Übungen zur Differentialrechnung – Lösungen Serie VIII

1. Das Volumen der Schachtel ist quaderförmig. Es ergibt sich aus der Grundfläche mal die Höhe. Erstere ist gegeben durch Länge l mal Breite b, Letztere entspricht der Variable x:

$$V(l, b, x) = G \cdot x = l \cdot b \cdot x$$

Nun gilt für die Länge und die Breite der Grundfläche: $l(x) = 8-2x$ und $b(x) = 5-2x$ (in Zentimetern). Da diese beiden Längen und x positiv sein sollen, folgern wir für das Attraktivitätsintervall: $x \in]0; \frac{5}{2}[$.

Nun setzen wir diese Nebenbedingungen in die Volumenfunktion ein:

$$V(x) = l(x) \cdot b(x) \cdot x = (8-2x) \cdot (5-2x) \cdot x = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

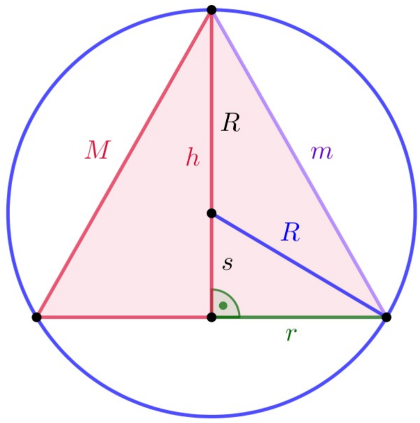
Diese Funktion wollen wir maximieren, also die optimale Höhe $x_{\max}$ bestimmen:

$$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 4\big(3x^2 - 13x + 10\big) = 4(3x-10)(x-1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10}{3} \quad \text{oder} \quad x = 1$$

Die erste Lösung liegt nicht im Attraktivitätsintervall! Somit lautet die Lösung $\underline{\underline{x = 1\,\mathrm{cm}}}$.

Zur Vollständigkeit gebe ich noch die optimalen Werte für die Länge und die Breite an: $l = 8-2x = 6\,\mathrm{cm}$ und $l = 5-2x = 3\,\mathrm{cm}$. Das maximale Volumen beträgt $V = l \cdot b \cdot x = 18\,\mathrm{cm}^2$.

2. Zielfunktion = Mantelfläche M des Kreiskegels:



$$M(r, m) = \pi \cdot r \cdot m$$

Die Höhe h, nach der wir optimieren wollen, kommt hier noch gar nicht vor $\Rightarrow$ drücke den Radius R des Grundkreises und die Mantellinie m durch h (und den als konstant vorausgesetzten Kugelradius R) aus: $r(h)$ und $m(h)$ (vgl. Querschnitt rechts):

$$s = h - R \quad \text{und} \quad m^2 = h^2 + r^2 \quad \text{und} \quad R^2 = s^2 + r^2$$

Formuliere daraus für den Grundkreisradius r resp. für r^2:

$$r^2 = R^2 - s^2 = R^2 - (h-R)^2 = R^2 - \big(h^2 - 2hR + R^2\big) = R^2 - h^2 + 2hR - R^2 = 2hR - h^2$$

Und weiter für m resp. m^2:

$$m^2 = h^2 + r^2 = h^2 + 2hR - h^2 = 2hR$$

Nun haben wir für r und für h resp. für ihre Quadrate Ausdrücke in Abhängigkeit von h (und von R) gefunden. Somit können wir die Mantelfläche M als Funktion von h notieren.

Allerdings: Ist die Mantelfläche maximal, dann auch ihr Quadrat. Das erlaubt uns die Vermeidung von Wurzeln, was das Ableiten vereinfacht. Für das Quadrat Q der Mantelfläche M schreiben wir:

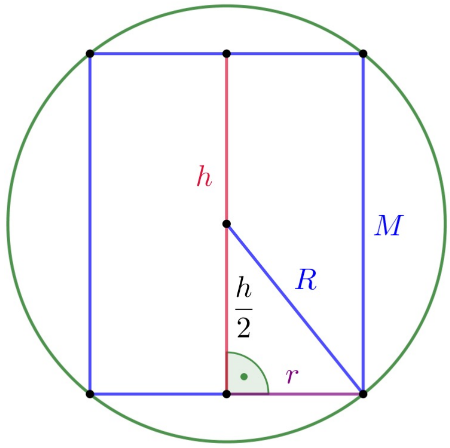
$$Q(h) = M^2(h) = \pi^2 \cdot r^2 \cdot m^2 = \pi^2 \cdot \big(2hR - h^2\big) \cdot 2hR = 2R\pi^2\big(2h^2R - h^3\big)$$

Nun leiten wir nach h ab und setzen gleich 0:

$$Q'(h) = 2R\pi^2\big(4hR - 3h^2\big) = 2R\pi^2 \cdot h \cdot (4R - 3h) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0 \quad \text{oder} \quad h = \frac{4}{3}R$$

Attraktivitätsintervall: $h \in]0; 2R[$. Nur Höhen h in diesem Intervall sind sinnvoll Lösungen! Somit muss die einzige Lösung $\underline{\underline{h = \frac{4}{3}R}}$ lauten. (Damit würden wir weiter finden: $Q = \frac{64\pi^2}{27}R^4$ resp. $M = \frac{8\pi\sqrt{3}}{9}R^2$.)

