Übungen zur Differentialrechnung

SERIE D: Vielfachheiten von Null- und Polstellen

Klasse 155c / AGe

1. Faktorisiere vollständig unter Verwendung der zusätzlichen Informationen (NS = Nullstelle):

$a(x) = x^3 - x^2 - 22x + 40$	$a(4) = 0$
$b(x) = 2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9$	$x = 3$ ist eine doppelte NS von $b(x)$
$c(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 2$	$x = -1$ ist eine dreifache NS von $c(x)$
$d(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$	$d(x)$ hat eine einfach zu erahnende NS
$e(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 12x - 8$	$e(x)$ enthält den Faktor $\left(x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)$
$f(x) = x^6 - 5x^5 + 12x^4 - 18x^3 + 17x^2 - 9x + 2$	$f(x)$ besitzt als einzige NS $x = 1$

2. Skizziere die ungefähren Graphen der folgenden vollständig faktorisierten Funktionen.

   Bem.: Es geht nur darum aufgrund der Vielfachheiten der Nullstellen zu begreifen, wie der Graph ungefähr zu verlaufen hat $\Rightarrow$ keine Ableitungen, aber bei den **Zusatzaufgaben** $j(x)$ und $k(x)$ inkl. Polynomdivision!

   $$g(x) = (x+1)^2(x-1)^3(x-2) \qquad h(x) = -(x-2)^3(x-4)^2\left(x^2+1\right)$$

   $$i(x) = -\frac{1}{(x+1)^2(x-1)^3(x-2)} \qquad j(x) = \frac{1}{(x-2)^3(x-4)^2\left(x^2+1\right)}$$

   $$k(x) = \frac{(x-1)^3}{2(x+1)^2} \qquad l(x) = -\frac{(x+2)^2(x-2)^2}{(x-3)(x-1)^2}$$

3. Aus dem Thema Quadratische Funktionen kennst du die Scheitelpunktform $f(x) = a(x-u)^2 + v$. Leite $f(x)$ einmal ab um zu zeigen, dass u eine Extremalstelle von $f(x)$ und somit also die Scheitelpunktskoordinate der zugehörigen Parabel ist.

4. **Zusatzaufgabe:** Führe bei folgenden Polynombrüchen eine Kurvendiskussion durch:

   $$m(x) = \frac{24x - 72}{x^2} \qquad n(x) = \frac{x^2}{3x - 9} \qquad o(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 2}$$

   $$p(x) = \frac{x^3}{8x - 8} \qquad q(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 8x - 10} \qquad r(x) = \frac{10x^2 - 60x + 80}{4x^2 - 28x + 49}$$

5. **Zusatzaufgabe:** Zwei Beweise zum Anhang D:

   (a) Ein Polynom $f(x)$ besitze bei x_1 eine **zweifache Nullstelle**, d.h., es lässt sich folgendermassen faktorisieren: $f(x) = (x - x_1)^2 \cdot g(x)$ mit $g(x_1) < 0$.
   Beweise, dass x_1 eine **Maximalstelle** von $f(x)$ ist.

   (b) Ein Polynom $f(x)$ besitze bei x_1 eine **dreifache Nullstelle**, d.h., es lässt sich folgendermassen faktorisieren: $f(x) = (x - x_1)^3 \cdot g(x)$ mit $g(x_1) \neq 0$.

      i. Zeige, dass x_1 die zwei notwendigen Bedingungen $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) = 0$ erfüllt, die es braucht, damit x_1 eine *Sattelstelle* sein kann.

      ii. Beweise, dass x_1 tatsächlich eine Sattelstelle ist.
      Hinweis: Dazu müssen die beiden notwendigen Bedingungen von eben erfüllt sein, und zusätzlich muss gelten: $f'''(x_1) \neq 0$.