Übungen zur Differentialrechnung – Lösungen Serie D

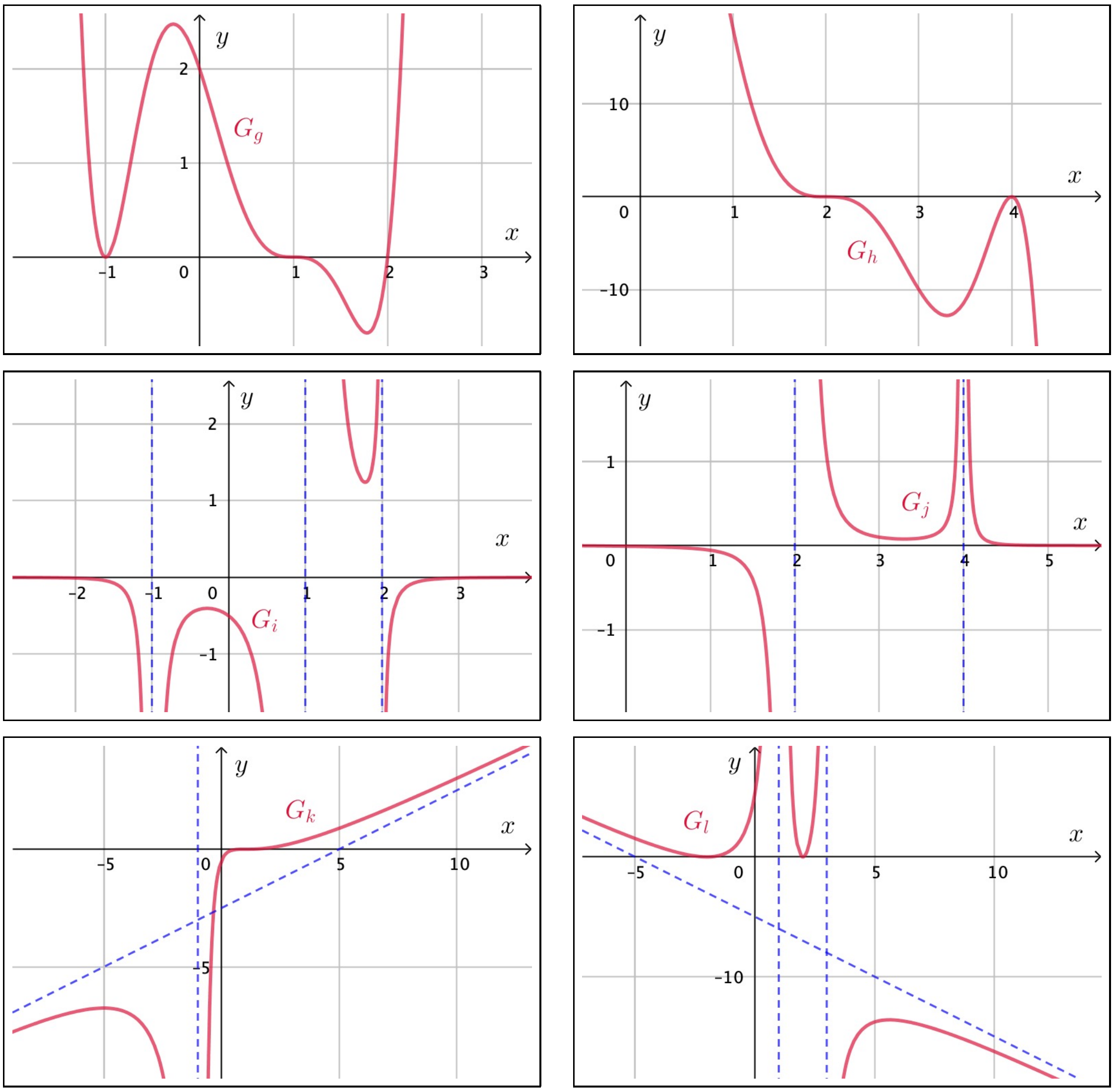
1. Für die Faktorisierungen ergibt sich:

