Algebraische Grundfertigkeiten: Aufgabe 1

(a) Löse für $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x}{x^2 - x} + \frac{2}{x^2 + x} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

(b) Ebenso:

$$\sqrt{13x + 12} = 2\sqrt{x - 3} + 3\sqrt{x}$$

Algebraische Grundfertigkeiten: Aufgabe 2

(a) Radiziere weitmöglichst und bringe auf Normalform:

$$\frac{\sqrt{6a^2}}{\sqrt{x^5}} : \frac{\sqrt{75a^3}}{\sqrt{32x}} =$$

(b) Bringe auf die Normalform für Wurzelterme:

$$\frac{5-2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}} =$$

(c) Multipliziere aus:

$$\left(a^2-2b\right)^5 =$$

Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ____________________

Algebraische Grundfertigkeiten: Aufgabe 3

(a) Fasse möglichst weit zusammen:

$$\frac{2x+1}{4x-2} - \frac{3x^2+5x}{6x^2+7x-5} =$$

(b) Ebenso:

$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} =$$

Algebraische Grundfertigkeiten: Aufgabe 4

(a) Löse für $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{9x-8}{4x+7} = \frac{3x}{2x+5}$$

(b) Ebenso:

$$\left|x + \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$$

Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ____________________

Algebraische Grundfertigkeiten: Aufgabe 5

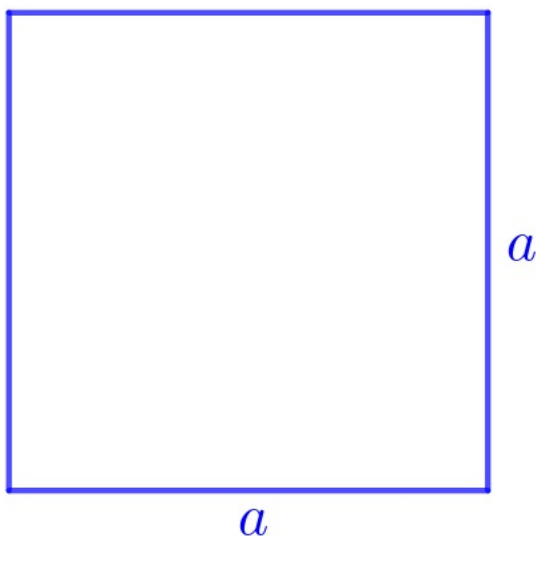
(a) Faktorisiere die folgenden Summen:

i. $z^2 - 19z + 48 =$

ii. $3a(x-y) - 5b(y-x) - x + y =$

iii. $(a-b)^2 - (b-c)^2 =$

(b) Begründe die zweite binomische Formel grafisch anhand des Quadrates links:



Lin. Gl. und Fkt. & Gl.systeme: Aufgabe 1

(a) Gib die Lösungsmenge für folgendes Gleichungssystem an:

$$\left| \begin{array}{c} 4x - \frac{2y-1}{6} = 14 \\ \frac{8x+5}{2} - \frac{y}{3} = 2 \end{array} \right|$$

(b) A sei ein Ausdruck der Form $A = my + n$ mit $m, n \in \mathbb{R}$.

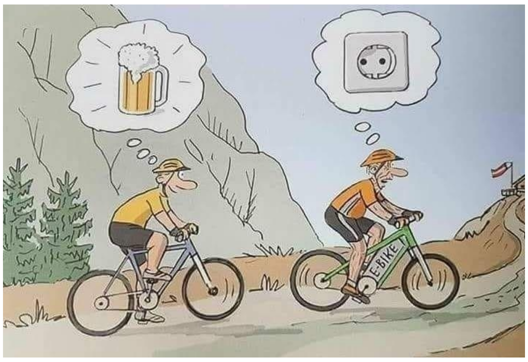
Wie sind A resp. m und n zu wählen, dass das folgende Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt? Und wie müssen diese Parameter gewählt werden, wenn das System gar keine Lösung haben soll?

$$\left| \begin{array}{c} -2x + 3y = -4 \\ x + A = 6 \end{array} \right|$$

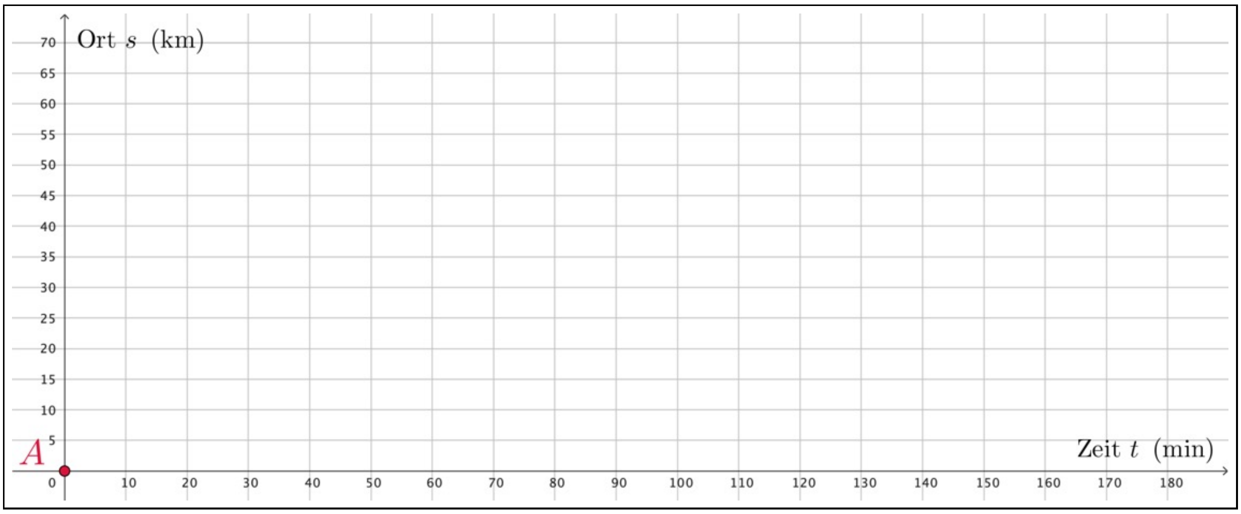
Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ____________________