3. Zielfunktion = Mantelfläche des Zylinders:



$$M(h,r) = U(r) \cdot h = 2\pi r \cdot h$$

$U(r)$ = Umfang der Grundfläche, r = Radius der Grundfläche, h = Höhe des Zylinders.

Attraktivitätsintervall: $h \in]0; 2R[$.

Ich möchte M z.B. als Funktion der Höhe h optimieren $\Rightarrow$ r als Funktion von h auffassen. Aus Querschnitt folgt:

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$$

Damit schreiben wir M als Funktion von h:

$$M(h) = 2\pi r(h)\,h = 2\pi h\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad Q(h) = M^2(h) = 4\pi^2 h^2\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) = 4\pi^2\left(R^2h^2 - \frac{h^4}{4}\right)$$

Um die Ableitung der Wurzel zu vermeiden, verwende ich als Zielfunktion $Q(h) = M^2(h)$!

Optimiere $Q(h) \Rightarrow$ 1. Ableitung gleich 0 setzen und $h_{\max}$ bestimmen:

$$Q'(h) = 4\pi^2\big(2R^2h - h^3\big) = -4\pi^2 h\big(h^2 - 2R^2\big) = -4\pi^2 h\big(h + \sqrt{2}\,R\big)\big(h - \sqrt{2}\,R\big)$$

$$\Rightarrow \quad h = 0 \quad \text{oder} \quad h = \pm\sqrt{2}\,R$$

$h = 0$ und $h = -\sqrt{2}\,R$ liegen nicht im Attraktivitätsintervall. Somit muss $h_{\max} = \sqrt{2}\,R$ sein. Damit bestimmen wir $r_{\max}$:

$$r_{\max} = r(h_{\max}) = \sqrt{R^2 - \frac{h_{\max}^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{(\sqrt{2}\,R)^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Damit können wir das gesuchte Verhältnis $h_{\max} : r_{\max}$ bestimmen:

$$h_{\max} : r_{\max} = \frac{h_{\max}}{r_{\max}} = \frac{\sqrt{2}\,R}{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,R \cdot \sqrt{2}}{R} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2:1}}$$

Damit ist die Höhe des Zylinders mit maximaler Mantelfläche gleich dem Durchmesser seiner Grundfläche. In der Skizze oben wäre die Querschnittsfläche ein Quadrat!

4. Zielfunktion = Gesamtfläche A beider Figuren:

$$A(r,s) = A_{\bigcirc} + A_{\square} = \pi r^2 + s^2$$

Die Umfänge beider Figuren sind $U_{\bigcirc} = 2\pi r$ und $U_{\square} = 4s$. Ist l die Länge des Drahtes, so gilt also:

$$l = 2\pi r + 4s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{l - 2\pi r}{4}$$

Offenbar habe ich mich entschieden $A(r,s)$ nur noch mit der Variable r auszudrücken. Deshalb habe ich obige Gleichung nach s aufgelöst. Für die Gesamtfläche folgt:

$$A(r) = \pi r^2 + \big(s(r)\big)^2 = \pi r^2 + \left(\frac{l - 2\pi r}{4}\right)^2 = \pi r^2 + \frac{l^2 - 4\pi l r + 4\pi^2 r^2}{16}$$

$$= \pi r^2 + \frac{l^2}{16} - \frac{\pi l}{4} r + \frac{\pi^2}{4} r^2 = \frac{4\pi + \pi^2}{4} \cdot r^2 - \frac{\pi l}{4} \cdot r + \frac{l^2}{16}$$

Nun können wir uns über die Minimierung und über die Maximierung Gedanken machen...

Zuerst aber noch eine kurze Überlegung zum Attraktivitätsintervall. Der Kreisradius r kann 0 sein. Dann wird der gesamte Draht für das Quadrat verwendet. Würde umgekehrt der gesamte Draht für den Kreis verwendet, so ist $l = 2\pi r$ resp. $r = \frac{l}{2\pi}$. Das Attraktivitätsintervall ist also $[0; \frac{l}{2\pi}]$.

(a) **Minimierung:** Die Zielfunktion $A(r)$ ist zu einer quadratischen Funktion in r geworden:

$$A(r) = \underbrace{\frac{4\pi + \pi^2}{4}}_{=a} \cdot r^2 \underbrace{- \frac{\pi l}{4}}_{=b} \cdot r + \underbrace{\frac{l^2}{16}}_{=c}$$

Der zugehörige Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel, die also ein Minimum aufweist.