$$a(x) = (x+5)\,(x-2)\,(x-4) \qquad b(x) = 2\,(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)^2$$

$$c(x) = (x+2)\,(x+1)^3\,(x-1) \qquad d(x) = (x+1)\left(x-2+\sqrt{3}\right)\left(x-2-\sqrt{3}\right)$$

$$e(x) = 2\,(x+2)\,(x-2)\left(x^2-\frac{3}{2}\,x+1\right) \qquad m(x) = (x-1)^4\,(x^2-x+2)$$

2. Ich zeige zuerst die sechs Funktionsgraphen. Entscheidend für die selber gezeichneten Lösungen sind die grafischen Qualitäten der Null- und Polstellen, sowie bei $k(x)$ und $l(x)$ die Lage der Asymptoten:



Bei $k(x)$ und $l(x)$ ergeben sich lineare Asymptoten durch Polynomdivision:

$$k(x) = \left(x^3-3x^2+3x-1\right) : \left(2x^2+4x+2\right) = \underline{\frac{1}{2}\,x-\frac{5}{2}} + R(x)$$

$$l(x) = \left(-x^4+8x^2-16\right) : \left(x^3-5x^2+7x-3\right) = \underline{-x-5} + R(x)$$

Bemerke: Hier muss man die Polynomdivision nicht bis zuende ausführen. Sobald der Asymptotenterm steht, ist man fertig.

3. Die Ableitung der Scheitelpunktform liefert mit der Kettenregel:

$$f(x) = a(x-u)^2 + v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot 2(x-u) \cdot 1 + 0 = 2a(x-u)$$

Wir sehen direkt, dass $x = u$ die einzige Nullstelle dieser Ableitung und somit die einzige Horizontalstelle von $f(x)$ ist. Es muss sich um die x-Koordinate des Scheitelpunktes der zugehörigen Parabel handeln.

4. $m(x):\ m(x) = \frac{24x-72}{x^2} = \frac{24(x-3)}{x^2}$ ist ein reiner Restterm!

$\Rightarrow$ Einfache NS bei $x_1 = 3$, zweifache PS, also gerader Pol bei $x_2 = 0$

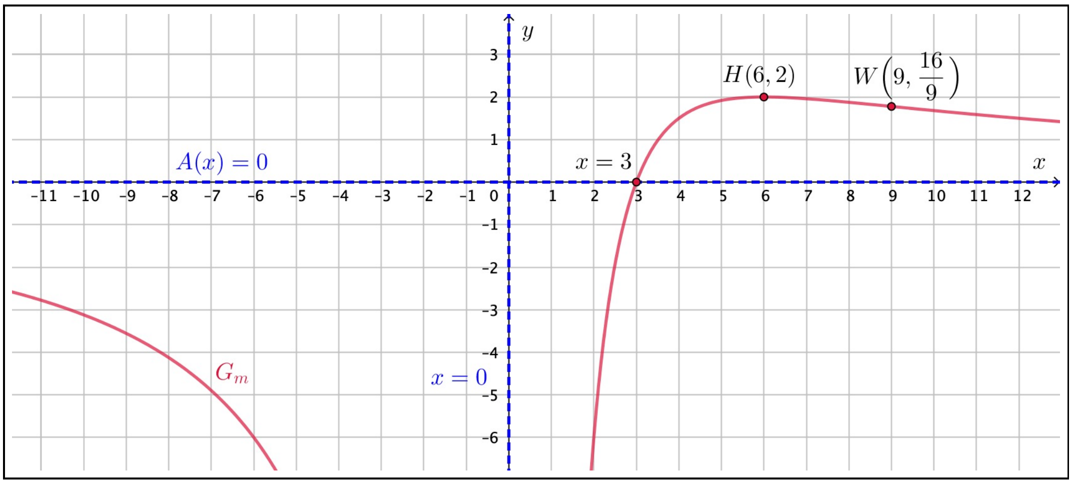
$\Rightarrow A(x) = 0$ (x-Achse), da Zählergrad $<$ Nennergrad

