Übungen zur Differentialrechnung

SERIE VII: Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Klasse 155c / AGe

Aufgaben zur Produktregel

1. Leite unter Verwendung der Produktregel ab:

$$a(x) = x \sin x \qquad b(x) = (3x+2)\sqrt{x} \qquad c(x) = \sqrt{x}\cos x \qquad d(x) = (5-3x)\sin x$$

$$e(x) = \tan x \, \ln x \qquad f(x) = 3^x \, x^4 \qquad g(x) = \frac{2}{x}\cos x \qquad h(x) = \sin x \, \cos x$$

$$i(x) = x^2 \sin x \qquad j(x) = x^3 \log_4 x \qquad k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cos x \qquad l(x) = \sqrt{3}\sqrt{x}$$

2. Es sei $f(x) = x^3 \sin x$. Jemand schreibt: $f'(x) = 3x^2 \cos x$.

   Beschreibe den Fehler, der hier gemacht wurde.

3. Du kennst die Produktregel im Falle von zwei miteinander multiplizierten Funktionen:

$$f(x) = u(x)\,v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

   (a) Betrachten wir nun ein Produkt aus drei Funktionen:

$$f(x) = 2^x \cdot x^2 \cdot \sin x$$

   Überlege dir, wie die Ableitung von $f(x)$ lauten muss.

   Tipp: Es geht um eine Art "doppelte Anwendung" der Produktregel.

   (b) Notiere dir nun allgemein, wie die Ableitung der Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ lautet.

4. Die Funktion $f(x) = x^2\sqrt{x}$ lässt sich einerseits unter Verwendung der Produktregel ableiten. Andererseits geht's auch ohne Produktregel, indem man die Wurzel als Potenz schreibt und $f(x)$ anschliessend zu einer einzigen Potenz zusammenfasst.

   Zeige, dass die Ableitung $f'(x)$ in beiden Varianten gleich herauskommt.

5. Leite $f(x) = (3x^2 - x)(x^3 - 1)$ zuerst unter Verwendung der Produktregel ab. Leite anschliessend $f(x)$ nochmals ab, dieses Mal allerdings so, dass du zuerst die beiden Klammern ausmultiplizierst und danach das daraus resultierende Polynom ableitest.

   Vergleiche die beiden Wege. Welchen findest du persönlich besser?

6. Mache mit $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)(x^2 - 4x)$ nochmals denselben Vergleich wie unter Aufgabe 5.

Aufgaben zur Quotientenregel

7. Leite unter Verwendung der Quotientenregel ab und vereinfache:

$$a(x) = \frac{5x}{x+1} \qquad b(x) = \frac{2x}{1+3x} \qquad c(x) = \frac{1-x}{x+2} \qquad d(x) = \frac{\sin x}{2x-1}$$

$$e(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad f(x) = \frac{x^2}{8-x} \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2} \qquad h(x) = \frac{x-2x^2}{x^3}$$

$$i(x) = \frac{x^3}{3^x} \qquad j(x) = \frac{\ln x}{x^2} \qquad k(x) = \frac{e^x}{5x} \qquad l(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 3x}$$

8. Aus der Trigonometrie kennen wir die folgenden Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{und} \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Benutze diese trigonometrischen Beziehungen, die Quotientenregel sowie die Ableitungen von $\sin x$ und $\cos x$ um zu zeigen, dass $[\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ist.

Aufgaben zur Kettenregel

9. Leite unter Verwendung der Kettenregel ab:

$$a(x) = (2x+3)^3 \qquad b(x) = (8x-5)^2 \qquad c(x) = (x+2)^4 \qquad d(x) = (2x+3)^{-1}$$

$$e(x) = \left(x^2-2\right)^{-1} \qquad f(x) = \frac{1}{2x-1} \qquad g(x) = \frac{3}{2-5x} \qquad h(x) = \frac{3}{2(x-1)^2}$$

$$i(x) = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} \qquad j(x) = \frac{6}{\left(x^3+2x\right)^3} \qquad k(x) = \sin\left(x^3\right) \qquad l(x) = \cos^3 x$$

$$m(x) = \cos\left(x^2-1\right) \qquad n(x) = \sin(\cos x) \qquad o(x) = \frac{1}{\cos x} \qquad p(x) = \sqrt{6x-1}$$

$$q(x) = \sqrt{\sin x} \qquad r(x) = \sqrt{7x^2-3} \qquad s(x) = \sqrt{5x} \qquad t(x) = \frac{1}{\sqrt{3x}}$$

10. Weitere Ableitungen mit der Kettenregel:

$$a(x) = e^{4x} \qquad b(x) = e^{-x^2} \qquad c(x) = \ln(x^2) \qquad d(x) = \sqrt{e^x}$$

$$e(x) = \sqrt{\ln x} \qquad f(x) = e^{\sqrt{x}} \qquad g(x) = \ln\sqrt{x} \qquad h(x) = 3e^{-3x}$$

$$i(x) = \log_2 e^x \qquad j(x) = 4^{\ln x} \qquad k(x) = e^{\frac{1}{x}} \qquad l(x) = \ln\frac{1}{x^2}$$

