

# WÄRMELEITUNG UND STRAHLUNGSGESETZE

## – Lösungen zu den alten Prüfungsaufgaben

### 1. Naos – ein stellares “Monster”

- (a) Aus der Leuchtkraft und der bei uns ankommenden Strahlungsintensität lässt sich mit dem Abstandsgesetz die Distanz zu Naos bestimmen:

$$I = \frac{L}{4\pi r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1\,200\,000 \cdot L_{\odot}}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{1\,200\,000 \cdot 3.846 \cdot 10^{26} \text{ W}}{4\pi \cdot 340 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} = 1.039 \cdot 10^{19} \text{ m}$$

Ein Lichtjahr steht für eine Distanz von:

$$1 \text{ LJ} = c \cdot 1 \text{ Jahr} \approx 3.0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

Damit erhalten wir für die Distanz zu Naos in Lichtjahren:

$$r = 1.039 \cdot 10^{19} \text{ m} \simeq \underline{\underline{1100 \text{ LJ}}}$$

- (b) Wir wissen, wie viel Energie Naos aussendet. Diese Energie wird von der Sternoberfläche abgestrahlt, deren Grösse wir aufgrund der Radiusangabe kennen. Für die Oberflächentemperatur folgt daraus gemäss dem Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$\begin{aligned} L = \sigma AT^4 \Rightarrow T &= \sqrt[4]{\frac{L}{\sigma A}} = \sqrt[4]{\frac{1\,200\,000 \cdot L_{\odot}}{4\pi\sigma \cdot (20R_{\odot})^2}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{1\,200\,000 \cdot 3.846 \cdot 10^{26} \text{ W}}{4\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot (20 \cdot 700\,000\,000 \text{ m})^2}} = 42\,600 \text{ K} \simeq \underline{\underline{43\,000 \text{ K}}} \end{aligned}$$

### 2. Wärmeleitung im Versuch

- (a) Für die Querschnittsfläche des Kupferbügels erhalten wir:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (0.013 \text{ m})^2 = 0.000531 \text{ m}^2$$

Für den Wärmestrom folgt damit:

$$J = \frac{\lambda \cdot A \cdot \Delta\vartheta}{l} = \frac{390 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{C}} \cdot 0.000531 \text{ m}^2 \cdot 45 \text{ C}}{0.25 \text{ m}} = 37.3 \text{ W} \simeq \underline{\underline{37 \text{ W}}}$$

Natürlich könnte man diesen Wert nun einfach durch die Querschnittsfläche  $A$  dividieren, um die Wärmestromdichte im Bügel zu erhalten. Die Querschnittsfläche des Bügels ist für die Berechnung der Wärmestromdichte allerdings irrelevant, was man auch schön zeigen kann:

$$j = \frac{J}{A} = \frac{\frac{\lambda \cdot A \cdot \Delta\vartheta}{l}}{A} = \frac{\lambda \cdot \Delta\vartheta}{l} = \frac{390 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{C}} \cdot 45 \text{ C}}{0.25 \text{ m}} = 70\,200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \simeq \underline{\underline{7.0 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}}}$$

- (b) Der Golfstrom transportiert die Wärme mittels **Konvektion**. Dies ermöglicht viel grössere Wärmeströme, da die Wärme nicht via **Wärmeleitung** weitergegeben werden muss, sondern direkt durch die Verschiebung des Materials an neue Orte gelangt.

### 3. Abstrahlung eines Bügeleisens

(a) Die optischen Wellenlängen liegen zwischen etwa 380 nm (Violett) und 750 nm (Rot). Im Spektrum sehen wir deutlich, dass das Bügeleisen in diesem Wellenlängenbereich keine Strahlungsintensität aussendet. Damit liegt die emittierte Strahlung komplett im Infraroten.

(b) Das Intensitätsmaximum liegt bei  $\lambda_{\max} = 6000 \text{ nm} = 6.0 \mu\text{m}$ .

Aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz erhalten wir daraus für die Temperatur der Bügelsohle:

$$T = \frac{2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{\lambda_{\max}} = \frac{2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{6.0 \mu\text{m}} = 483 \text{ K} \simeq \underline{\underline{210^\circ\text{C}}}$$

(c) Die Fläche schätzen wir aufgrund der Angaben ab:

$$A \approx 0.9 \cdot 0.11 \text{ m} \cdot 0.23 \text{ m} = 0.0228 \text{ m}^2$$

Mit dem Emissionskoeffizienten und der Temperatur erhalten wir aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz für die abgestrahlte Wärmeleistung:

$$P_{\text{out}} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4 = 0.11 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot 0.0228 \text{ m}^2 \cdot (483 \text{ K})^4 \simeq \underline{\underline{7.7 \text{ W}}}$$

Das ist ein unerwartet geringer Wert! Die elektrische Leistung wird also sicher nicht hauptsächlich für die Abstrahlung von Wärmestrahlung verwendet! Die Vermutung ist falsch!

(d) Beide Gründe hängen eng zusammen: Das Bügeleisen soll (erstens) ja nicht einfach Wärme abstrahlen, sondern (zweitens) vielmehr beim Bügeln Wärme via Wärmeleitung an die feuchte Kleidung abgeben, die durch das Gewicht des Bügeleisens dann geglättet wird. Der geringe Emissionskoeffizient erlaubt höhere Temperaturen fürs Bügeln.