$m'(x) = 24 \cdot \frac{x^2-(x-3)\cdot 2x}{x^4} = 24 \cdot \frac{x-2\,(x-3)}{x^3} = 24 \cdot \frac{6-x}{x^3} \Rightarrow$ HS bei $x_3 = 6$

$m''(x) = 24 \cdot \frac{-x^3-(6-x)\cdot 3x^2}{x^6} = 24 \cdot \frac{-x-3\,(6-x)}{x^4} = 24 \cdot \frac{2x-18}{x^3} = 48 \cdot \frac{x-9}{x^3} \Rightarrow$ WS bei $x_4 = 9$

$m''(6) = \frac{48\cdot(-3)}{6^3} < 0$ und $m(6) = 2 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(6,2)$

$m(9) = \frac{16}{9} \Rightarrow$ Wendepunkt $W(9, \frac{16}{9})$



$n(x):\ n(x) = \frac{x^2}{3x-9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{x-3} = \frac{1}{3}x + 1 + \frac{3}{x-3}$

$\Rightarrow$ Doppelte NS bei $x_1 = 0$, einfache Polstelle, also ungerader Pol bei $x_2 = 3$

$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{3}x + 1 \rightarrow$ Gerade mit Steigung $\frac{1}{3}$ und y-Achsenabschnitt 1

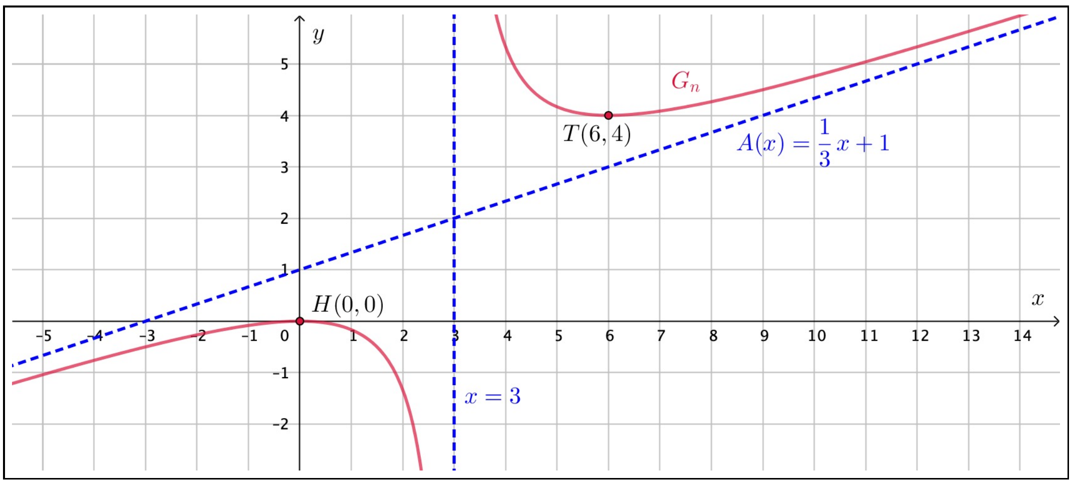
$n'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x(x-3)-x^2}{(x-3)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x^2-6x-x^2}{(x-3)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2-6x}{(x-3)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$

$\Rightarrow$ HS bei $x_1 = 0$ und $x_3 = 6$

$n''(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2x-6)(x-3)-2(x^2-6x)}{(x-3)^3} = \ldots = \frac{6}{(x-3)^3} \Rightarrow$ keine WS!

