# 155c: Prüfung Differentialrechnung I – Lösungen

1. Die Ableitungen lauten: (0.5+0.5+1.5+0.5 P)

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \underline{\underline{-\frac{3}{x^2}}} \qquad\qquad g(x) = 155c \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \underline{\underline{0}}$$

$$h(x) = 2x\sqrt{x} = 2x^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{3\sqrt{x}}} \qquad\qquad i(x) = -x^{\pi} \quad \Rightarrow \quad i'(x) = \underline{\underline{-\pi \cdot x^{\pi-1}}}$$

2. Es sieht nach einer kubischen Funktion aus. Daher setzen wir an: (1 P)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

Aus dem angegeben Tief- und Wendepunkt erhalten wir vier Gleichungen: (2 P)

$$\left| \begin{array}{c} f(0) = -\frac{5}{3} \\ f'(0) = 0 \\ f(-2) = 1 \\ f''(-2) = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} \underline{d = -\frac{5}{3}} \\ \underline{c = 0} \\ -8a + 4b - 2c + d = 1 \\ -12a + 2b = 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

Da $c = 0$ und $d = -\frac{5}{3}$ bereits bekannt sind, können wir diese Werte direkt in ③ und ④ einsetzen und erhalten ein 2x2-Gleichungssystem für $a$ und $b$ bestimmen: (1.5 P)

$$\left| \begin{array}{c} -8a + 4b - \frac{5}{3} = 1 \\ -12a + 2b = 0 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -8a + 4b = \frac{8}{3} \\ 24a - 4b = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 16a = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{a = \frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \quad -12 \cdot \frac{1}{6} + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2b = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b = 1}$$

Somit erhalten wir insgesamt: (0.5 P)

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{6}\, x^3 + x^2 - \frac{5}{3}}}$$

3. (a) Zunächst leiten wir $f(x)$ zweimal ab, faktorisieren jeweils und bestimmen daraus die speziellen Stellen der Funktion: (2.5 P)

$$f(x) = \frac{1}{12}\, x^4 - \frac{1}{3}\, x^3 = \frac{1}{12}\, x^3\,(x-4) \quad \Rightarrow \quad \text{NS:} \quad x = 0, 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\, x^3 - x^2 = \frac{1}{3}\, x^2\,(x-3) \quad \Rightarrow \quad \text{HS:} \quad x = 0, 3$$

$$f''(x) = x^2 - 2x = x\,(x-2) \quad \Rightarrow \quad \text{WS:} \quad x = 0, 2$$

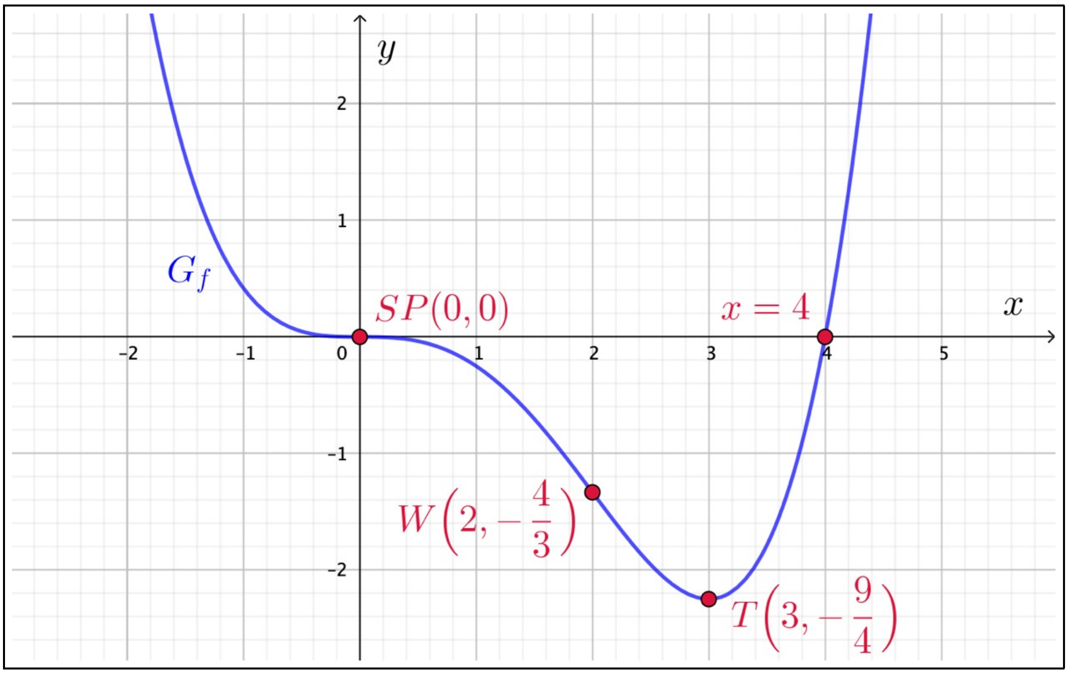
Offensichtlich ist $x = 0$ gleichzeitig eine NS, eine HS und eine WS. Im Koordinatenursprung befindet sich also ein Sattelpunkt. (0.5 P)
Wegen $\frac{1}{12}\, x^4$ kommt der $G_f$ links von oben und geht rechts auch wieder nach oben. (0.5 P)
Die Qualität der anderen Horizontalstelle folgt durch das Einsetzen von $x = 3$ in die zweite Ableitung: (0.5 P)