Das bedeutet, wir brauchen hier keine Ableitung zu berechnen, denn bei quadratischen Funktionen wissen wir auswendig, wie die Extremalstelle ($=$ x-Koordinate des Scheitelpunktes) lautet:

$$r_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{\pi l}{4}}{2 \cdot \frac{4\pi+\pi^2}{4}} = \frac{\frac{\pi l}{4}}{\frac{4\pi+\pi^2}{2}} = \frac{\pi l}{4} \cdot \frac{2}{4\pi + \pi^2} = \frac{1}{2(4+\pi)} \cdot l$$

Damit beträgt die für den Kreis verwendete Drahtlänge:

$$U_{\bigcirc,\min} = 2\pi \cdot r_{\min} = \frac{2\pi}{2(4+\pi)} \cdot l = \frac{\pi}{4+\pi} \cdot l$$

Die Drahtlänge für das Quadrat ist folglich gegeben durch:

$$U_{\square,\min} = l - U_{\bigcirc,\min} = l - \frac{\pi}{4+\pi} \cdot l = \left(1 - \frac{\pi}{4+\pi}\right) \cdot l = \frac{4+\pi-\pi}{4+\pi} \cdot l = \frac{4}{4+\pi} \cdot l$$

Für das Verhältnis der beiden Drahtstücke ergibt sich:

$$U_{\square,\min} : U_{\bigcirc,\min} = \frac{U_{\square,\min}}{U_{\bigcirc,\min}} = \frac{\frac{4}{4+\pi} \cdot l}{\frac{\pi}{4+\pi} \cdot l} = \frac{4}{4+\pi} \cdot \frac{4+\pi}{\pi} = \frac{4}{\pi} = \underline{\underline{4 : \pi \approx 1.27 : 1}}$$

Zur Minimierung der Gesamtfläche wird also etwas mehr Draht für den Umfang des Quadrats als für den Umfang des Kreises verwendet!

(b) **Maximierung:** Die Zielfunktion $A(r)$ bleibt dieselbe. Das ist im ersten Moment irritierend, denn es handelt sich ja immer noch um eine quadratische Funktion mit lediglich einem lokalen Minimum (nach oben offene Parabel).

Das kann nur eines bedeuten: Der Maximalwert wird an einem der beiden Ränder des Attraktivitätsintervalls erreicht! Der Draht muss entweder ganz für den Kreis oder ganz für das Quadrat verwendet werden. Um zu erfahren, für welche der beiden Varianten die Fläche maximal wird, müssen wir einfach die beiden Extreme durchrechnen:

Nur Kreis: $U_{\bigcirc,\max} = 2\pi r = l \quad \Rightarrow \quad r = \frac{l}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad A_{\bigcirc,\max} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 = \frac{l^2}{4\pi}$

Nur Quadrat: $U_{\square,\max} = 4s = l \quad \Rightarrow \quad s = \frac{l}{4} \quad \Rightarrow \quad A_{\square,\max} = s^2 = \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{l^2}{16}$

Nun ist $4\pi < 16$ (weil $\pi < 4$ ist). Daraus folgt, dass $A_{\square,\max} < A_{\bigcirc,\max}$.

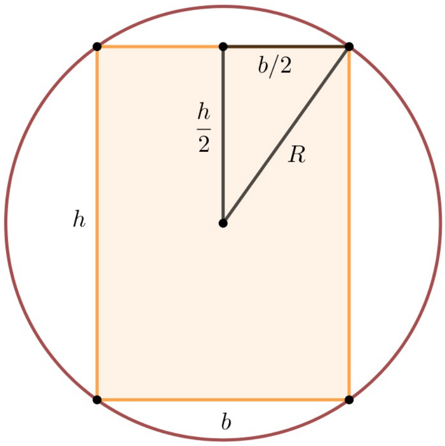
<u>Die maximale Fläche wird erreicht, wenn der gesamte Draht für den Kreis verwendet wird.</u>

Nebenbei: Von allen ebenen Figuren hat der Kreis das grösste Verhältnis "Fläche : Umfang".

Und in 3D: Von allen Körpern hat die Kugel das grösste Verhältnis "Volumen : Oberfläche". Aus diesem Grund bildet Wasser in der Luft kugelförmige Tropfen, denn die Oberflächenspannung sorgt dafür, dass die Oberfläche (bei fixem Volumen) minimal wird.

5. Die zu optimierende Zielfunktion ist die Tragfähigkeit T:

$$T(b,h) = k \cdot b \cdot h^2$$



Wie die Skizze zeigt, gibt es bei einem Balken, der aus einem kreisrunden Stamm ausgesägt werden soll, einen pythagoräischen Zusammenhang zwischen Breite und Höhe:

$$R^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 4R^2 - b^2$$

Damit lässt sich die Zielfunktion in alleiniger Abhängigkeit von b ausdrücken (wegen h^2 ist es praktisch h zu eliminieren):

$$T(b) = k \cdot b \cdot h^2(b) = k \cdot b \cdot \left(4R^2 - b^2\right) = k \cdot \left(4R^2 b - b^3\right)$$

Zur Optimierung leiten wir nach b ab und setzen die Ableitung gleich 0:

$$T'(b) = k \cdot \left(4R^2 - 3b^2\right) = k \cdot \left(2R + \sqrt{3}\,b\right)\left(2R - \sqrt{3}\,b\right) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}R$$

Wie sieht das Attraktivitätsintervall aus? Sinnvolle Balkenbreiten b müssen in $]0;2R[$ liegen. Somit kommt nur die positive Lösung in Frage. Es ist also $b_{\text{max}} = \frac{2}{\sqrt{3}}R$. Daraus folgt für die optimale Höhe:

$$h_{\text{max}} = h(b_{\text{max}}) = \sqrt{4R^2 - b^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{4}{3}R^2} = \sqrt{\frac{8}{3}R^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$$