$n''(0) = \frac{6}{-27} < 0$ und $n(0) = 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(0,0)$

$n''(6) = \frac{6}{27} > 0$ und $n(6) = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(6,4)$



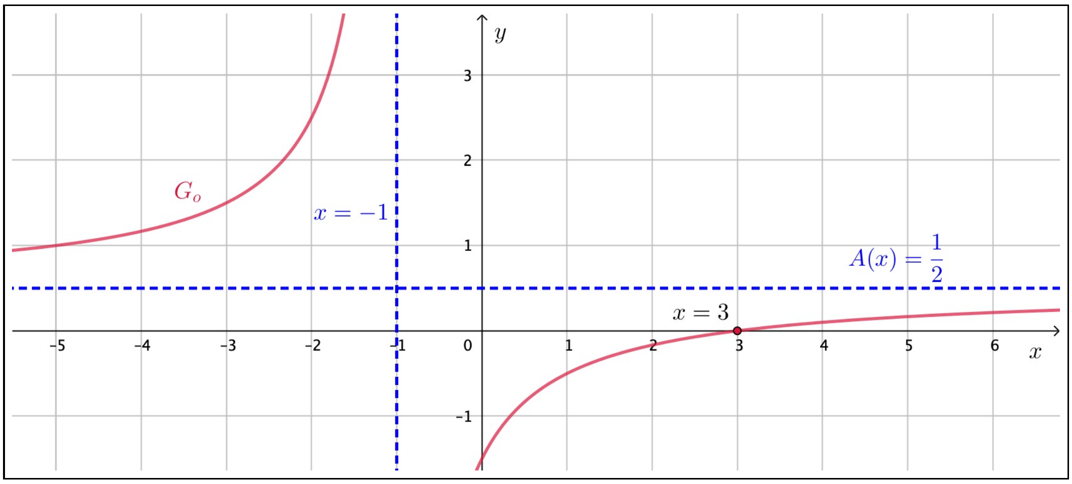
$o(x):\ o(x) = \frac{x^2-4x+3}{2x^2-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)\,(x-3)}{(x+1)\,(x-1)} = \frac{x-3}{x+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x+1}$ ($x = \pm 1$ verboten!)

$\Rightarrow$ Einfache NS bei $x_1 = 3$, einfache PS, also ungerader Pol bei $x_2 = -1$

$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{2}$ (Horizontale), da Zählergrad $=$ Nennergrad

$o'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1-(x-3)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \neq 0 \Rightarrow$ keine HS!

$o''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3} \neq 0 \Rightarrow$ keine WS!



$p(x):\ p(x) = \frac{x^3}{8x-8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{x-1}$

$\Rightarrow$ Dreifache NS bei $x_1 = 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt $SP(0,0)$, einfache PS (ungerader Pol) bei $x_2 = 1$

$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{8}\,x + \frac{1}{8} \rightarrow$ Parabel mit Öffnung $\frac{1}{8}$ und Scheitel bei $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{32})$

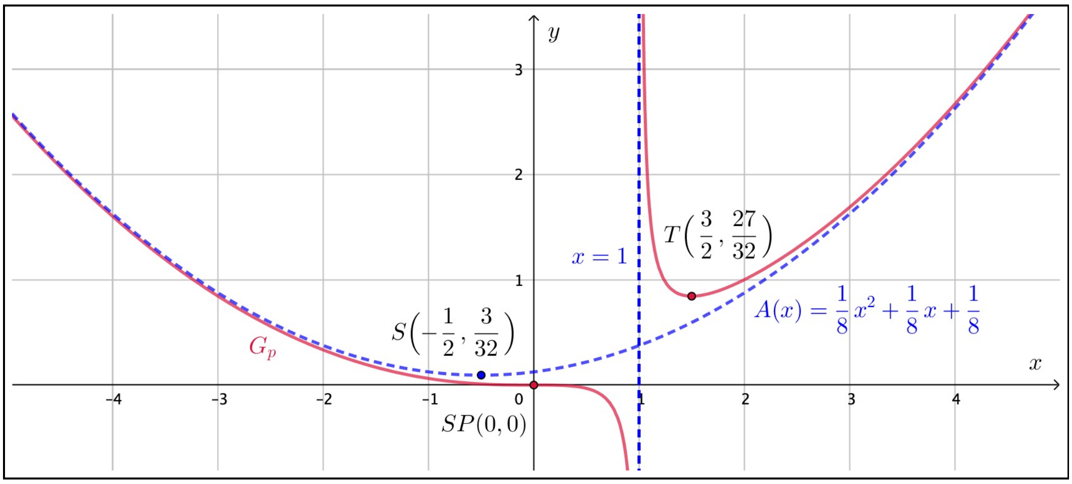
$p'(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3x^3-3x^2-x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow$ HS bei $x_1 = 0$ und $x_3 = \frac{3}{2}$