Lin. Gl. und Fkt. & Gl.systeme: Aufgabe 2

Albert und Berta fahren einander mit ihren Fahrrädern auf der gleichen Strasse entgegen. Ihre Dörfer (Startorte) A und B liegen $60\,\mathrm{km}$ auseinander. Albert nimmt es von A aus mit $18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ etwas etwas gemütlicher als Berta, die mit einer Geschwindigkeit von $24\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von B aus unterwegs ist. Dafür startet sie genau eine Stunde später als er.



(a) Trage die beiden Bewegungen ins folgende t-s-Diagramm ein:



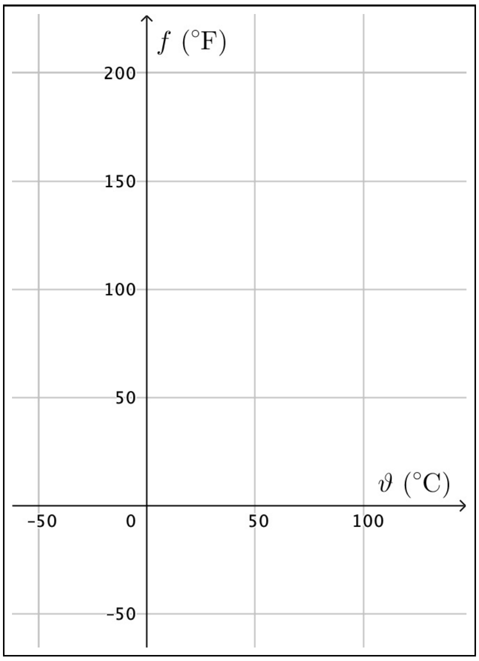
(b) Gib die beiden Funktionsgleichungen an und bestimme den Treffpunkt.

Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe　　　　Name: ____________________

Lin. Gl. und Fkt. & Gl.systeme: Aufgabe 3

(a) In Amerika werden Temperaturen in **Grad Fahrenheit** $^\circ\mathrm{F}$ angegeben. Der Schmelzpunkt von Wasser liegt auf $32\,^\circ\mathrm{F}$ und $212\,^\circ\mathrm{F}$ entsprechen dem Siedepunkt.

i. Wie lautet die Funktion $f(\vartheta)$, mit der man eine Celsius-Temperaturangabe ϑ in eine Fahrenheit-Temperaturangabe f umrechnen kann?



ii. Welche Celsius-Temperatur hat in der Fahrenheit-Skala denselben Zahlenwert?

(b) Für welches a hat das folgende Gleichungssystem keine eindeutige Lösung (x, y)?

$$\left| \begin{array}{c} ax + 2y = 4 \\ x + (a+1)y = a \end{array} \right|$$

Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ____________________

Lin. Gl. und Fkt. & Gl.systeme: Aufgabe 4

(a) Geschicktes Lösungsvorgehen gesucht!

$$\left|\begin{array}{c} 15x - 25y = 13 \\ 14x + 20y = 13 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c} \frac{4}{2x-y} - \frac{5}{x-2y} = 6 \\ \frac{8}{2x-y} - \frac{7}{x-2y} = 9 \end{array}\right|$$

(b) Löse auch das folgende Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{c} 2x + 3y - 4z = -5 \\ 3x - 5y + 2z = 4 \\ 4x + y - 2z = 5 \end{array}\right|$$

Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ____________________

Lin. Gl. und Fkt. & Gl.systeme: Aufgabe 5

(a) Wie wird die (Haupt-)Determinante D des allgemeinen linearen 2x2-Gleichungssystems

$$\left| \begin{array}{c} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array} \right|$$

definiert und welche Aussage macht sie über die Lösbarkeit des Systems?

(b) Löse mittels Determinantenverfahren:

$$\left| \begin{array}{c} 3x + 13y = -6 \\ 4x + 6y = 9 \end{array} \right|$$

(c) Wie lauten die Lösungskoordinaten x und y in Abhängigkeit des Parameters a und für welche Werte von a liegt ein Spezialfall vor?

$$\left| \begin{array}{c} 2ax + y = -2 \\ (a+1)x + ay = 1 \end{array} \right|$$

Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ____________________

Quadratische Gl. und Fkt.: Aufgabe 1

(a) Löse mittels quadratischer Ergänzung:

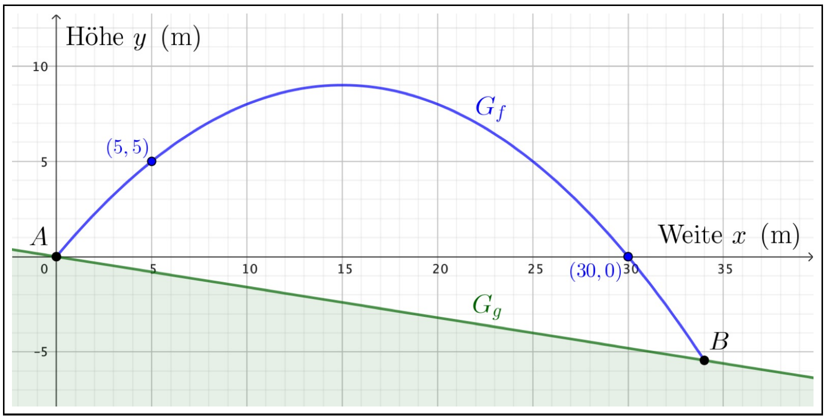
$$4x^2 - 4x - 11 = 0$$

(b) Löse nun die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. In anderen Worten: Leite die Mitternachtsformel her! Zeige dabei, wie die Diskriminante entsteht und was man folglich über die Lösbarkeit einer QG sagen kann.

Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ______________________

Quadratische Gl. und Fkt.: Aufgabe 2

Ein Golfball wird auf einem schräg abfallenden Gelände im Punkt A abgeschlagen und landet bei B. Die Flugbahn entspreche dem Graphen einer quadratischen Funktion f.



(a) Gib die Funktionsgleichungen der Flugbahn f und des abfallenden Geländes g an.

(b) Bestimme den Aufprallpunkt B.

(c) Welche maximale Höhe (über Meer) erreicht der Golfball während dem Flug?

(d) Welche maximale (senkrechte) Höhe über Boden erreicht der Ball?

Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ____________________

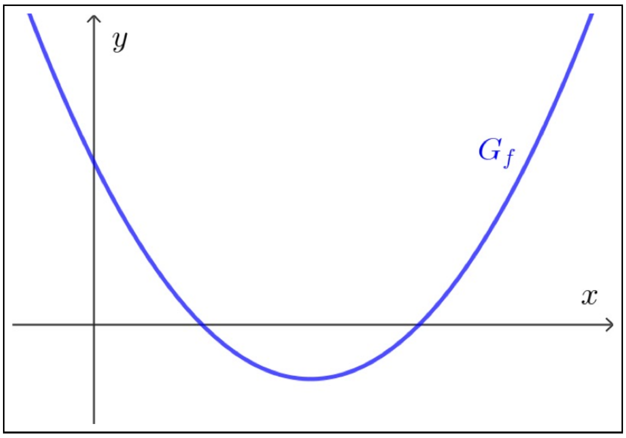
Quadratische Gl. und Fkt.: Aufgabe 3

Zur Beschreibung quadratischer Funktionen haben wir verschiedene Formen kennengelernt:

NF: $f(x) = ax^2 + bx + c$

SPF: $f(x) = a(x-u)^2 + v$

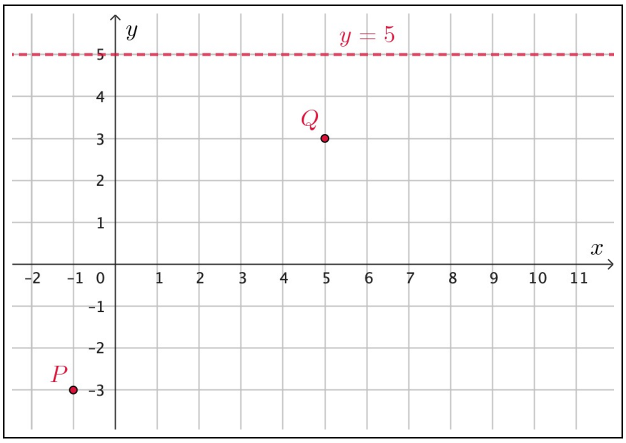
NSF: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$



(a) Erläutere knapp und präzise die Bedeutungen der diversen Parameter.

(b) Der Scheitelpunkt einer Parabel liege auf der Höhe $y = 5$. Sie verlaufe zudem durch die Punkte $P(-1, -3)$ und $Q(5, 3)$.

Bestimme die NSF der zugehörigen quadratischen Funktion!



Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ____________________

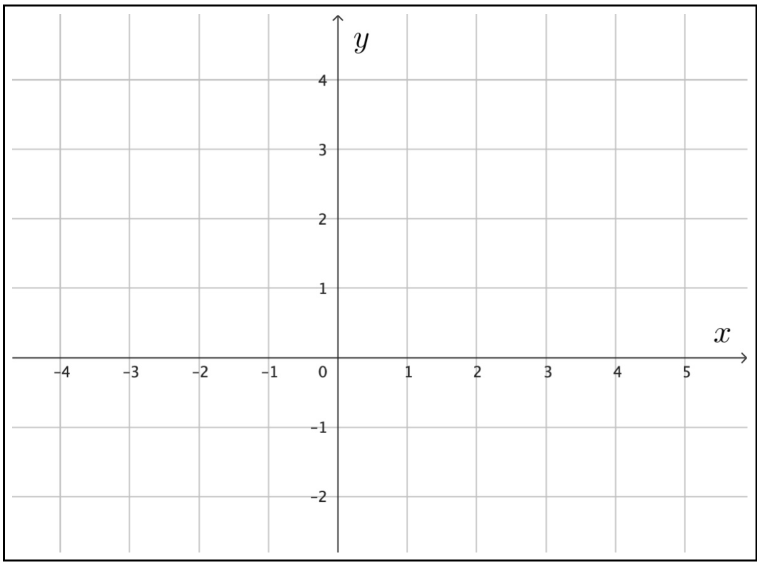
Quadratische Gl. und Fkt.: Aufgabe 4

(a) In der Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$ der quadratischen Funktion steht der Parameter b für die Steigung, mit der der Graph G_f die y-Achse des Koordinatensystems durchquert.

Beweise diese Aussage ganz allgemein, indem du zeigst, dass die Gleichung der Tangente t an den G_f im Punkt $(0, c)$ durch $t(x) = mx + c$ gegeben ist.

