Übungen zur Differentialrechnung – Lösungen Serie IX

1. *Kurvendiskussion einiger zusammengesetzter Funktionen*

$a(x) = e^{-x^2}$: Alle $x \in \mathbb{R}$ können problemlos in $a(x)$ eingesetzt werden. Wegen dem x^2 ist die Funktion, ihr Graph also symmetrisch zur y-Achse. Es gibt keine Nullstellen, denn die Exponentialfunktion e^y kann nicht den Wert 0 annehmen. Für $x \to \pm\infty$ strebt die Funktion gegen 0, ihr Graph also gegen die x-Achse.

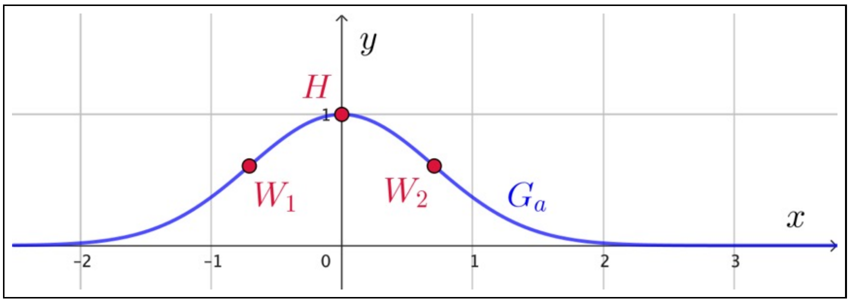
$$a'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{HS:} \quad x = 0 \quad \text{mit} \quad a(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad H(0,1)$$

$$a''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = -4e^{-x^2} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \text{WS:} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0.71 \qquad \text{mit} \quad a\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$$

$$\Rightarrow \quad W_{1/2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

Wir skizzieren den Graphen aufgrund dieser Informationen:



$b(x) = x \cdot e^{-x}$: Wieder lassen sich alle $x \in \mathbb{R}$ einsetzen. Es gibt genau eine NS bei $x = 0$, weil e^{-x} niemals gleich 0 sein kann. Für $x \to +\infty$ geht die Funktion gegen 0, denn die abfallende Exponentialfunktion e^{-x} dominiert über die ansteigende lineare Funktion x. Somit wird sich der Graph im positiv Unendlichen an die x-Achse anschmiegen. Anders für $x \to -\infty$. Hier strebt x gegen $-\infty$ und e^{-x} gegen $+\infty$. Das Produkt geht folglich gegen $-\infty$.

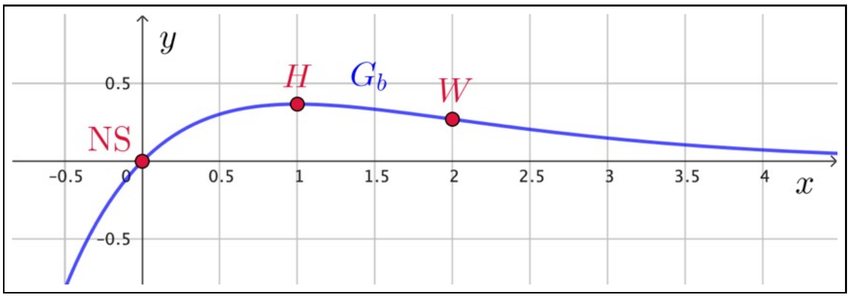
$$b'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(1 - x)$$

$$\Rightarrow \quad \text{HS:} \quad x = 1 \quad \text{mit} \quad b(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.37 \quad \Rightarrow \quad H\left(0, \frac{1}{e}\right)$$

$$b''(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x) + e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad \text{WS:} \quad x = 2 \quad \text{mit} \quad b(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0.27 \quad \Rightarrow \quad W\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$$

Nun skizzieren wir den Graphen:



$c(x) = \frac{2\ln x}{x}$**:** Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen $x \in \mathbb{R}^+$ definiert. Die einzige Nullstelle finden wir bei $x = 1$, denn dort nimmt der Zähler den Wert 0 an ($\ln 1 = 0$). Zudem hat die Funktion aufgrund des Nenners x bei $x = 0$ eine Polstelle. Der Graph muss rechts davon also aus dem positiv oder dem negativ Unendlichen ins Bild kommen. Für $x \to \infty$ verstehen wir, dass die Nennerfunktion x stärker anwächst als die Zählerfunktion $\ln x$. Somit wird sich der Graph nicht extrem schnell, aber schliesslich doch der x-Achse anschmiegen.