$p''(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{(6x^2-6x)(x-1)^2-(2x^3-3x^2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(6x^2-6x)(x-1)-2(2x^3-3x^2)}{(x-1)^3} = \ldots = \frac{1}{4} \cdot \frac{x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}$

$\Rightarrow$ WS bei $x_1 = 0$, $x^2 - 3x + 3$ hat $D < 0 \Rightarrow$ keine weitere WS!

$p''(x)$ besteht für $x > 1$ aus lauter positiven Faktoren $\Rightarrow p''(\frac{3}{2}) > 0$ und $p(\frac{3}{2}) = \frac{27}{32} \Rightarrow T(\frac{3}{2}, \frac{27}{32})$



$q(x):\ q(x)=\frac{x^2-4x+3}{2x^2-8x-10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x-5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)\,(x-3)}{(x+1)\,(x-5)}=\frac{1}{2}+\frac{4}{x^2-4x-5}$

$\Rightarrow$ Einfache NS bei $x_1=1$ und $x_2=3$, einfache PS bei $x_3=-1$ und $x_4=5$

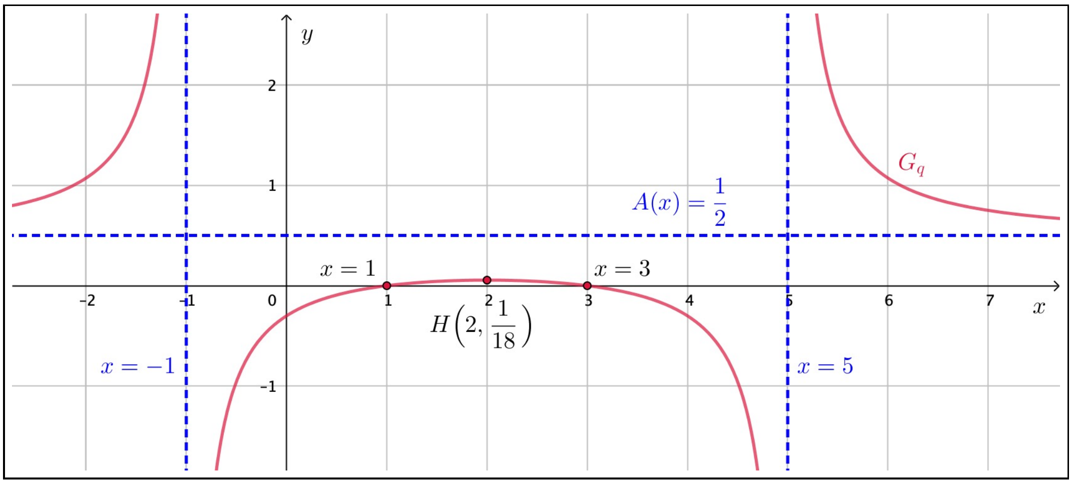
$\Rightarrow A(x)=\frac{1}{2}$ (Horizontale), da Zählergrad = Nennergrad

$q'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-4)\,(x^2-4x-5)-(x^2-4x+3)\,(2x-4)}{(x^2-4x-5)^2}=\ldots=-8\cdot\frac{x-2}{(x^2-4x-5)^2}\Rightarrow$ HS bei $x_5=2$