$$f''(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt!}$$

Bestimmen wir noch die $y$-Koordinaten der anderen Horizontal- und Wendepunkte: (1 P)

$$f(3) = \frac{3^4}{12} - \frac{3^3}{3} = \frac{3^3}{4} - 3^2 = \frac{27-36}{4} = -\frac{9}{4} = -2.25 \quad \Rightarrow \quad T(3,-2.25)$$
$$f(2) = \frac{2^4}{12} - \frac{2^3}{3} = \frac{2^2-2^3}{3} = \frac{4-8}{3} = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad W\left(3,-\frac{4}{3}\right)$$

Damit ist die Kurvendiskussion abgeschlossen und wir skizzieren den $G_f$: (1 P)




(b) Es geht um die Wendetangente durch $W(2,-\frac{4}{3})$. Deren Steigung ergibt sich aus der 1. Ableitung: (1 P)

$$m = f'(2) = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2^2 = \frac{8}{3} - 4 = \frac{8-12}{3} = -\frac{4}{3}$$

Daraus folgt für die Tangentenfunktion direkt: (1 P)

$$t(x) = m(x-x_W) + y_W = -\frac{4}{3}(x-2) - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

Somit erhalten wir für die gesuchte Nullstelle dieser Tangentenfunktion: (1 P)