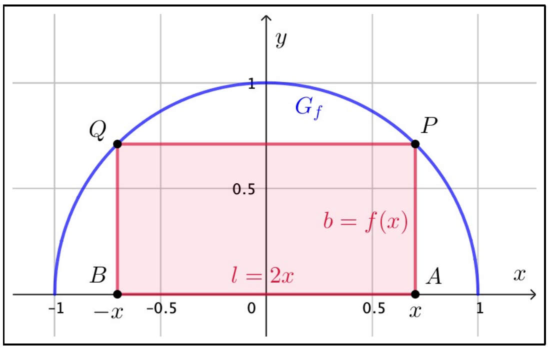
Nun können wir das Verhältnis von optimaler Höhe und Breite angeben:

$$h_{\text{max}} : b_{\text{max}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R}{\frac{2}{\sqrt{3}}R} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \underline{\underline{\sqrt{2} : 1}}$$

In der Skizze oben entspricht $h : b$ diesem optimalen Seitenverhältnis.

6. Die Zielfunktion ist die Fläche des Rechtecks $APQB$:

$$A(l,b) = l \cdot b$$



Die Länge entspricht der doppelten x-Koordinate des Punktes P ($l(x) = 2x$), während die Breite durch den Funktionswert an der Stelle x gegeben ist ($b(x) = f(x)$). Damit formulieren wir die Zielfunktion in alleiniger Abhängigkeit von der Variable x:

$$A(x) = l(x) \cdot b(x) = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

Anstelle von A können wir auch das Quadrat der Fläche maximieren:

$$Q(x) = A^2(x) = 4x^2\left(1 - x^2\right) = 4\left(x^2 - x^4\right)$$

Aus dem Nullsetzen der 1. Ableitung folgt:

$$Q'(x) = 4\left(2x - 4x^3\right) = 4x\left(2 - 4x^2\right) = 4x\left(\sqrt{2} + 2x\right)\left(\sqrt{2} - 2x\right) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Für x kommen alle Werte im Intervall $]-1;1[$ ausser 0 in Frage, wobei das Rechteck für $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dasselbe ist wie für $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}$. P und Q tauschen einfach die Rollen.

Die optimalen Werte für x sind also $\underline{\underline{x_{\text{max}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}}$.

Das optimale Rechteck besteht somit links und rechts der y-Achse je aus einem Quadrat, denn:

$$b_{\text{max}} = f(x_{\text{max}}) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

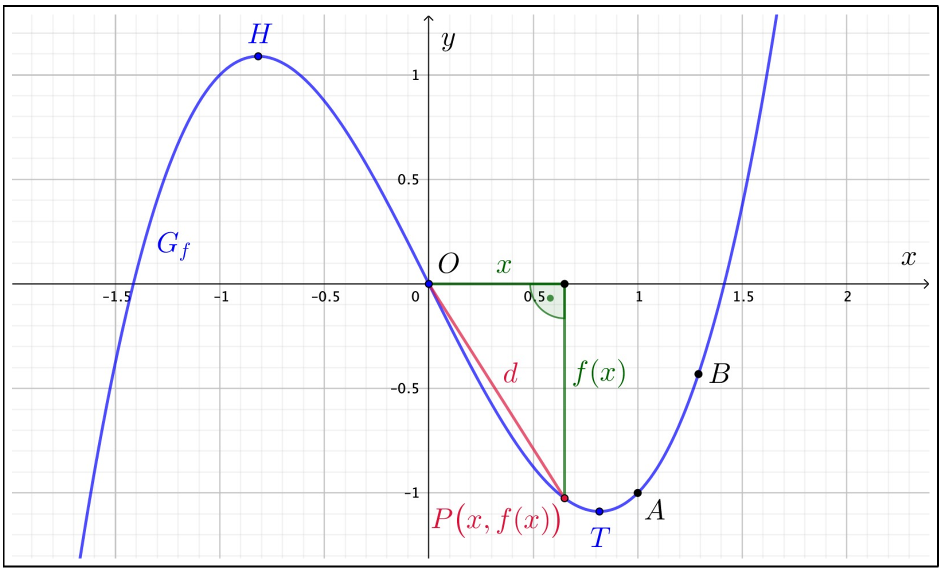
7. Analysieren wir zuerst kurz die Funktion $f(x)$ selber, um eine Idee vom Aussehen ihres Graphen zu erhalten (für den Fall, dass man kein `GeoGebra` hat resp. dieses nicht verwenden darf):