$q''(x)=-8\cdot\frac{(x^2-4x-5)^2-(x-2)\cdot 2(x^2-4x-5)\cdot(2x-4)}{(x^2-4x-5)^4}=-8\cdot\frac{(x^2-4x-5)-2(x-2)\,(2x-4)}{(x^2-4x-5)^3}$

$=\ldots=\frac{24\,(x^2-4x+7)}{(x^2-4x-5)^3}\Rightarrow$ keine Wendestelle, da $D=b^2-4ac=16-28<0$

$q''(2)=-\frac{8}{81}<0$ und $q(2)=\frac{1}{18}\Rightarrow$ Hochpunkt $H(2,\frac{1}{18})$



$r(x):\ r(x)=\frac{10x^2-60x+80}{4x^2-28x+49}=10\cdot\frac{x^2-6x+8}{4x^2-28x+49}=10\cdot\frac{(x-2)\,(x-4)}{(2x-7)^2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{(x-2)\,(x-4)}{(x-\frac{7}{2})^2}=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{4x-17}{4x^2-28x+49}$

$\Rightarrow$ Einfache NS bei $x_1=2$ und $x_2=4$, sowie doppelte (gerade) PS bei $x_3=\frac{7}{2}$

$\Rightarrow A(x)=\frac{5}{2}$ (Horizontale), da Zählergrad = Nennergrad

$r'(x)=10\cdot\frac{(2x-6)(4x^2-28x+49)-(x^2-6x+8)(8x-28)}{(4x^2-28x+49)^2}=20\cdot\frac{(x-3)(4x^2-28x+49)-(x^2-6x+8)(4x-14)}{(4x^2-28x+49)^2}$

$=20\cdot\frac{4x^3-28x^2+49x-12x^2+84x-147-4x^3+14x^2+24x^2-84x-32x+112}{(4x^2-28x+49)^2}=20\cdot\frac{-2x^2+17x-35}{(4x^2-28x+49)^2}$

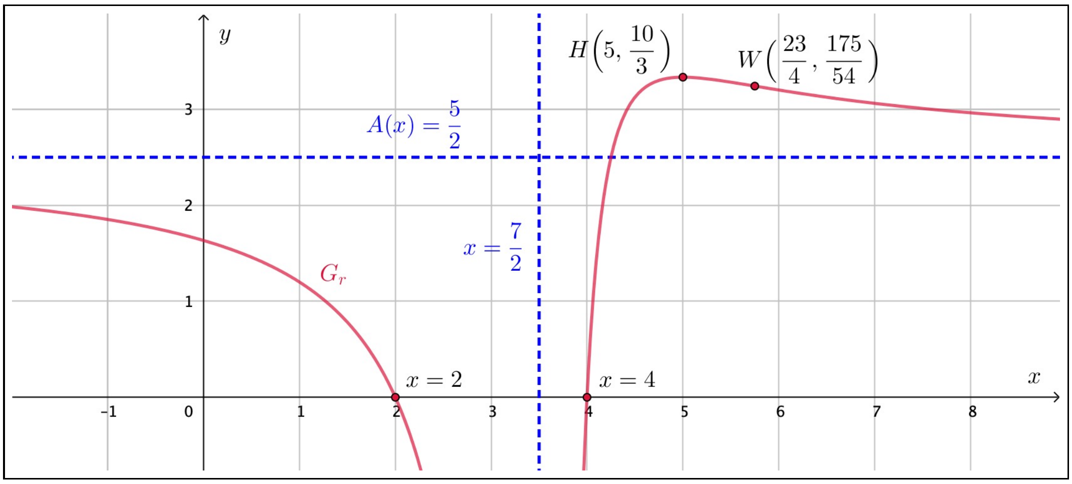
$=-20\cdot\frac{(2x-7)(x-5)}{(4x^2-28x+49)^2}=-20\cdot\frac{(2x-7)(x-5)}{(2x-7)^4}=-20\,\frac{x-5}{(2x-7)^3}\Rightarrow$ HS bei $x_4=5$