$$c'(x) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

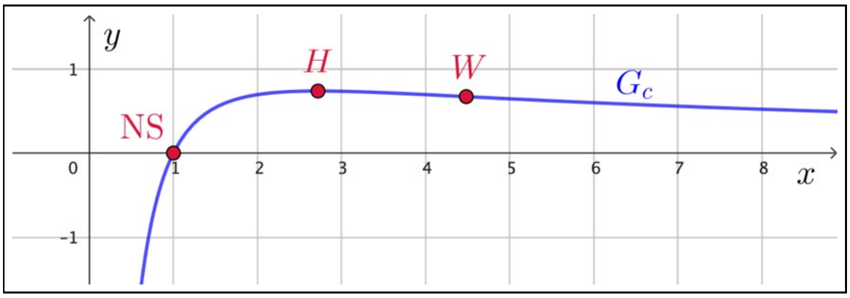
$$\Rightarrow \quad \text{HS:} \quad \ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e \quad \text{mit} \quad c(e) = \frac{2\ln e}{e} = \frac{2}{e} \quad \Rightarrow \quad H\left(e, \frac{2}{e}\right)$$

$$c''(x) = 2 \cdot \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = 2 \cdot \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = 2 \cdot \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

$$\Rightarrow \quad \text{WS:} \quad 2\ln x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{e}\right)^3 \approx 4.48$$

$$\text{mit} \quad c\left(\left(\sqrt{e}\right)^3\right) = \frac{2 \cdot \ln\left(\sqrt{e}\right)^3}{\left(\sqrt{e}\right)^3} = \frac{3}{\left(\sqrt{e}\right)^3} \approx 0.67 \quad \Rightarrow \quad W\left(\left(\sqrt{e}\right)^3, \frac{3}{\left(\sqrt{e}\right)^3}\right)$$

Für den Graphen ergibt sich folglich:



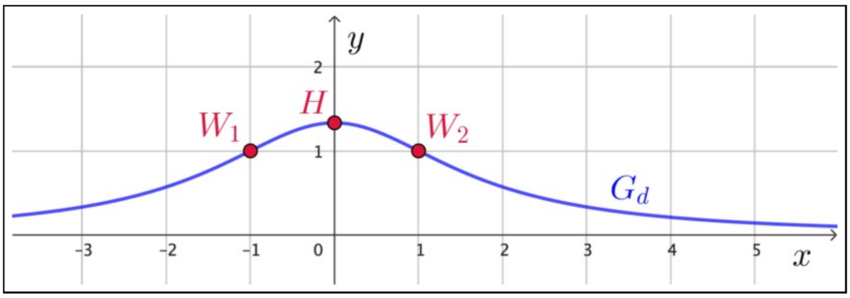
$d(x) = \frac{4}{x^2+3}$**:** Zähler und Nenner weisen keine Nullstellen auf. Es gibt somit keine Null- oder Polstellen und alle $x \in \mathbb{R}$ sind einsetzbar. Die Funktion ist wegen dem x^2 gerade, ihr Graph also symmetrisch zur y-Achse. Für $x \to \pm\infty$ wächst der Nenner ins Unendlich an, sodass die ganze Funktion gegen 0 strebt. Der Graph wird sich für $x \to \pm\infty$ an die x-Achse anschmiegen.

$$d'(x) = 4 \cdot \frac{-1}{(x^2+3)^2} \cdot 2x = \frac{-8x}{(x^2+3)^2} \quad \Rightarrow \quad \text{HS:} \quad x = 0 \quad \text{mit} \quad d(0) = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad H\left(0, \frac{4}{3}\right)$$

$$d''(x) = -8 \cdot \frac{1 \cdot (x^2+3)^2 - x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = -8 \cdot \frac{-3(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = 24 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$$\Rightarrow \quad \text{WS:} \quad x = \pm 1 \quad \text{mit} \quad d(1) = \frac{4}{1^2+3} = 1 \quad \Rightarrow \quad W_{1/2} = (\pm 1, 1)$$

Somit haben wir alles beisammen um den Graphen zu skizzieren:



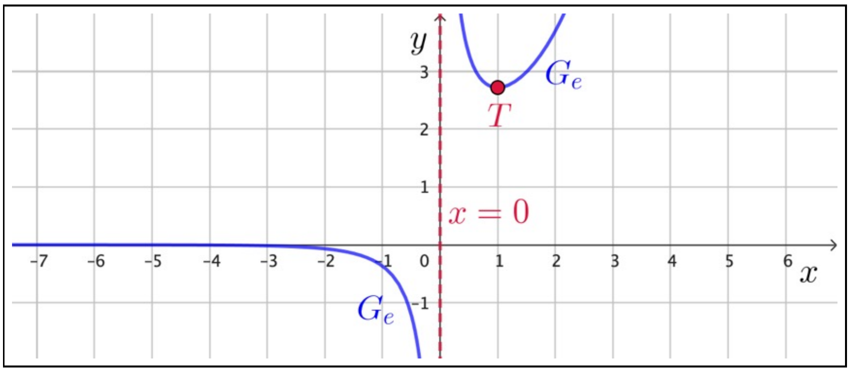
$e(x) = \frac{e^x}{x}$**:** Da der Zähler e^x keine Nullstellen hat, hat auch diese Funktion als ganzes keine. Dafür gibt es eine ungerade Polstelle bei $x = 0$. D.h., wir können alle x ausser $x = 0$ in die Funktion einsetzen. Im Unendlichen wird die Exponentialfunktion im Zähler über die lineare Funktion im Nenner dominieren. Für $x \to +\infty$ wird die Funktion ins Unendliche ansteigen. Für $x \to -\infty$ strebt die Funktion umgekehrt gegen 0 und der Graph schmiegt sich an die x-Achse an.

$$e'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{HS:} \quad x = 1 \quad \text{mit} \quad e(1) = e \approx 2.72 \quad \Rightarrow \quad T(1, e)$$

$$e''(x) = \frac{\big(e^x(x-1) + e^x \cdot 1\big) \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x \cdot x^3 - e^x \cdot 2x^2 + e^x \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \text{keine WS, weil:} \quad D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 < 0$$

Aufgrund der Polstelle hat der Graph zwei Äste. Dieser Umstand erlaubt, dass es keine Wendestelle gibt, obwohl der Graph links von 0 eine Rechtskurve und rechts von 0 eine Linkskurve beschreibt:



$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$**:** Es gibt eine Nullstelle bei $x = 0$, weil dort der Zähler gleich 0 ist. Der Nenner ist stets positiv. Alle $x \in \mathbb{R}$ lassen sich einsetzen. Für $x \to \pm\infty$ schmiegt sich der Graph an die x-Achse, weil die quadratische Funktion im Nenner über die lineare Funktion im Zähler dominiert. Da der Nenner stets positiv ist, definiert der Zähler das Vorzeichen des Funktionswertes. Rechts von $x = 0$ hat die Funktion positive Werte, links davon hingegen negative. Insgesamt ist die Funktion ungerade, der Graph also punksymmetrisch zum Ursprung, weil die Zählerfunktion $2x$ ungerade und die Nennerfunktion $x^2 + 1$ gerade ist ("ungerade" : "gerade" = "ungerade").

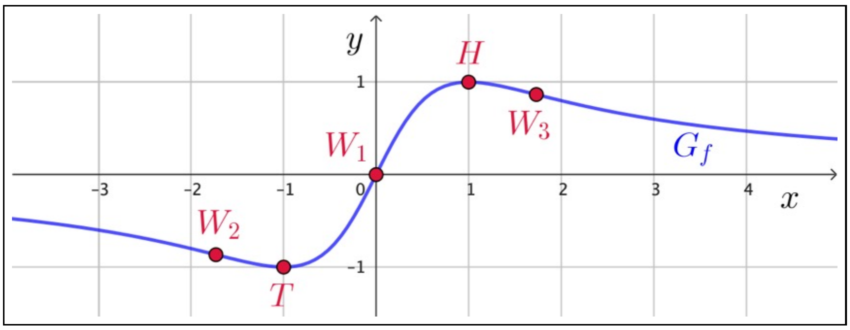
$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 2 \cdot \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} = 2 \cdot \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{HS:} \quad x = \pm 1 \quad \text{mit} \quad f(\pm 1) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad T(-1, -1) \quad \text{und} \quad H(1, 1)$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{-2x \cdot (x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = 2 \cdot \frac{-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$= 4 \cdot \frac{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3} \quad \Rightarrow \quad \text{WS:} \quad x = 0, \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73 \quad \text{mit} \quad f(0) = 0$$

$$\text{und} \quad f\big(\pm\sqrt{3}\big) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.87 \quad \Rightarrow \quad W_1(0, 0) \quad \text{und} \quad W_{2/3}\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