(b) Die durch $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - 3x + 3$ werde an der y-Achse gespiegelt, dann um 2 Einheiten nach rechts verschoben und schliesslich am Ursprung gespiegelt.

Skizziere Original, Zwischenschritte und Endresultat im Koordinatensystem und gib alle zugehörigen Funktionsgleichungen an.



Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ______________________

Quadratische Gl. und Fkt.: Aufgabe 5

(a) Suchen wir nach den Schnittpunkten zwischen einer Geraden und einer Parabel, so ergibt sich durch das Gleichsetzen einer linearen und einer quadratischen Funktion eine quadratische Gleichung. Wie hängt deren Diskriminante mit der gegenseitigen Lage von Parabel und Gerade zusammen? Erläutere kurz und knapp!

(b) Eine Parabel sei durch $f(x) = -\frac{1}{4}\,x^2 + x + 1$ gegeben. Bestimme die Gleichung der Tangente an diese Parabel, die durch den Punkt $P(\frac{1}{2}, 3)$ verläuft.

Exponentialfkt. und Logarithmus: Aufgabe 1

(a) Bilde mit den Zahlen 4 und 16, sowie mit der Variable x je eine einfache lineare, Potenz- und Exponentialgleichung. Wie geht man bei der Lösung des jeweiligen Gleichungstyps vor?

(b) Berechne die folgenden Logarithmen:

i. $\log_{16}(32) =$

ii. $\log_{\sqrt{7}}\left(\frac{1}{49}\right) =$

iii. $10^{-\frac{3}{2}\log(25)}$

(c) Drücke durch einen einzigen Logarithmus aus:

$$\frac{\ln(9e) - 1}{\ln(6) - \ln(4) + \ln(3)} =$$

Exponentialfkt. und Logarithmus: Aufgabe 2

(a) Löse die folgende Exponentialgleichung:

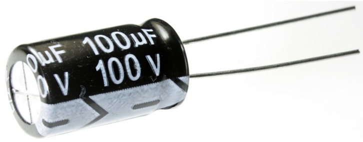
$$3^x = 5^{2x-3}$$

(b) Und nun die folgende Logarithmusgleichung:

$$\log_{\sqrt[3]{5}}(x) + \log_5(x) = 12$$

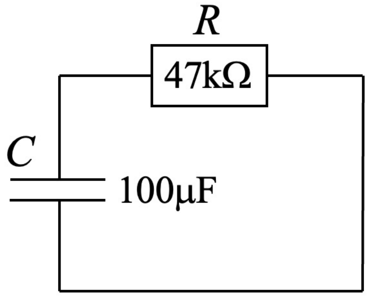
(c) Aus wie vielen Ziffern würde die Zahl 6^{6^6} bestehen, wenn wir sie ausschreiben würden?

Exponentialfkt. und Logarithmus: Aufgabe 3



Ein *Kondensator* ist eine Art kurzzeitige Batterie, also ein kleiner Ladungs- oder Energiespeicher. Entlädt man den Kondensator über einen Widerstand R (vgl. Schaltung rechts), so nimmt die Spannung U über ihm exponentiell ab.[1] Es gilt:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{mit} \quad \tau = R \cdot C \qquad (\tau = \text{gr. } \textit{tau})$$



Dabei ist C die sogenannte *Kapazität* des Kondensators (angegeben in der SI-Einheit *Farad* F), die mit dem Widerstand R multipliziert eine Zeitspanne τ ergibt. In unserem Beispiel wollen wir von einem Widerstand von $R = 47\,\mathrm{k\Omega}$ und einer Kapazität von $C = 100\,\mathrm{\mu F}$ ausgehen, sodass $\tau = 47 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 100 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} = 4.7\,\mathrm{s}$.

(a) Nach welcher Zeit hat sich der Kondensator auf $U = 0.72\,\mathrm{V}$ Spannung entladen, wenn die Anfangsspannung $9.0\,\mathrm{V}$ betrug?

(b) Gib die Halbwertszeit der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von R und C an und berechne sie.

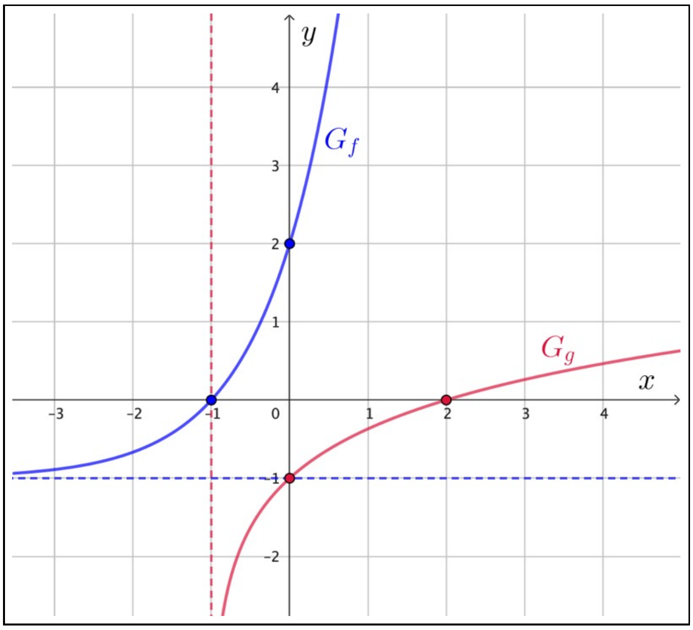
(c) Wie gross ist die prozentuale Abnahme der Kondensatorspannung pro Sekunde?

[1]Kontext: Solche Kondensatorentladungen werden in elektronischen Schaltungen als eine Art Timer verwendet. Sinkt U unter einen bestimmten Wert, so wird dadurch irgendein anderer Effekt ausgelöst.