$r''(x)=-20\cdot\frac{(2x-7)^3-(x-5)\cdot 3(2x-7)^2\cdot 2}{(2x-7)^6}=-20\cdot\frac{(2x-7)-6(x-5)}{(2x-7)^4}=-20\cdot\frac{2x-7-6x+30}{(2x-7)^4}=20\cdot\frac{4x-23}{(2x-7)^4}$

$\Rightarrow$ WS bei $x_5=\frac{23}{4}$

$r''(5)=20\cdot\frac{20-23}{(10-7)^4}<0$ und $n(5)=\ldots=\frac{10}{3}=3.\overline{3}\Rightarrow$ Hochpunkt $H(5,\frac{10}{3})$

$r(\frac{23}{4})=\ldots=\frac{175}{54}\approx 3.2\Rightarrow$ Wendepunkt $W(\frac{23}{4},\frac{175}{54})$



5. Dank unserem Wissen zur Differentialrechnung sind beide Beweise gar nicht so kompliziert:

   (a) Für $f(x)$ mit der zweifachen Nullstelle x_1 schreiben wir:

   $$f(x) = (x - x_1)^2 \cdot g(x) \qquad \text{mit} \quad g(x_1) < 0$$

   Eine notwendige Bedingung für eine Extremalstelle lautet: $f'(x_1) = 0$. Gleichzeitig muss aber auch gelten: $f''(x_1) < 0$, damit es sich bei der Horizontalstelle um ein lokales Maximum handelt. Zunächst leiten wir mittels Produkt- und Kettenregel ab:

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - x_1) \cdot 1 \cdot g(x) + (x - x_1)^2 \cdot g'(x) \\ &= (x - x_1) \cdot 2g(x) + (x - x_1)^2 \cdot g'(x) \\ &= (x - x_1) \cdot \big(2g(x) + (x - x_1) \cdot g'(x)\big) \end{aligned}$$

   Wie erwartet lässt sich aus der 1. Ableitung eine Nullstellenklammer $(x - x_1)$ ausklammern. x_1 ist also eine Nullstelle der 1. Ableitung und somit ganz bestimmt eine Horizontalstelle von $f(x)$. Nun müssen wir noch zeigen, dass $f''(x_1) < 0$ ist und somit bei der Horizontalstelle x_1 ein lokales Maximum vorliegt. Dazu leiten wir $f(x)$ ein zweites Mal ab. Wiederum verwenden wir Produkt- und Kettenregel:

   $$\begin{aligned} & f'(x) = (x - x_1) \cdot 2g(x) + (x - x_1)^2 \cdot g'(x) \\ \Rightarrow \quad & f''(x) = 1 \cdot 2g(x) + (x - x_1) \cdot 2g'(x) + 2(x - x_1) \cdot 1 \cdot g'(x) + (x - x_1)^2 \cdot g''(x) \\ & \qquad\;\; = 2g(x) + (x - x_1) \cdot 4g'(x) + (x - x_1)^2 \cdot g''(x) \end{aligned}$$

   Jetzt können wir den Wert der zweiten Ableitung an der Stelle x_1 angeben:

   $$f''(x_1) = 2g(x_1) + \underbrace{(x_1 - x_1)}_{=0} \cdot 4g'(x_1) + \underbrace{(x_1 - x_1)^2}_{=0} \cdot g''(x_1) = 2g(x_1)$$

   Gemäss Voraussetzung ist aber $g(x_1) < 0$ und somit ist auch $f''(x_1) < 0$. Also ist x_1 eine Maximalstelle von $f(x)$.