11. Funktionen können mehrfach verschachtelt sein. Dann wird die Kettenregel entsprechend erweitert:

$$f(x) = u\Big(v\big(w(x)\big)\Big) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v)\cdot v'(w)\cdot w'(x)$$

Hier zwei konkrete Beispiele:

$$f(x) = \sin^2\left(3x^2-5\right) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 2\sin\left(3x^2-5\right)\cdot\cos\left(3x^2-5\right)\cdot 6x$$

$$g(x) = e^{\cos(x^4)} \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) = e^{\cos(x^4)}\cdot\Big(-\sin\left(x^4\right)\Big)\cdot 4x^3$$

Probiere es selber an den folgenden Aufgaben aus:

$$a(x) = \ln\Big(\sin\left(x^2\right)\Big) \qquad b(x) = \sqrt{e^{3x}} \qquad c(x) = \frac{1}{\sin(x^3)}$$

$$d(x) = \cos\Big(e^{-x^2}\Big) \qquad e(x) = \tan\sqrt{\ln x} \qquad f(x) = e^{\tan^2 x}$$

Vermischte Aufgaben zu den neuen Ableitungsregeln

12. Ableitungen mit dem Logarithmus naturalis:

$$a(x) = x\ln x \qquad b(x) = x^2\,\ln x \qquad c(x) = 1+2\ln x \qquad d(x) = \sqrt{x}\,\ln x$$

$$e(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad f(x) = \frac{1}{\ln x} \qquad g(x) = \frac{x}{\ln x} \qquad h(x) = \frac{x^2}{\ln x}$$

13. Ableitungen mit der e^x-Funktion:

$$a(x) = 2 + e^x \qquad b(x) = 2x + e^x \qquad c(x) = x \cdot e^x \qquad d(x) = x^2 \cdot e^x$$

$$e(x) = \frac{e^x}{x} \qquad f(x) = \frac{e^x}{x^2} \qquad g(x) = \frac{e^x}{\ln x} \qquad h(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

$$i(x) = \frac{1}{e^x} \qquad j(x) = \frac{x}{e^x} \qquad k(x) = \frac{x^2}{e^x} \qquad l(x) = (x+1)e^x$$

14. Die drei neuen Ableitungsregeln lassen sich auch kombinieren. Drei Beispiele:

- $f(x) = \frac{x \cos x}{\sin x}$

  Im Zähler eines Bruchs steht ein Funktionenprodukt. Innerhalb der Quotientenregel kommt also bei der Ableitung des Zählers die Produktregel zur Anwendung. Das sieht so aus:

$$f'(x) = \frac{\big(\cos x + x \cdot (-\sin x)\big) \cdot \sin x - x \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x \cdot \sin x - x\overbrace{\big(\sin^2 x + \cos^2 x\big)}^{=1}}{\sin^2 x} = \frac{\cos x \cdot \sin x - x}{\sin^2 x}$$

- $g(x) = \sin(x \ln x)$

  Im Argument der Sinusfunktion entdecken wir ein Funktionenprodukt. D.h., bei der inneren Ableitung der Kettenregel kommt die Produktregel zur Anwendung:

$$g'(x) = \cos(x \ln x) \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \cos(x \ln x) \cdot (\ln x + 1)$$

- $h(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$

  Der Zähler des Bruchs enthält eine verschachtelte Exponentialfunktion. Demnach muss innerhalb der Quotientenregel die Kettenregel angewendet werden:

$$h'(x) = \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot x - e^{x^2} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{x^2} \cdot (2x^2 - 1)}{x^2}$$

Im Prinzip sind wir damit nun in der Lage beliebige Funktionen abzuleiten:

$$a(x) = \sin x \cdot e^{-2x} \qquad b(x) = e^{x \ln x} \qquad c(x) = 2^x \cdot \cos\left(x^2\right)$$

$$d(x) = \frac{x \ln x}{\cos x} \qquad e(x) = e^{x^3} \cdot \ln x \qquad f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}$$

15. Die Quotientenregel lässt sich durch Kombination von Produkt- und Kettenregel umgehen. Schliesslich ist ein Bruch nichts anderes als die Multiplikation des Zählerausdrucks mit dem Kehrwert des Nennerausdrucks.

    (a) Bestimme mit dieser Überlegung die Ableitungen folgender Funktionen ohne Verwendung der Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = x^3 \cdot \frac{1}{x^2+1} \qquad g(x) = \frac{\sin x}{x} = \sin x \cdot \frac{1}{x} \qquad h(x) = \frac{x-2}{\ln x} = (x-2) \cdot \frac{1}{\ln x}$$

    (b) Leite nun allgemein die Quotientenregel aus der Produkt- und der Kettenregel her, indem du ansetzt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$$