$$t(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1}}$$

4. Mit der ersten NS lässt sich eine erste Faktorisierung des Polynoms vornehmen: (1.5 P)

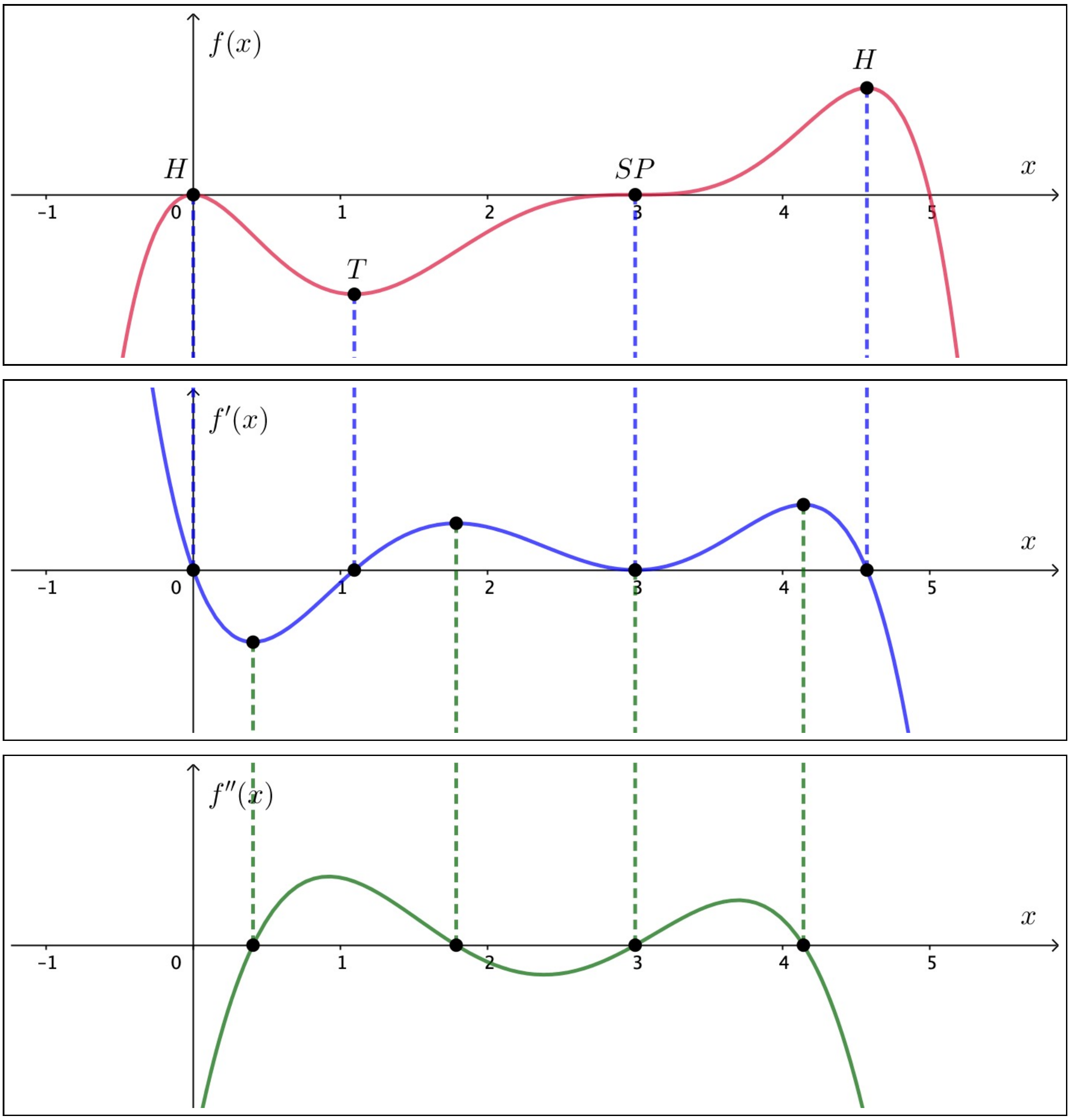
$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 11x - 4 = (x+1)\left(2x^2 - 7x - 4\right)$$

Die weiteren NS ergeben sich beispielsweise durch einen Zweiklammeransatz: (1 P)

$$2x^2 - 7x - 4 = (2x+1)(x-4) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-4)$$

Damit lauten die drei Nullstellen: $\underline{\underline{x=-1, x=-\frac{1}{2}, x=4}}$. (0.5 P)

5. Für die grafischen Ableitungen ergibt sich: (3 P)



6. Die explizite Form der Wendetangente lautet: (0.5 P)

$$4x + y = 10 \quad \Leftrightarrow \quad t(x) = y = -4x + 10$$

Damit hat der $G_f$ im Wendepunkt die Steigung $-4$. Ausserdem lautet die $y$-Koordinate des Wendepunktes: (0.5 P)

$$t(2) = -4 \cdot 2 + 10 = 2$$

Somit haben wir drei Bedingungen für das gesuchte Polynom $f(x)$ entdeckt: (1 P)

$$\left| \begin{array}{c} f(2) = 2 \\ f'(2) = -4 \\ f''(2) = 0 \end{array} \right|$$

Da der $G_f$ symmetrisch zur $y$-Achse sein soll, kommen nur gerade Potenzen in Frage. Damit lautet der Funktionsansatz (3 Parameter zur Erfüllung von 3 Gleichungen): (1 P)

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4ax^3 + 2bx \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 12ax^2 + 2b$$

Nun verwenden wir das Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktionsparameter: (2 P)

$$\left| \begin{array}{c} f(2) = 2 \\ f'(2) = -4 \\ f''(2) = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 16a + 4b + c = 2 \\ 32a + 4b = -4 \\ 48a + 2b = 0 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 16a + 4b + c = 2 \\ 8a + b = -1 \\ 24a + b = 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

③ − ②: $\quad 16a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = \frac{1}{16}}$

in ③: $\quad 24 \cdot \frac{1}{16} + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b = -\frac{3}{2}}$

in ①: $\quad 16 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{-3}{2} + c = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 6 + c = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{c = 7}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7}}$$