- $f(x)$ ist kubisch und besitzt drei NS:
$$f(x) = x^3 - 2x = x\left(x^2 - 2\right) = x\left(x + \sqrt{2}\right)x\left(x - \sqrt{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{NS:} \quad x = 0, \pm\sqrt{2}$$
- $f(x)$ ist ungerade $\Rightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung $(0,0)$ (= Wendepunkt des G_f).
- G_f kommt links von $-\infty$ ins Bild und geht rechts nach $+\infty$ – wegen dem ersten Glied x^3.
- Die Horizontalstellen sind rasch bestimmt:
$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 3\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{HS:} \quad x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$
Dabei ist $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.8$, denn $0.8^2 = 0.64 \approx 0.\overline{6} = \frac{2}{3}$.
- Der Tiefpunkt bei $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ liegt auf der Höhe:
$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3} - 2\right) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{4\sqrt{6}}{9} \approx -1.1$$
Näherung: $\sqrt{6.25} = 2.5$ und folglich $\sqrt{6} \approx 2.4$ resp. $4\sqrt{6} \approx 9.6$ und somit $-\frac{4\sqrt{6}}{9} \approx -1.1$.
Die Extremalpunkte liegen somit bei $T \approx (0.8, -1.1)$ und $H \approx (-0.8, 1.1)$.

Mit all diesen Informationen lässt sich der G_f gut skizzieren (vgl. `GeoGebra`-Output unten).

Betrachten wir nur die rechte Seite des G_f (also für $x > 0$). Links lassen sich wegen der Punktsymmetrie analoge Überlegungen anstellen.

- Da der Ursprung selber auch auf dem G_f liegt, ist der Punkt $O(0,0)$ auch ein lokales resp. sogar ein globales Minimum, was den Abstand zum Ursprung angeht.
- Lasse ich nun einen Punkt P auf dem G_f vom Ursprung $O(0,0)$ wegwandern, so vergrössert sich dabei der Abstand d zum Ursprung. Das geht sicher so weiter bis zum Tiefpunkt T und wohl auch noch ein bisschen darüber hinaus, vielleicht etwa bis zum Punkt A. Der Punkt A hat also lokal auf dem G_f den grössten Abstand zum Ursprung.
- Fahre ich mit dem Punkt P auf dem G_f weiter, so wird er O wieder näher kommen um irgendwo in der Gegend von B den lokal kürzesten Abstand d zum Ursprung zu erreichen.
- Dahinter wird sich d dann nur noch vergrössern, wenn ich mit P auf dem G_f weiterfahre.



Die ganze Vorbereitungsarbeit auf der vorigen Seite wäre nicht unbedingt notwendig. Man kann ja auch einfach mal drauf los rechnen!

Wir wissen nun aber bereits, was wir erwarten, nämlich insgesamt fünf lokale Extremalstellen bei $x = 0$, $x \approx \pm 1$ und $x \approx \pm 1.3$ ($=$ x-Koordinaten der Punkt A und B und ihrer Spiegelpunkte auf der anderen Seite des Ursprungs). Solches Vorwissen ist doch recht wertvoll um sicher zu sein, dass man keinen Unsinn zusammenrechnet!

Die Zielfunktion ist der Abstand d eines Punktes $P(x, y)$ auf dem G_f zum Ursprung $(0, 0)$. Wir können aber direkt wieder mit dem Quadrat des Abstandes arbeiten, denn wenn d extremal ist, dann auch d^2 (Abstände sind positive Grössen!). Nach Pythagoras gilt:

$$q(x, y) = d^2(x, y) = x^2 + y^2$$

Die Nebenbedingung besteht darin, dass P auf dem G_f liegt, dass also $y = f(x)$ ist. Damit folgt:

$$q(x) = x^2 + f^2(x) = x^2 + \left(x^3 - 2x\right)^2 = x^2 + x^6 - 4x^4 + 4x^2 = x^6 - 4x^4 + 5x^2$$

Diese nur noch von x abhängige Funktion gilt es zu optimieren:

$$q'(x) = 6x^5 - 16x^3 + 10x = 2x\left(3x^4 - 8x^2 + 5\right)$$

$x = 0$ entdecken wir hier sofort als lokale Extremalstelle des Abstandes.

Die hintere Klammer gilt es weiter zu faktorisieren. Im Prinzip könnte man substituieren: $z = x^2$. So ergäbe sich der quadratische Ausdruck $3z^2 - 8z + 5$, mit dem sich schlimmstenfalls via Mitternachtsformel eine Faktorisierung für z ermitteln liesse.

Im vorliegenden Fall ist das aber viel zu kompliziert. Es lässt sich sofort erkennen, dass $x = \pm 1$ Nullstellen von $q'(x)$ sind. Folglich können wir $(x + 1)(x - 1) = (x^2 - 1)$ ausklammern:

$$q(x) = 2x\left(3x^4 - 8x^2 + 5\right) = 2x\left(x^2 - 1\right)\left(3x^2 - 5\right) = 3x\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)$$

Die lokalen Extremalstellen sind somit: $x = 0$, $x = \pm 1$ und $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{3} \approx \pm\frac{\sqrt{16}}{3} = \pm\frac{4}{3} \approx \pm 1.3$.