$g(x)=\sqrt{e}\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$**:** Die Exponentialfunktion $e^{-x^2/2}$ liefert keine Nullstelle. Es gibt nur die eine Nullstelle $x=0$. Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$. Im Unendlichen dominiert wieder die abfallende Exponentialfunktion und der Graph schmiegt sich an die x-Achse an. Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn wir multiplizieren die ungerade Funktion x mit der geraden Funktion $e^{-x^2/2}$.

$$g'(x)=\sqrt{e}\left(1\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)\right)=\sqrt{e}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-x^2\right)=\sqrt{e}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x)(1+x)$$

$$\Rightarrow\quad \text{HS:}\quad x=\pm 1\quad\text{mit}\quad g(\pm 1)=\pm\sqrt{e}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=\pm 1\quad\Rightarrow\quad T(-1,-1)\quad\text{und}\quad H(1,1)$$

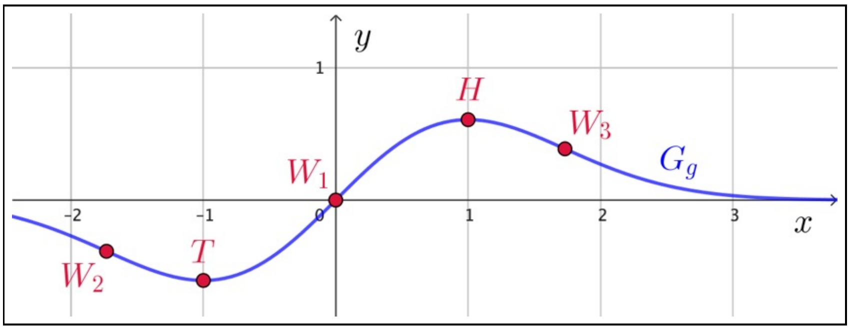
$$g''(x)=\sqrt{e}\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)\cdot\left(1-x^2\right)+e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-2x)\right)=\sqrt{e}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^3-3x\right)$$

$$=\sqrt{e}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \text{WS:}\quad x=0,\pm\sqrt{3}\approx\pm 1.73\quad\text{mit}\quad g(0)=0\quad\Rightarrow\quad W_1(0,0)$$

$$\text{und}\quad g\left(\pm\sqrt{3}\right)=\pm\sqrt{e}\cdot\sqrt{3}\cdot e^{-\frac{3}{2}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{e}\approx\pm 0.64\quad\Rightarrow\quad W_{2/3}\left(\pm\sqrt{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{e}\right)$$

Es ergibt sich ein ähnlicher Graph wie bei $f(x)$. Dieser hier geht allerdings aufgrund der quadratisch abfallenden Exponentialfunktion $e^{-x^2/2}$ schneller gegen die x-Achse:



$h(x)=\frac{x}{\ln x}$**:** Der Logarithmus im Nenner ist nur für $x>0$ definiert. Ausserdem ist $\ln 1=0$. $x=1$ ist also eine Polstelle und die Funktion existiert nur auf $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$. Im Intervall $]0;1[$ ist die Funktion negativ, weil $\ln x$ hier negativ und der Zähler x positiv ist. Rechts von $x=1$ ist die Funktion positiv und für $x\to+\infty$ geht sie ins positiv Unendliche, weil x schneller anwächst als $\ln x$.

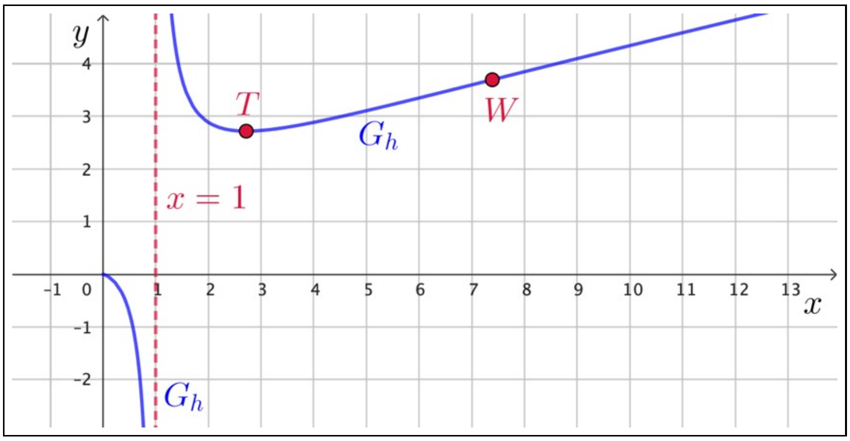
$$h'(x)=\frac{1\cdot\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow\quad \text{HS:}\quad \ln x=1\quad\Rightarrow\quad x=e\quad\text{mit}\quad h(e)=\frac{e}{\ln e}=e\approx 2.72\quad\Rightarrow\quad T(e,e)$$