Exponentialfkt. und Logarithmus: Aufgabe 4

(a) Gib die Funktionsgleichungen zu den beiden Graphen rechts an. Verwende dabei die folgenden Funktionsansätze:

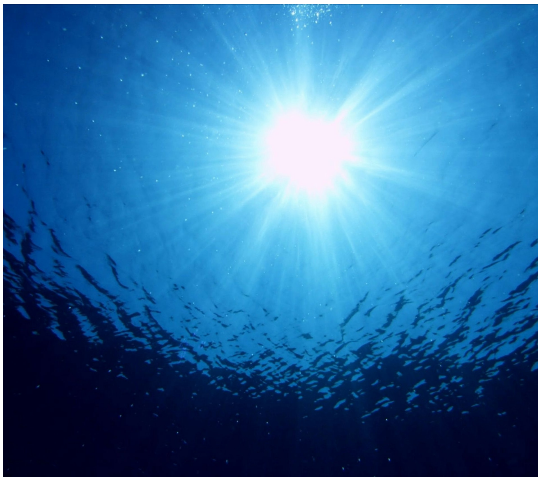
$$f(x) = f_0 \cdot a^x + d$$
$$g(x) = \log_a(x - x_0) + d$$



(b) Die beiden Graphen scheinen eine Verwandtschaft aufzuweisen... Was ist wohl gemeint? Was ist im Koordinatensystem zu sehen und wie kann diese Verwandtschaft rechnerisch überprüft werden?

(c) Wir betrachten die Funktion $i(x) = \sqrt{x-3}$. Wie lautet die dazu "verwandte" Funktion $j(x)$, wobei die Verwandtschaft dieselbe sein soll, wie wir sie unter (b) beobachtet haben?

Exponentialfkt. und Logarithmus: Aufgabe 5



Dringt Licht in Wasser ein, so nimmt die Lichtintensität I mit zunehmender Tiefe d aufgrund der Absorption durch das Wasser ab. Dabei gibt es Unterschiede zwischen den verschiedenen Spektralfarben. Z.B. nimmt die Intensität von orangem Licht pro Meter Tiefe um $27\,\%$ ab, während blaues Licht pro Meter nur um $2.0\,\%$ schwächer wird.

(a) Notiere aufgrund dieser Angaben je eine Funktionsgleichung $I(d)$ für die Lichtintensität I von orangem und von blauem Licht auf einer bestimmten Tiefe d.

(b) Bestimme die Halbwertstiefen $D_{1/2}$ für blaues Licht und notiere die Funktion $I(d)$ neu unter Verwendung der Basis $\frac{1}{2}$.

(c) Bei strahlendem Sonnenschein beträgt die Intensität von blauem Licht an der Wasseroberfläche $I_0 = 12\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Unsere Augen registrieren blaues Licht ab einer minimalen Intensität von $I = 3.4\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Ab welcher Tauchtiefe ist es für uns dunkel? (Blau ist die Farbe, die am tiefsten runter kommt.)

Folgen und Reihen: Aufgabe 1

(a) Gegeben sei die Folge 7, 14, $\ldots$, 1792.

Wie lautet das 6. Glied, wenn es sich um eine arithmetische Folge handelt? Und wie gross ist die Summe über alle Folgeglieder?

(b) Betrachte dieselbe Folge wie bei (a), aber unter der Annahme, dass es sich um eine geometrische Folge handelt, und beantworte dieselben Fragen.

(c) Berechne ausserdem die folgende unendliche Summe: $8 - 4\sqrt{3} + 6 - \ \ldots$

Folgen und Reihen: Aufgabe 2

(a) Gib je eine explizite Definition der Folge an:

i. $(a_n): \quad 5, \frac{8}{3}, \frac{11}{5}, 2, \ldots$

ii. $(b_n): \quad -2, 2, -2, 2, \ldots$

(b) Zwischen die Zahlen -30 und 20 sollen 74 Zahlen so eingeschoben werden, dass eine arithmetische Folge entsteht. Ist die Zahl 0 ein Folgeglied und wie gross ist die Summe über alle Folgeglieder?

(c) Was sagst du zur folgenden Reihe? Konvergiert sie und lässt sie sich berechnen?

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \frac{1}{16} - \ldots$$

Folgen und Reihen: Aufgabe 3

(a) Berechne die 7. Teilsumme der Reihe $24 + 12 + 6 + \ldots$ und gib den Grenzwert der unendlich langen Summe an.

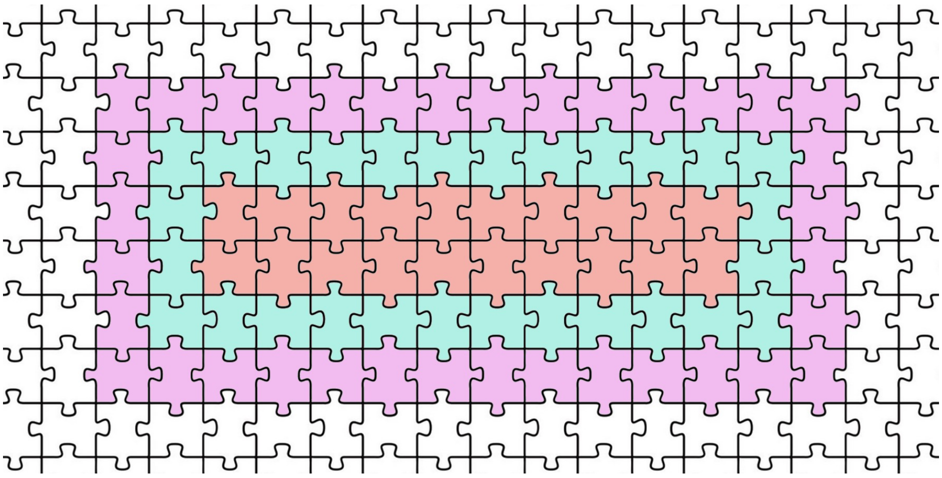
(b) Zu geometrischen Reihen haben wir die folgenden Aussagen kennengelernt:

- Die Formel für die n-te Partialsumme lautet: $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$.
- Für $n \to \infty$ konvergiert die Reihe genau dann, wenn $|q| < 1$ ist.
- Im Falle von Konvergenz gilt für den Grenzwert der Reihe: $s_\infty = \frac{a_1}{1-q}$.