Das bestätigt unsere Vorüberlegungen! Schliesslich müssen wir noch die zugehörigen y-Koordinaten berechnen:

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

$$f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^3 - 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \left(\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 - 2\right) = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \left(\frac{5}{3} - 2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{15}}{9} \approx -\frac{\sqrt{16}}{9} = -\frac{4}{9} \approx -0.45$$

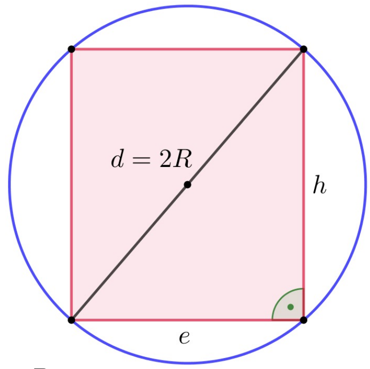
Fassen wir zusammen! Die Punkte auf dem G_f mit lokal minimalem Abstand zum Ursprung sind die folgenden fünf:

$$\underline{\underline{O(0,0) \qquad A(1,-1) \qquad A'(-1,1) \qquad B\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{9}\right) \qquad B'\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{9}\right)}}$$

8. Die Mantelfläche eines Quaders mit quadratischer Grundfläche soll maximiert werden. Ist s eine Kante an der Grundfläche des Quaders und h seine Höhe, so lautet die Zielfunktion zunächst:

$$M(s,h) = 4 \cdot s \cdot h$$

Zum Quadermantel zählen nur die vier Seitenflächen und nicht noch die Grund- und die Deckfläche!



Der Quader soll einer Kugel einbeschrieben sein. Rechts ein Querschnitt der Situation. Achtung, dieser Querschnitt ist so gewählt, dass wir eine Raumdiagonale d des Quaders einzeichnen können. Sie hat ihre Enden auf der Kugeloberfläche und somit gilt: $d = 2R$.

Die Strecke e ist die Diagonale der quadratischen Grundfläche. Für e und d gilt gemäss Pythagoras:

$$e^2 = s^2 + s^2 = 2s^2 \qquad \text{und} \qquad d^2 = e^2 + h^2 = 2s^2 + h^2 \overset{!}{=} 4R^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 4R^2 - 2s^2$$

Damit lässt sich die Zielfunktion in alleiniger Abhängigkeit von s schreiben:

$$M(s) = 4 \cdot s \cdot h(s) = 4 \cdot s \cdot \sqrt{4R^2 - 2s^2}$$

Auch hier lohnt es sich wieder das Quadrat der Mantelfläche als wurzelfreie Zielfunktion zu nehmen:

$$Q(s) = M^2(s) = 16 \cdot s^2 \cdot \left(4R^2 - 2s^2\right) = 32 \cdot \left(2R^2 s^2 - s^4\right)$$

Zur Maximierung leiten wir ab und setzen gleich 0:

$$Q'(s) = 32 \cdot \left(4R^2 s - 4s^3\right) = 128 \cdot s \cdot \left(R^2 - s^2\right) = 128 \cdot s \cdot (R+s) \cdot (R-s) \overset{!}{=} 0$$

Es gibt somit drei Extremalstellen für die Mantelfläche: $s = 0$ und $s = \pm R$. Für s kommen aber nur positive Werte in Frage. Somit ist $\underline{\underline{s = R}}$ die einzige relevante Lösung.

9. Die Zielfunktion ist das Volumen V eines Quaders mit quadratischer Grundfläche G. Ist s die Kante dieser Grundfläche und h die Höhe des Quaders, so folgt:

$$V(s,h) = G \cdot h = s^2 \cdot h$$

Im Prinzip wollen wir alle solchen Quader mit gleicher Oberfläche A miteinander vergleichen, um dann herauszufinden, dass der Würfel ($h = s$) unter all diesen Quadern das maximale Volumen aufweist. Die Nebenbedingung lautet also:

$$A = 2G + M = 2s^2 + 4hs \qquad \Rightarrow \qquad h(s) = \frac{A - 2s^2}{4s}$$

Damit können wir die Volumenfunktion in alleiniger Abhängigkeit von s schreiben:

$$V(s) = s^2 \cdot h(s) = s^2 \cdot \frac{A - 2s^2}{4s} = s \cdot \frac{A - 2s^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left(As - 2s^3\right)$$

Dieses Volumen maximieren wir wie gewohnt durch Ableitung:

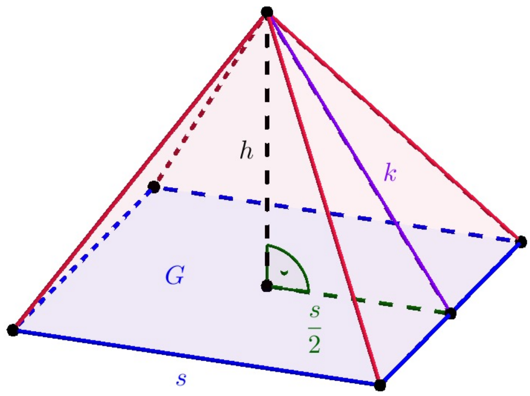
$$V'(s) = \frac{1}{4} \cdot \left(A - 6s^2\right) = \frac{6}{4} \cdot \left(\frac{A}{6} - s^2\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{A}{6}} + s\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{A}{6}} - s\right) \overset{!}{=} 0$$