$$h''(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^2-(\ln x-1)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^4}=\frac{\ln x-2(\ln x-1)}{x(\ln x)^3}=\frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$$

$$\Rightarrow\quad \text{WS:}\quad \ln x=2\quad\Rightarrow\quad x=e^2\quad\text{mit}\quad h\left(e^2\right)=\frac{e^2}{2}\approx 3.69\quad\Rightarrow\quad W\left(e^2,\frac{e^2}{2}\right)$$

Der Graph wird auf der nächsten Seite oben gezeigt. Die Grenzbereiche vorauszusagen ist heikel. Grundsätzlich muss man wissen, dass x über $\ln x$ dominiert. Das gilt sowohl für $x\to 0$, wie auch für $x\to\infty$. So kommt es, dass der Graph links in Richtung Ursprung läuft und nicht etwa aus dem negativ Unendlichen ins Bild tritt. Und rechts verstehen wir das sehr gemächliche, aber eben doch vorhandene "ins Unendliche gehen": Rechts von W haben wir eine ständige Rechtskurve, die aber so schwach wird, dass der Graph dennoch jede beliebige y-Höhe erreicht.



$i(x) = \frac{1}{2x} + \sqrt{x}$**:** Aufgrund der Wurzel sind nur positive Werte $x \in \mathbb{R}^+$. Der Randwert $x = 0$ kommt aufgrund von $\frac{1}{2x}$ ebenfalls nicht in Frage. Für $x \to 0$ wird der Funktionsgraph ins positiv Unendliche verschwinden. Für $x \to +\infty$ gilt dies ebenso, denn zwar geht $\frac{1}{2x}$ gegen 0, aber hinzu addierte die Wurzel wächst trotzdem ohne Beschränkung weiter an.

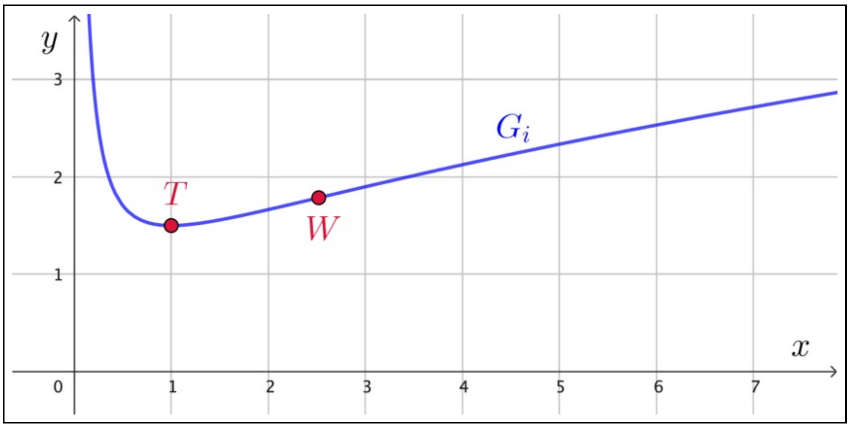
$$i'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1 + x\sqrt{x}}{2x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{HS:} \quad x\sqrt{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{mit} \quad i(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad T\left(1, \frac{3}{2}\right)$$

$$i''(x) = \frac{2}{2x^3} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{4 - x\sqrt{x}}{4x^3} \quad \Rightarrow \quad \text{WS:} \quad x\sqrt{x} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{2} \approx 2.52$$

$$\text{mit} \quad i\left(2\sqrt[3]{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt[3]{2}} + \sqrt{2\sqrt[3]{2}} \approx 1.79 \quad \Rightarrow \quad W \approx (2.52, 1.79)$$

