quotientenregel ergibt sich:

$$[\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

9. Mit der Kettenregel ergibt sich:

$$a'(x) = 3(2x+3)^2 \cdot 2 = 6(2x+3)^2$$

$$c'(x) = 4(x+2)^3 \cdot 1 = 4(x+2)^3$$

$$e'(x) = (-1) \cdot (x^2-2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2-2)^2}$$

$$g'(x) = 3 \cdot (-1) \cdot (2-5x) \cdot (-5) = \frac{15}{(2-5x)^2}$$

$$i'(x) = (-2) \cdot (x^2+1)^{-3} \cdot 2x = \frac{-4x}{(x^2+1)^3}$$

$$k'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$$

$$m'(x) = -\sin(x^2-1) \cdot 2x$$

$$o'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$q'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$s'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5x}} \cdot 5 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$$

$$b'(x) = 2(8x-5)^1 \cdot 8 = 16(8x-5)$$

$$d'(x) = (-1) \cdot (2x+3)^{-2} \cdot 2 = \frac{-2}{(2x+3)^2}$$

$$f'(x) = (-1) \cdot (2x-1)^{-2} \cdot 2 = \frac{-2}{(2x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{3}{2} \cdot (-2) \cdot (x-1)^{-3} \cdot 1 = \frac{-3}{(x-1)^3}$$

$$j'(x) = \frac{-18(3x^2+2)}{(x^3+2x)^4}$$

$$l'(x) = -3\cos^2 x \cdot \sin x$$

$$n'(x) = \cos(\cos x) \cdot (-\sin x)$$

$$p'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6x-1}} \cdot 6 = \frac{3}{\sqrt{6x-1}}$$

$$r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{7x^2-3}} \cdot 14x = \frac{7x}{\sqrt{7x^2-3}}$$

$$t'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (3x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3 = \frac{-1}{2x\sqrt{3x}}$$

10. Weiter folgt mit der Kettenregel:

$$a'(x) = e^{4x} \cdot 4 = 4e^{4x}$$

$$b'(x) = e^{-x^2} \cdot -2x = -2xe^{-x^2}$$

$$c'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \frac{\sqrt{e^x}}{2}$$

$$e'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

$$h'(x) = 3e^{-3x} \cdot (-3) = -9e^{-3x}$$

$$i'(x) = \frac{1}{e^x \cdot \ln 2} \cdot e^x = \frac{1}{\ln 2}$$

$$j'(x) = \frac{4^{\ln x} \cdot \ln 4}{x}$$

$$k'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$l'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3} = \frac{-2}{x}$$

11. Für die Ableitungen der mehrfach verschachtelten Funktionen ergibt sich:

$$a'(x) = \frac{1}{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = \frac{2x \cos(x^2)}{\sin(x^2)}$$

$$b'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{3x}}} \cdot e^{3x} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{e^{3x}}}{2}$$

$$c'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x^3)} \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 = \frac{-3x^2 \cos(x^3)}{\sin^2(x^3)}$$

$$d'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} \sin(e^{-x^2})$$

$$e'(x) = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{\ln x})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = e^{\tan^2 x} \cdot 2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

12. Wir erhalten:

$$a'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$b'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$$

$$c'(x) = \frac{2}{x}$$

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$$

$$e'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \ln x - 1 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

13. Für diese Ableitungen ergibt sich:

$$a'(x) = e^x$$

$$c'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$$

$$e'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^x \cdot \ln x - e^x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{e^x(x \ln x - 1)}{x(\ln x)^2}$$

$$i'(x) = \frac{0 \cdot e^x - 1 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-1}{e^x}$$

$$k'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{x(2-x)}{e^x}$$

$$b'(x) = 2 + e^x$$

$$d'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x(2+x)e^x$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$$h'(x) = \frac{e^x \cdot (x-1) - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$j'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$l'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

14. Für die Ableitungen der kombinierten Funktionen erhalten wir:

$$a'(x) = \cos x \cdot e^{-2x} + \sin x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = e^{-2x} \cdot (\cos x - 2 \sin x)$$

$$b'(x) = e^{x \ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1)$$

$$c'(x) = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \cos(x^2) - 2^x \cdot \sin(x^2) \cdot 2x = 2^x \cdot (\ln 2 \cdot \cos(x^2) - 2x \sin(x^2))$$

$$d'(x) = \frac{(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) \cdot \cos x - x \ln x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{(\ln x + 1) \cdot \cos x + x \ln x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

$$e'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 \cdot \ln x + e^{x^3} \cdot \frac{1}{x} = e^{x^3} \cdot \left(3x^2 \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$f'(x) = \frac{2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{x} - \sin^2 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{4x \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{4x \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x}{2x\sqrt{x}}$$

15. (a) Mit Produkt- und Kettenregel ergibt sich für die drei Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' \cdot \frac{1}{x^2+1} + x^3 \cdot \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' = 3x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} + x^3 \cdot \frac{-1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x \\ &= \frac{3x^2}{x^2+1} - \frac{2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = (\sin x)' \cdot \frac{1}{x} + \sin x \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$h'(x) = (x-2)' \cdot \frac{1}{\ln x} + (x-2) \cdot \left(\frac{1}{\ln x} \right)' = 1 \cdot \frac{1}{\ln x} - (x-2) \cdot \frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x \ln x - x + 2}{x(\ln x)^2}$$

(b) Allgemein erhalten wir aus der Kombination von Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} f &= \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)} \\ \Rightarrow f'(x) &= u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-1}{v^2(x)} \cdot v'(x) = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

Das ist genau die Quotientenregel!