Beweise alle diese Aussagen.

Folgen und Reihen: Aufgabe 4

Das folgende Bild zeigt das Zentrum eines 1000er-Puzzles:



Die innerste Teilchenschicht (hellrot) besteht aus $a_1 = 20$ Teilchen. Die zweite Schicht (hellblau) enthält a_2 Teilchen, die dritte Schicht (rosa) enthält a_3 Teilchen, usw. Auf diese Weise kann man weitere Schichten hinzufügen, bis das Puzzle vollständig ist.

(a) Gib die explizite und die rekursive Definition der Teilchenzahl-Folge (a_n) an.

(b) Das 1000er-Puzzle oben besteht aus etwas mehr als 1000 Teilchen. Es besitzt gerade so viele Schichten, dass die Grenze von 1000 Teilchen überschritten ist.

Aus wie vielen Teilchen besteht das Puzzle und welchen Prozentsatz davon macht der Rand ($=$ äusserstes Rechteck) aus?

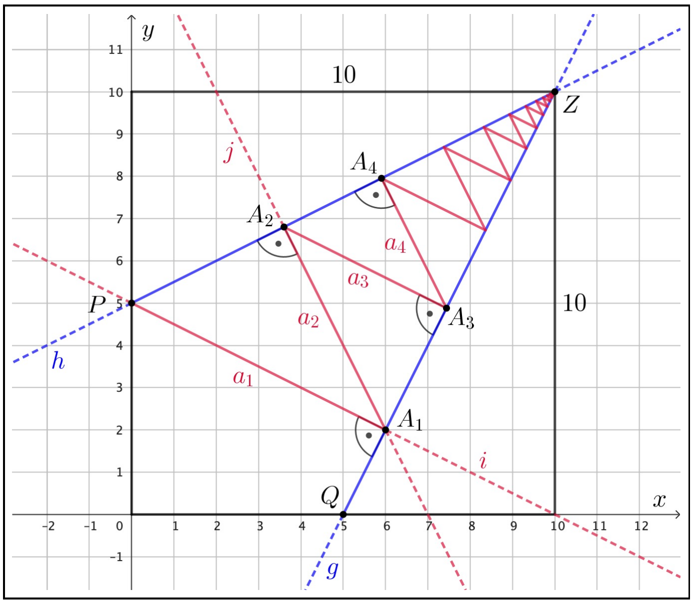
Folgen und Reihen: Aufgabe 5

P und Q sind Seitenmittelpunkte eines Quadrates mit Seitenlänge 10.

Bestimme die Länge der Zickzackstrecke P–A_1–A_2–A_3–$\ldots$ und vergleiche sie mit der Länge von $\overline{PZ}$.

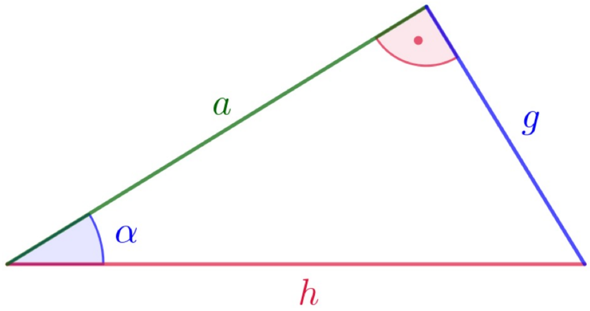
Tipp: Überlege dir zunächst genau, weshalb die Längen von a_1, a_2, a_3, $\ldots$ eine GF bilden.

Benutze nun das Koordinatensystem und gib darin die Gleichungen der Geraden g, h, i und j an, um die Schnittpunkte A_1 und A_2 zu bestimmen. Wie erhältst du aus deren Koordinaten die Längen von a_1 und a_2?