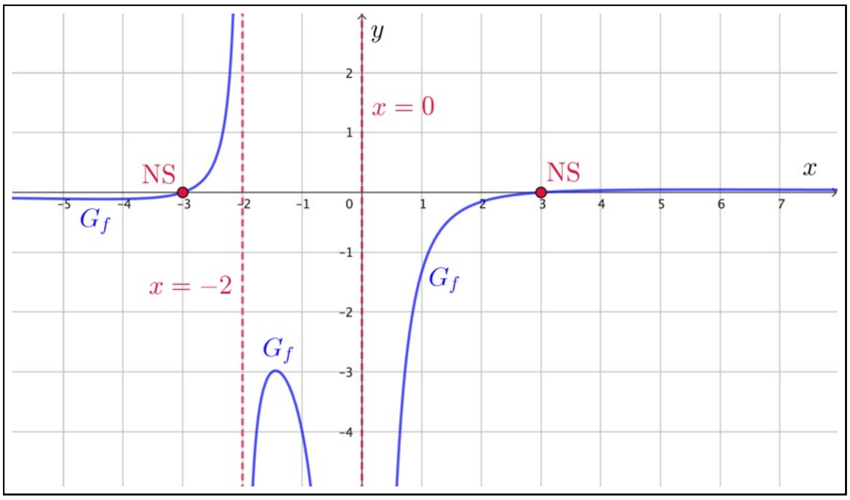
Nun können wir skizzieren:



2. Zunächst faktorisieren wir:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x^3 + 4x^2} = \frac{(x+3)(x-3)}{2x^2(x+2)}$$

Somit gibt es zwei einfache Nullstellen bei $x = \pm 3$, eine doppelte Polstelle bei $x = 0$ und eine einfache Polstelle bei $x = -2$. Das Nennerpolynom hat den höheren Grad als das Zählerpolynom. Damit schmiegt sich der Graph für $x \to \pm\infty$ an die x-Achse. Für $x = -4$ erhalten wir – am einfachsten sichtbar durch Einsetzen in die faktorisierte Form – einen positiven Zähler und einen negativen Nenner, also insgesamt einen negativen Funktionswert. Somit muss der Graph bei der Nullstelle $x = -3$ vom Negativen ins Positive wechseln und bei der Polstelle $x = -2$ ins positiv Unendliche verschwinden. Danach taucht er aus dem negativ Unendlichen wieder auf (ungerade Polstelle) und verschwindet bei $x = 0$ auch wieder ins negativ Unendliche, denn zwischen $x = -2$ und $x = 0$ gibt es ja keine Nullstellen. Rechts von $x = 0$ erscheint der Graph wieder aus dem negativ Unendlichen (gerade Polstelle), durchquert dann die x-Achse bei der zweiten Nullstelle $x = 3$ und legt sich dann von oben her an die x-Achse:



3. Zunächst gilt es die Tangente t an den G_f im Punkt B in Abhängigkeit von x_0 zu bestimmen. Wir leiten ab und ermitteln die Steigung m_t der Tangente t:

$$f(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x} \quad \Rightarrow \quad m_t = f'(x_0) = -e^{-x_0}$$

Der Punkt B sitzt auf dem G_f hat folglich die Koordinaten $B(x_0, e^{-x_0})$. Damit können wir für die Tangente t schreiben:

$$t(x) = m_t(x - x_B) + y_B = -e^{-x_0}\big(x - x_0\big) + e^{-x_0}$$

Die Tangente t schneidet die x-Achse an der Stelle x_1. D.h., $t(x_1) = 0$. Daraus folgern wir:

$$t(x_1) = -e^{-x_0}\big(x_1 - x_0\big) + e^{-x_0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x_0} = e^{-x_0}\big(x_1 - x_0\big)$$

Wir teilen durch e^{-x_0} und erhalten: $\Delta x = x_1 - x_0 = 1$. Die Stelle x_1 ist also immer um $\Delta x = 1$ weiter rechts auf der x-Achse als x_0, egal wie x_0 gewählt wird. `q.e.d.`

4. Zuerst leiten wir zweimal ab:

$$f(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{x^3}$$

Für Stellen mit Rechtskrümmung muss gelten: $f''(x) < 0$. Daraus folgern wir (unter der Voraussetzung):

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{x^3} \stackrel{!}{<} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} < \frac{2}{x^3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{8}{x^3}$$