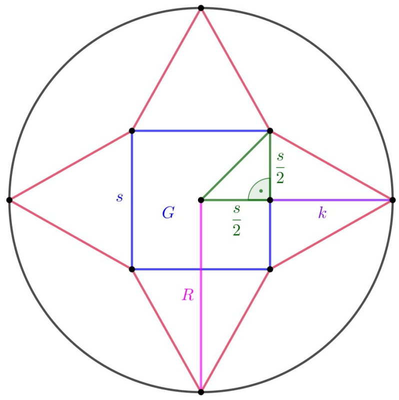
Da nur eine positive Kantenlänge in Frage kommt, ist $s_{\max} = \sqrt{\frac{A}{6}}$. Daran erkennt man eigentlich bereits den Würfel, denn die Gesamtoberfläche wird durch 6 geteilt, was dann eine von sechs gleich grossen Seitenflächen ergibt, und davon wird die Wurzel gezogen, um die Kantenlänge s zu bestimmen.

Wir wollen aber ganz sicher gehen und rechnerisch zeigen, dass $h_{\max} = s_{\max}$ ist. Dafür könnte man $s_{\max} = \sqrt{\frac{A}{6}}$ in $h(s)$ einsetzen und überprüfen, dass sich $h_{\max} = \sqrt{\frac{A}{6}}$ ergibt. Es geht aber einfacher, indem wir verwenden, dass $A = 6s_{\max}^2$ ist:

$$h_{\max} = h(s_{\max}) = \frac{A - 2s_{\max}^2}{4s_{\max}} = \frac{6s_{\max}^2 - 2s_{\max}^2}{4s_{\max}} = \frac{4s_{\max}^2}{4s_{\max}} = s_{\max} \qquad \texttt{q.e.d.}$$

10. Die Aufgabe ist zunächst anspruchsvoll, weil man sich die geometrische Situation gut zurechtlegen muss, um die Zielfunktion und die Nebenbedingung korrekt zu erfassen. Danach ist es aber eine ganz normale Optimierungsaufgabe.





Wie bei allen spitz zulaufenden Körpern mit Grundfläche G und Höhe h, so gilt auch hier:

$$V(G,h) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Die Grundfläche ist quadratisch mit Kantenlänge s, also ist $G = s^2$ und wir schreiben sofort:

$$V(s,h) = \frac{1}{3} \cdot G(s) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot h$$

Nun müssen wir h und s voneinander abhängig machen, wobei die Tatsache Eingang finden muss, dass das Pyramidennetz einem Kreis mit Radius R einbeschrieben ist. Zunächst erkennen wir mit dem Satz des Pythagoras in der 3D-Ansicht oben:

$$h^2 = k^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 = k^2 - \frac{s^2}{4}$$

Dabei ist k die Höhe einer dreieckigen Seitenfläche der Pyramide. Für diese Höhe k können wir aus der ebenen Figur rechts folgern:

$$k = R - \frac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = \left(R - \frac{s}{2}\right)^2 = R^2 - Rs + \frac{s^2}{4}$$

Damit schreiben wir für die Pyramidenhöhe h neu:

$$h^2 = k^2 - \frac{s^2}{4} = R^2 - Rs + \frac{s^2}{4} - \frac{s^2}{4} = R^2 - Rs \quad \Rightarrow \quad h(s) = \sqrt{R^2 - Rs}$$

Das ist ein erstaunlich kompakter Ausdruck, den wir in die Zielfunktion einsetzen können:

$$V(s) = \frac{1}{3}\, s^2\, h(s) = \frac{1}{3}\, s^2 \sqrt{R^2 - Rs} \quad \Rightarrow \quad Q(s) = V^2(s) = \frac{1}{9}\, s^4 \left(R^2 - Rs\right) = \frac{R}{9}\left(Rs^4 - s^5\right)$$

Wir optimieren anstelle von $V(s)$ das Quadrat davon, um die Wurzel loszuwerden. Durch Ableiten und gleich 0 setzen erhalten wir für das extremale s:

$$Q'(s) = \frac{R}{9}\left(4Rs^3 - 5s^4\right) = \frac{R}{9}\, s^3\,(4R - 5s) \stackrel{!}{=} 0$$

Da $s = 0$ als Lösung nicht in Frage kommt, muss die Kantenlänge mit maximalem Pyramidenvolumen durch $\underline{\underline{s_{\max} = \frac{4}{5}\, R}}$ gegeben sein.

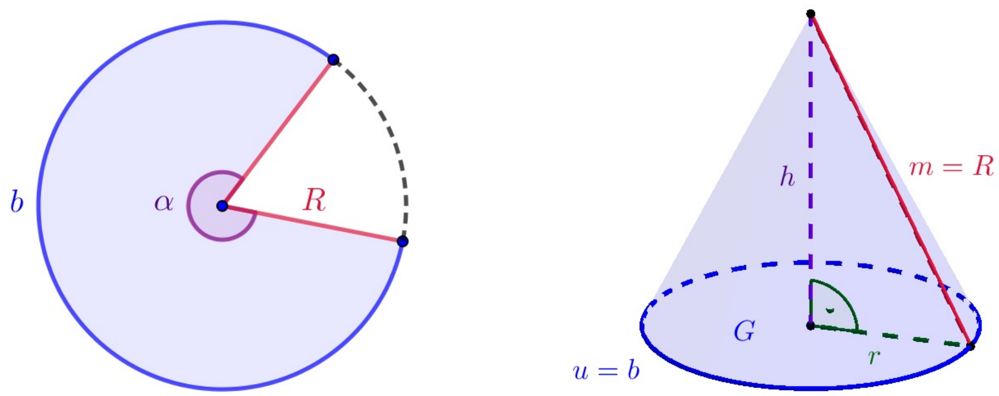
Die Höhe einer Seitenfläche beträgt bei maximalem Volumen $k_{\max} = R - \frac{s_{\max}}{2} = R - \frac{2}{5}R = \frac{3}{5}R$. Daraus folgt für die Gesamtoberfläche der maximal-voluminösen Pyramide:

$$A_{\max} = G + 4S = s_{\max}^2 + 4 \cdot \frac{s_{\max} \cdot k_{\max}}{2} = \left(\frac{4}{5}\, R\right)^2 + 2 \cdot \frac{4}{5}\, R \cdot \frac{3}{5}\, R = \frac{16}{25}\, R^2 + \frac{24}{25}\, R^2 = \frac{40}{25}\, R^2 = \frac{8}{5}\, R^2$$

Welcher Anteil des Kreises wurde folglich für die Pyramide mit maximalen Volumen verwendet?

$$\frac{A_{\max}}{A_{\text{Kreis}}} = \frac{\frac{8}{5}\, R^2}{\pi R^2} = \underline{\underline{\frac{8}{5\pi}}} \approx 0.51 = 51\,\% \quad \Rightarrow \quad \text{gut die Hälfte des Papiers!}$$

11. Zunächst muss man sich die geometrische Situation klar machen. Links sehen wir das flache, kreisrunde Papier mit Radius R und dem Zentriwinkel α. Rechts wird der daraus geformte Kreiskegel (= Tüte) mit dem ehemaligen Papiermittelpunkt an der Spitze gezeigt:



Es soll das Volumen des Kreiskegels maximiert werden. Dieses ist gegeben durch (Zielfunktion!):

$$V(r,h) = \frac{1}{3} \cdot G(r) \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Sowohl r, als auch h sollen vom Zentriwinkel α abhängen, sodass wir das Volumen in Abhängigkeit davon optimieren können. Dazu müssen wir die Geometrie oben in Gleichungen übersetzen.

Zunächst wird im Bild des flachen Papiers links klar, wie der Kreisbogen b mit dem Zentriwinkel α zusammenhängt:

$$b = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot U = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi R = \alpha R$$

Dabei habe ich den Winkel α im Bogenmass angesetzt, sodass der Bruch $\frac{\alpha}{2\pi}$ für den zum Winkel α gehörenden Bruchteil des ganzen Kreises steht. Dieser Bruchteil muss mit dem Umkreis $U = 2\pi R$ des ganzen Kreises multipliziert werden, um den Bogen b zu erhalten.

Sobald wir das Papier zum Kreiskegel falten, wird erstens der Radius R des Papiers zur Mantellinie m des Kreiskegels, und zweitens wird der Bogen b zum Umfang u der kreisrunden Grundfläche. Letzteres bedeutet:

$$b = u \quad \Rightarrow \quad \alpha R = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r(\alpha) = \frac{\alpha R}{2\pi}$$

Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich auch h zuerst durch r und dann durch α ausdrücken:

$$h^2 = R^2 - r^2 = R^2 - \frac{\alpha^2 R^2}{4\pi^2} = \frac{R^2}{4\pi^2}\left(4\pi^2 - \alpha^2\right) \quad \Rightarrow \quad h(\alpha) = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

Mit den Ausdrücken $r(\alpha)$ und $h(\alpha)$ gehen wir in die Zielfunktion zurück:

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2(\alpha) \cdot h(\alpha) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{\alpha R}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

Um den für ein maximales Volumen optimalen Winkel α zu finden, können wir statt dieser Funktion auch ihr Quadrat $Q(\alpha) = V^2(\alpha)$ maximieren:

$$Q(\alpha) = V^2(\alpha) = \frac{R^6}{24^2\pi^4} \cdot \alpha^4\left(4\pi^2 - \alpha^2\right) = \frac{R^6}{24^2\pi^4} \cdot \left(4\pi^2\alpha^4 - \alpha^6\right)$$

$$\Rightarrow \quad Q'(\alpha) = \frac{R^6}{24^2\pi^4} \cdot \left(16\pi^2\alpha^3 - 6\alpha^5\right) = \frac{R^6}{24^2\pi^4} \cdot 6\alpha^3\left(\frac{8\pi^2}{3} - \alpha^2\right) \stackrel{!}{=} 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind $\alpha = 0$ und $\alpha = \pm\sqrt{\frac{8\pi^2}{3}} = \pm\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$.

Für den realen Winkel kommt nur die positive Lösung in Frage. Somit ist $\underline{\underline{\alpha = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}}}$ (im Bogenmass!).

Ersetzen wir 2π durch $360°$, so ergibt sich im Gradmass: $\alpha = 360° \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \underline{\underline{\sqrt{6} \cdot 120°}} \approx 294°$.