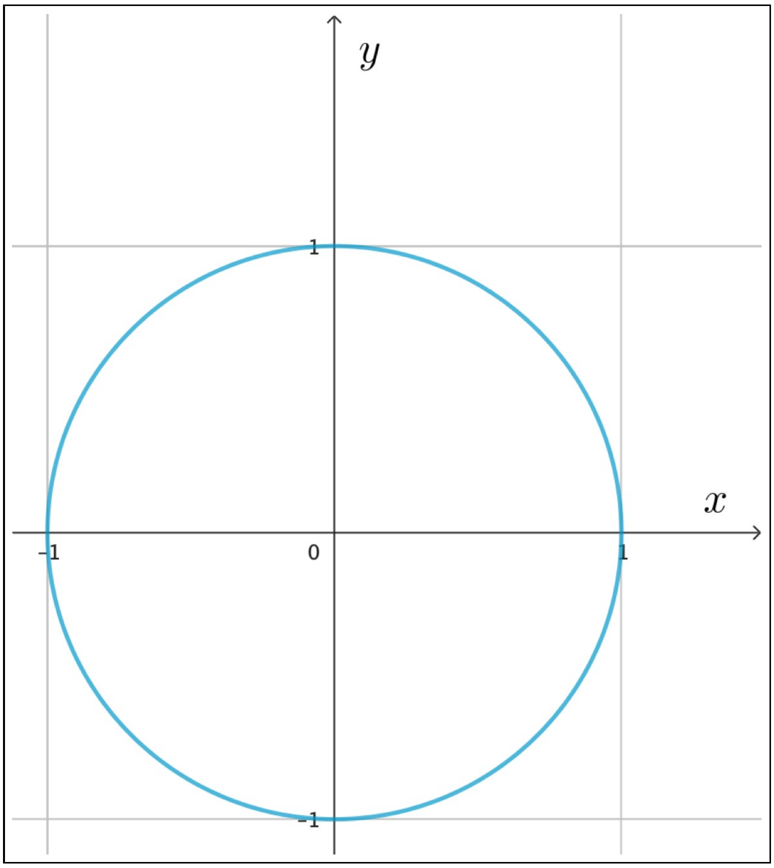
Trigonometrie: Aufgabe 1

(a) Erläutere die Definitionen der trigonometrischen Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck.



(b) Wie werden die Winkelfunktionen am Einheitskreis neudefiniert?

Gib eine Schritt-für-Schritt-Definitionsanleitung anhand der Grafik rechts.

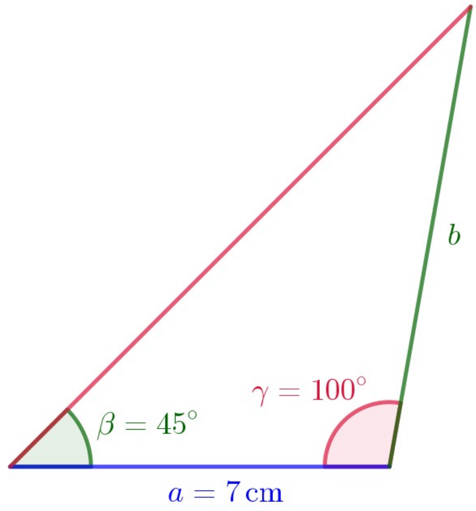


(c) Zeige anhand der Konstruktion am Einheitskreis, dass diese beiden Definitionsarten der Winkelfunktionen für Winkel $0° < \alpha < 90°$ übereinstimmen.

Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ____________________

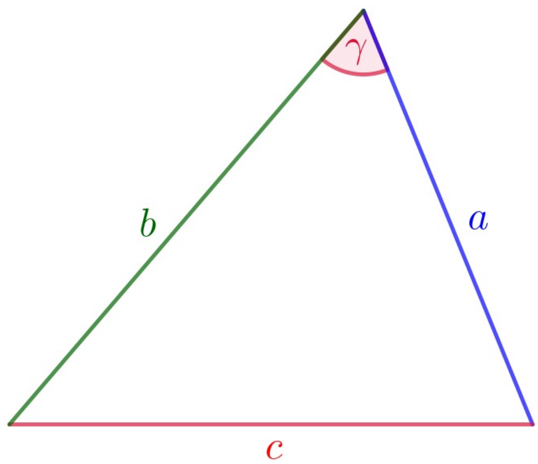
Trigonometrie: Aufgabe 2

(a) Gegeben sei ein Dreieck mit der Seite $a = 7\,\mathrm{cm}$ und den Winkeln $\beta = 45°$ und $\gamma = 100°$. Berechne die Seite b.



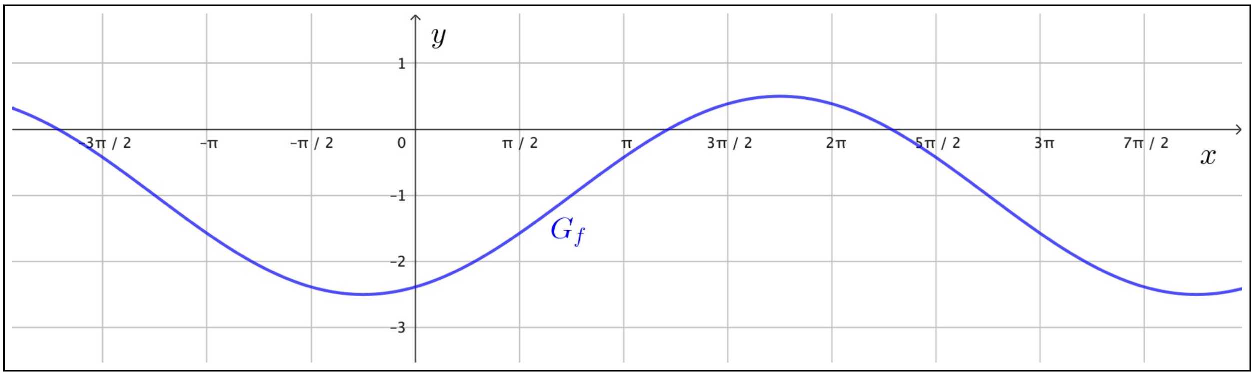
(b) Leite den Cosinussatz her. Benutze dazu das Dreieck rechts.

Tipp: Trage eine Höhe ein und arbeite mit Teildreiecken!