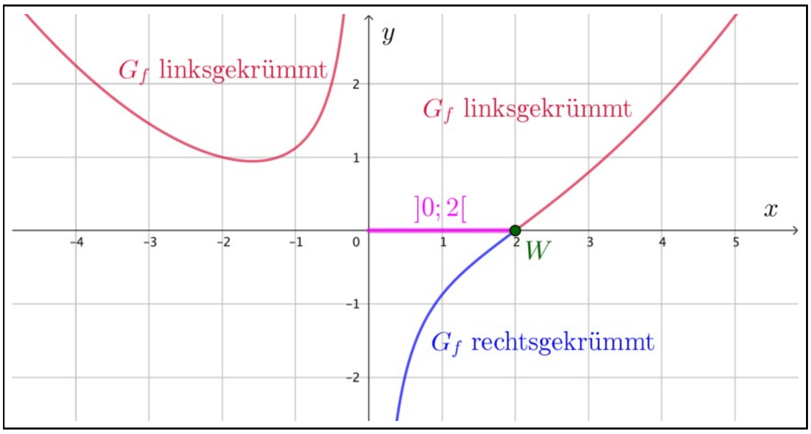
Wir unterscheiden:

- Für alle negativen x ist dies sicher falsch, denn dann ist $x^3 < 0$ und somit auch $\frac{8}{x^3} < 0 < 1$.
- $x = 0$ geht sowieso nicht, weil es sich dabei um eine Polstelle der Funktion handelt.

Es kommen somit also ausschliesslich positive Zahlen in Frage! Ausgehend von dieser Feststellung können wir nun weiterrechnen:

$$1 < \frac{8}{x^3} \quad \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \quad x^3 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

Damit haben wir die Lösung gefunden: Für alle $\underline{\underline{x \in]0;2[}}$ ist der Graph von $f(x)$ rechtsgekrümmt. Oben auf der nächsten Seiten habe ich ihn zur Verdeutlichung abgebildet.



5. Als Erstes leiten wir ab und ermitteln die Tangentensteigung m:

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{3}{x^4} \quad \Rightarrow \quad m = f'(x_P) = -\frac{3}{x_P^4}$$

Für die Steigungen zweier zueinander senkrecht stehender Geraden gilt stets

$$m \cdot m_\perp = -1$$

und somit folgt für die Steigung von $t_\perp$:

$$m_\perp = -\frac{1}{m} = \frac{x_P^4}{3}$$

Mit den Koordinaten von P, also mit $P(x_P, \frac{1}{x_P^3})$, notieren wir für die Gleichung der Senkrechten $t_\perp$:

$$t_\perp(x) = m_\perp(x - x_P) + y_P = \frac{x_P^4}{3}(x - x_P) + \frac{1}{x_P^3}$$

Soll $t_\perp$ durch den Ursprung verlaufen, so muss $t_\perp(0) = 0$ sein. Daraus schliessen wir auf x_P:

$$t_\perp(0) = \frac{x_P^4}{3}(0 - x_P) + \frac{1}{x_P^3} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_P^5}{3} = \frac{1}{x_P^3} \quad \Rightarrow \quad x_P^8 = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_P = \pm\sqrt[8]{3}}}$$

Bemerke: Der G_f hat auch einen negativen Ast, der in der Grafik in der Aufgabenstellung nicht zu sehen ist. Der Punkt P kann aber ebenso gut dort drauf liegen. Wegen der Punktsymmetrie des G_f liegen die beiden Lösungen symmetrisch zum Ursprung.

6. In der Grafik entdecken wir:

   - Doppelte Nullstelle bei $x = -2$, einfache Nullstelle bei $x = 1$.
   - Gerade Polstelle bei $x = -1$, ungerade Polstelle bei $x = 2$.
   - Horizontale Asymptote auf der Höhe $y = -2$.

   Diese drei Aspekte lassen sich in einem Bruch vereinen:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{-2(x+2)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-2)}}}$$

7. Damit das Volumen der Rinne maximal wird, muss die Querschnittsfläche A möglichst gross sein. Diese Trapezfläche dient uns also als Zielfunktion. Wir notieren (Trapezformel $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ mit $a = 20$ und $c = 20 + 2u$):

$$A(u,h) = \frac{20 + (20 + 2u)}{2} \cdot h = (20 + u) \cdot h$$

Im rechtwinkligen Dreieck folgt mit dem Satz des Pythagoras:

$$h^2 = 20^2 - u^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{20^2 - u^2}$$