   (b) i. Für $f(x)$ mit der dreifachen Nullstelle x_1 schreiben wir wie vorgeschlagen:

   $$f(x) = (x - x_1)^3 \cdot g(x) \qquad \text{mit} \quad g(x_1) \neq 0$$

   Die notwendigen Bedingungen für eine Sattelstelle sind: $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) = 0$. D.h., wir müssen $f(x)$ zweimal ableiten. Dies geht unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel:

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x - x_1)^2 \cdot 1 \cdot g(x) + (x - x_1)^3 \cdot g'(x) \\ &= (x - x_1)^2 \cdot 3g(x) + (x - x_1)^3 \cdot g'(x) \\ f''(x) &= 2(x - x_1) \cdot 3g(x) + (x - x_1)^2 \cdot 3g'(x) + 3(x - x_1)^2 \cdot g'(x) + (x - x_1)^3 \cdot g''(x) \\ &= (x - x_1) \cdot 6g(x) + 6(x - x_1)^2 \cdot g'(x) + (x - x_1)^3 \cdot g''(x) \end{aligned}$$

   Sowohl aus der ersten, wie auch aus der zweiten Ableitung lässt sich je mindestens ein Linearfaktor $(x - x_1)$ ausklammern:

   $$f'(x) = (x - x_1)^2 \cdot 3g(x) + (x - x_1)^3 \cdot g'(x) = (x - x_1)^2 \cdot \big(3g(x) + (x - x_1) \cdot g'(x)\big)$$

   $$\begin{aligned} f''(x) &= (x - x_1) \cdot 6g(x) + (x - x_1)^2 \cdot 6g'(x) + (x - x_1)^3 \cdot g''(x) \\ &= (x - x_1) \cdot \big(6g(x) + (x - x_1) \cdot 6g'(x) + (x - x_1)^2 \cdot g''(x)\big) \end{aligned}$$

   Damit sind also $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) = 0$. Die notwendigen Bedingungen für eine Sattelstelle sind erfüllt.

ii. Damit es sich bei x_1 ganz bestimmt um eine Sattelstelle handelt, muss die dritte Ableitung an dieser Stelle verschieden von 0 sein. Folglich müssen wir nochmals ableiten und dann schauen, welcher Funktionswert sich für $f'''(x_1)$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
& f''(x) = (x-x_1)\cdot 6g(x) + (x-x_1)^2 \cdot 6g'(x) + (x-x_1)^3 \cdot g''(x) \\
\Rightarrow \quad & f'''(x) = 1 \cdot 6g(x) + (x-x_1)\cdot 6g'(x) + \ldots \\
& \qquad \ldots + 2(x-x_1)\cdot 1 \cdot 6g'(x) + (x-x_1)^2 \cdot 6g''(x) + \ldots \\
& \qquad \qquad \ldots + 3(x-x_1)^2 \cdot 1 \cdot g''(x) + (x-x_1)^3 \cdot g'''(x) \\
& \qquad = 6g(x) + (x-x_1)\cdot 18g'(x) + (x-x_1)^2 \cdot 9g''(x) + (x-x_1)^3 \cdot g'''(x) \\
\Rightarrow \quad & f'''(x_1) = 6g(x_1) + \underbrace{(x_1-x_1)}_{=0} \cdot 18g'(x_1) + \underbrace{(x_1-x_1)^2}_{=0} \cdot 9g''(x_1) + \underbrace{(x_1-x_1)^3}_{=0} \cdot g'''(x_1) \\
& \qquad = 6g(x_1) \neq 0
\end{aligned}
$$

Der letzte Ausdruck $6g(x_1)$ ist gemäss Voraussetzung verschieden von 0. Damit haben wir gezeigt, dass $f(x)$ an der Stelle x_1 tatsächlich eine Sattelstelle aufweisen muss.
Bemerkung: Wir sagen, $f'(x_1) = 0$, $f''(x_1) = 0$ und $f'''(x_1) \neq 0$ sind **hinreichende Bedingungen** dafür, dass $f(x)$ an bei x_1 eine Sattelstelle aufweist. *Hinreichend* bedeutet also, dass wenn diese Bedingungen erfüllt sind, zwingend eine Sattelstelle vorliegt. (Dies im Gegensatz zu *notwendigen Bedingungen*. Dort ist die Idee gerade andersrum: Wenn die notwendigen Bedingungen <u>nicht</u> erfüllt sind, kann auf keinen Fall eine Sattelstelle vorliegen.)