Trigonometrie: Aufgabe 3

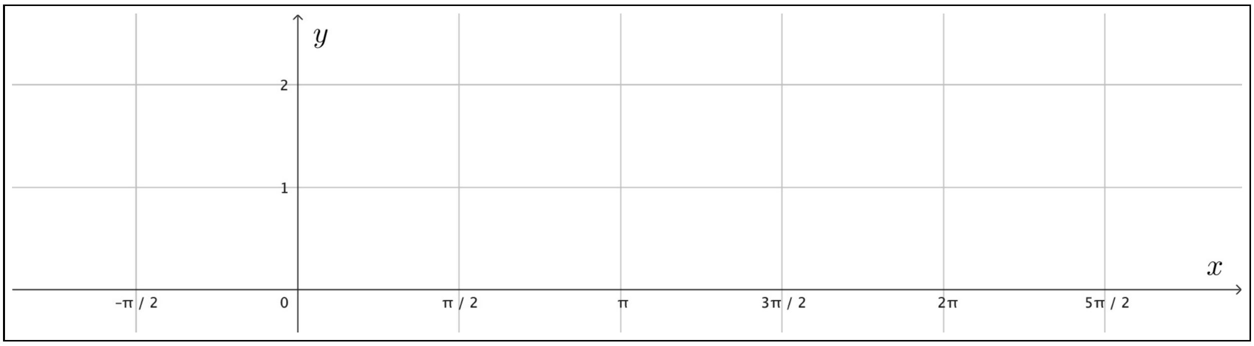
(a) Gib die Funktionsgleichung zum folgenden Funktionsgraphen an:



(b) Skizziere den Graphen zur Funktion

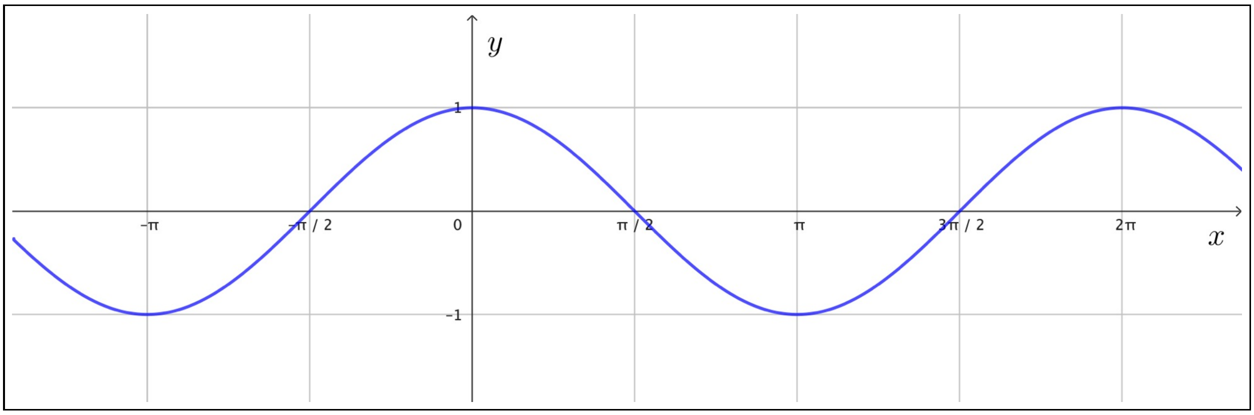
$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

im folgenden Koordinatensystem.



Trigonometrie: Aufgabe 4

(a) Worin besteht der Unterschied,ob ich nach dem Wert von $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ oder nach der Lösung der Gleichung $\cos x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ frage? Erläutere und löse!



(b) Löse die trigonometrische Gleichung

$$\cos x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

und illustriere deine Lösung zudem im Koordinatensystem oben.

Tipp: Beginne mit der grafischen Lösung!

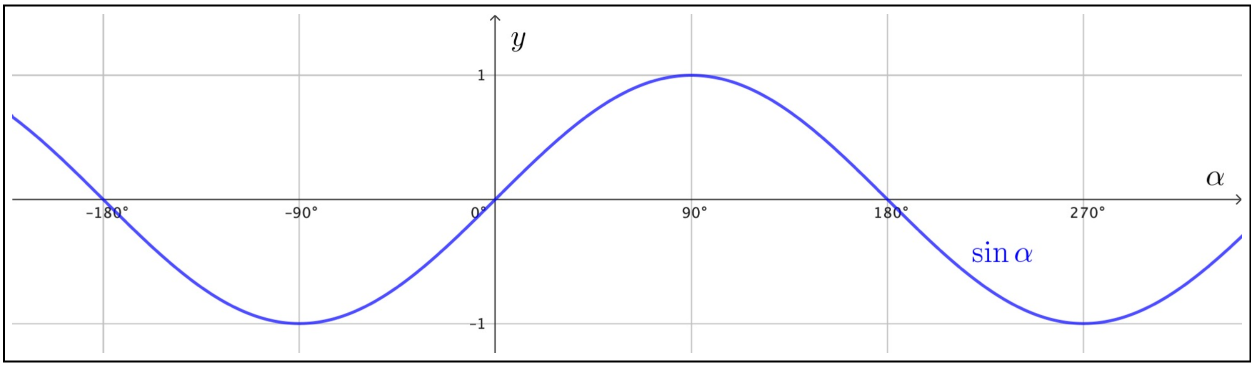
Klasse 155c / ZP Mathematik / AGe **Name:** ____________________

Trigonometrie: Aufgabe 5

(a) In einem Dreieck mit Standardbeschriftung kennen wir die Seite $a = 4\,\mathrm{cm}$, die Seite $b = 7\,\mathrm{cm}$ und den Winkel $\alpha = 30°$.

Skizziere die Situation rechts und bestimme die Seite c.

(b) Eine Symmetrieeigenschaft der Sinusfunktion wird durch $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ beschrieben. Um welche Symmetrie geht es hier? Erläutere sie am Funktionsgraphen!



(c) Welche andere Symmetrie der Sinusfunktion hatte mit der Aufgabe (a) zu tun.