

Übungen zur Differentialrechnung

SERIE VIII: Optimierungsaufgaben

Klasse 155c / AGe

1. Aus einem rechteckigen Papier mit Länge 8 cm und Breite 5 cm schneide ich an den vier Ecken je ein gleich grosses Quadrat mit Seitenlänge x weg. Beim verbleibenden Stück falte ich die vier rechteckförmigen Seitenstücke hoch, sodass sich eine Schachtel ohne Deckel ergibt.

Wie gross ist x zu wählen, damit das Volumen der Schachtel maximal wird?

2. Einer Kugel mit Radius R wird ein Kreiskegel einbeschrieben.

Wie muss die Höhe des Kreiskegels gewählt werden, damit dessen Mantelfläche maximal wird?

Hinweis: Der Mantel eines Kreiskegels hat die Fläche $A = \pi r m$. Dabei ist r der Radius der Grundfläche und m die Länge einer sogenannten Mantellinie. Das ist eine gerade Strecke, die von irgendeinem Punkt auf dem Rand der Grundfläche zu Spitze des Kreiskegels führt.

Tipp: Zur Veranschaulichung hilft Abschnitt 8.3 im Skript.

3. Einer Kugel mit Radius R wird ein Zylinder mit maximaler Mantelfläche einbeschrieben.

Wie gross ist bei diesem Zylinder das Verhältnis "Höhe : Radius der Grundfläche"?

4. Ein Stück Draht wird in zwei Teile zerschnitten. Aus dem einen wird ein Kreis, aus dem anderen ein Quadrat geformt.

Wie verhalten sich die Längen der Drahtstücke zueinander, wenn der gemeinsame Flächeninhalt beider Figuren zusammen...?

(a) minimal werden soll?

(b) maximal werden soll?

5. Die Tragfähigkeit T eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt der Breite b und der Höhe h ist gegeben durch $T = k \cdot b \cdot h^2$. Dabei ist k eine Materialkonstante.

Wie muss man aus einem zylindrischen Baumstamm mit Querschittradius R einen solchen Balken ausschneiden, damit seine Tragfähigkeit möglichst gross wird?

6. Betrachte die Halbkreisfunktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Vom Punkt $P(x, f(x))$ aus werde das Lot auf die x -Achse gefällt (\rightarrow Fusspunkt A), ebenso vom Punkt $Q(-x, f(-x))$ aus (\rightarrow Fusspunkt B).

Wie ist x zu wählen, damit das Rechteck $APQB$ maximalen Flächeninhalt aufweist?

7. Es sei $f(x) = x^3 - 2x$.

Welche Punkte auf dem G_f haben (lokal) extreme Abstände vom Ursprung?

8. Ein Quader mit quadratischer Grundfläche werde einer Kugel mit Radius R einbeschrieben.

Wie lang muss die Grundkante des Quaders sein, wenn die Mantelfläche maximal werden soll?

9. Beweise: Der Würfel ist das Quader mit dem grössten Verhältnis "Volumen : Oberfläche".

10. Aus einem Kreis mit Radius r ist das Netz einer geraden quadratischen Pyramide auszuschneiden.

Wie lange ist die Kante der Grundseite der Pyramide zu wählen, wenn deren Volumen maximal sein soll, und welcher Anteil des Kreises wurde dann weggeschnitten?

11. Aus einem kreisförmigen Stück Papier wird ein Sektor mit dem Zentriwinkel α ausgeschnitten und daraus eine kegelförmige Tüte gebildet.

Für welchen Winkel α fasst die Tüte am meisten Inhalt?