Damit schreiben wir die Zielfunktion, resp. ihr Quadrat neu:

$$A(u) = (20 + u) \cdot \sqrt{20^2 - u^2} \quad \text{resp.} \quad Q(u) = A^2(u) = (20 + u)^2(20^2 - u^2) = (20 + u)^3(20 - u)$$

Nun optimieren wir, indem wir die Ableitung gleich 0 setzen:

$$\begin{aligned} Q'(u) &= 3(20 + u)^2(20 - u) - (20 + u)^3 = (20 + u)^2\big(3(20 - u) - (20 + u)\big) \\ &= (20 + u^2)(40 - 4u) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad u = 10 \end{aligned}$$

Somit folgt für die Breite oben: $c = 20 + 2u = 20 + 20 = \underline{\underline{40\,\mathrm{cm}}}$.

8. Die Zielfunktion ist die Oberfläche ohne Deckel $\rightarrow A$. Sie soll minimal werden! Wir notieren dafür:

$$A(r,h) = G + M = \pi r^2 + 2\pi r h$$

Als Nebenbedingung fordert die Aufgabenstellung das konstante Volumen 1, also:

$$V = Gh = \pi r^2 h \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Damit wird die Oberfläche zu:

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r h(r) = \pi r^2 + \frac{2\pi r}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2}{r}$$

Jetzt leiten wir diese Zielfunktion nach r ab:

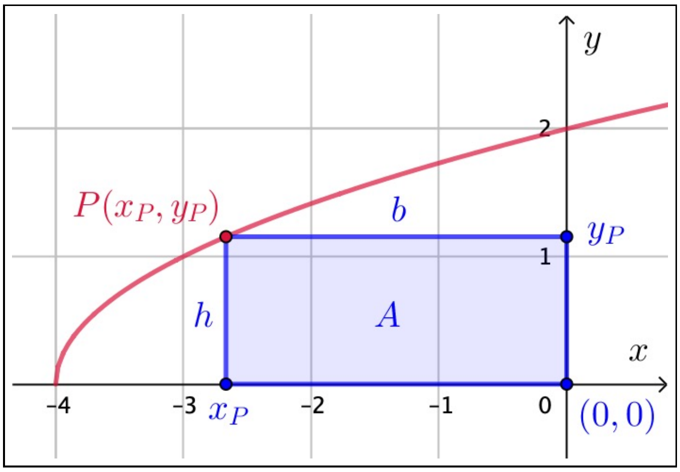
$$A'(r) = 2\pi r - \frac{2}{r^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi r = \frac{2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{1}{\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Zum Schluss finden wir für das optimale Verhältnis aus Höhe und Radius:

$$h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi^3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = r \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h : r = 1 : 1}}$$

Es handelt sich eher um eine flache Dose, deren Durchmesser $d = 2r$ doppelt so gross ist wie die Höhe.

9. (a) Es handelt sich um eine um vier Einheiten nach links verschobene Wurzelfunktion:



(b) Die Rechtecksfläche ist unsere Zielfunktion:

$$A(b,h) = b \cdot h$$

Die Breite b des Rechtecks entspricht dem Betrag der x-Koordinate des Punktes P. Da x_P negativ sein soll, können wir schreiben: $b = |x_P| = -x_P$.

Die Höhe h des Rechtecks entspricht dem Betrag der y-Koordinate von P. Im 2. Quadranten ist y_P ein positiver Wert, sodass folgt: $h = |y_P| = y_P = f(x_P) = \sqrt{x_P + 4}$.

Damit lautet die Zielfunktion in Abhängigkeit von x_P:

$$A(x_P) = b(x_P) \cdot h(x_P) = -x_P \cdot \sqrt{x_P + 4}$$

Um die Ableitung der Wurzel zu vermeiden, betrachten wir davon das Quadrat:

$$Q(x_P) = A^2(x_P) = x_P^2(x_P + 4) = x_P^3 + 4x_P^2$$

Nun leiten wir ab und bestimmen die Maximalstelle(n):

$$Q'(x_P) = 3x_P^2 + 8x_P = x_P(3x_P + 8) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_P = 0 \quad \text{oder} \quad x_P = -\frac{8}{3}$$

Nur die negative Lösung liegt im Attraktivitätsintervall: $-\frac{8}{3} \in \,]-4; 0[\; \Rightarrow \underline{\underline{x_P = -\frac{8}{3}}}$.

N.B.: Die maximale Fläche beträgt:

$$A\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{-\frac{8}{3} + 4} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{-8+12}{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{8 \cdot 2}{3\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$