### 4. Kühlung eines Labor-Netzgerätes

Von den drei Arten des Wärmetransportes werden zur Kühlung des Netzgerätes zwei benutzt:

**Wärmeleitung:** Die Kühlrippen sind im direkten thermischen Kontakt mit der Luft und können so Wärme an diese abgeben. Dazu muss die Oberfläche der Kühlrippen möglichst gross sein, was offensichtlich versucht wurde. Durch die fächerartige Gliederung wird der Luftaustausch begünstigt.

**Wärmestrahlung:** Die Kühlrippen strahlen Wärme ab. Günstig dafür ist ein guter Emissionskoeffizient des Materials. Dieses dürfte daher typischerweise schwarz sein! Auch hier ist ein grosse Abstrahlungsoberfläche hilfreich und die Auffächerung präsentiert mehr Oberfläche, sodass nochmals besser abgestrahlt werden kann.

### 5. Ein glühender Draht

(a) Die vom Draht aufgenommene elektrische Leistung beträgt:

$$P_{\text{el}} = U \cdot I = 30.0 \text{ V} \cdot 3.9 \text{ A} = 117 \text{ W}$$

Für die abstrahlende Oberfläche des Drahtes ergibt sich:

$$A = \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 0.00050 \text{ m} \cdot 0.75 \text{ m} = 0.00118 \text{ m}^2$$

Zwischen aufgenommener elektrischer und abgegebener Strahlungsleistung herrscht ein Gleichgewicht, woraus wir mittels Stefan-Boltzmann-Gesetz folgern:

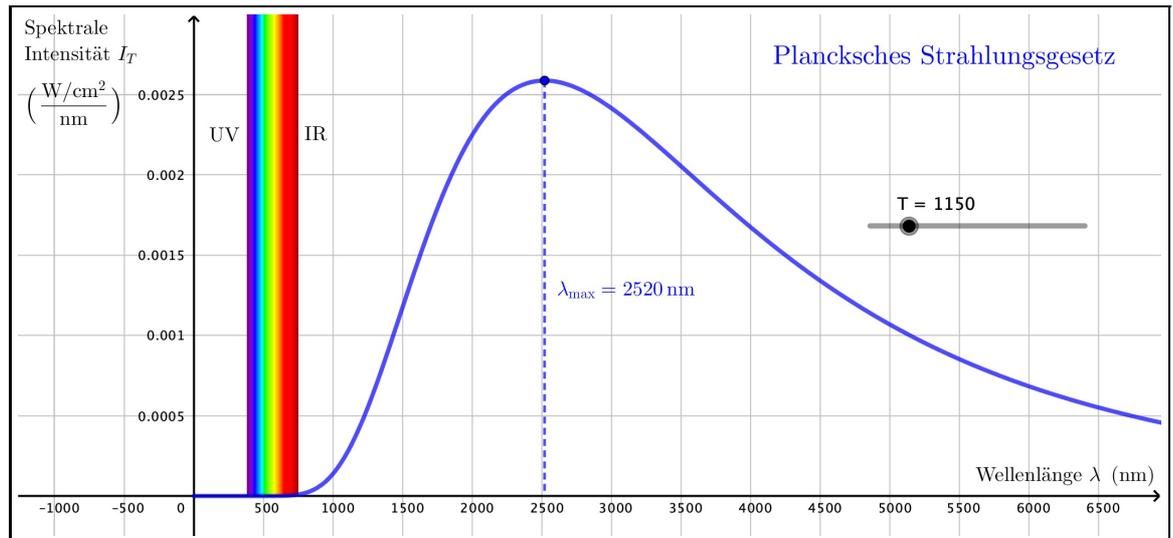
$$P_{\text{S}} = \sigma \cdot A \cdot T^4 = P_{\text{el}} \quad \Rightarrow \quad T^4 = \frac{P_{\text{el}}}{\sigma \cdot A}$$
$$\Rightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{P_{\text{el}}}{\sigma \cdot A}} = \sqrt[4]{\frac{117 \text{ W}}{5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot 0.00118 \text{ m}^2}} = 1150 \text{ K} \simeq \underline{\underline{880^\circ\text{C}}}$$

- (b) i. Mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz folgt für die Wellenlänge maximaler Intensität:

$$\lambda_{\max} = \frac{2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{T} = \frac{2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{1150 \text{K}} = 2.52 \mu\text{m} = 2520 \text{ nm}$$

Damit liegt diese Wellenlänge klar **im Infraroten**.

- ii. Der Draht ist bezüglich seiner Abstrahlung ohne grossen Fehler als schwarzer Körper anzusehen. Zu jeder Temperatur eines solchen **Temperaturstrahlers** gehört eine **Frequenzverteilung (Spektrum)**. Die **Wellenlänge maximaler Intensität** liegt **beim Draht im Infraroten**, aber sein **Spektrum reicht knapp in den sichtbaren Bereich hinein**. Daher erscheint der Draht auch orange-rot.



**Bewertungshinweis:** Die Grafik muss nicht unbedingt mit dabei sein. Wer sie aber qualitativ korrekt bringt, könnte hier allenfalls einen Extrapunkt erhalten, denn sie trifft den Nagel wirklich auf den Kopf.

## 6. Der Rote Riese von Aldebaran

- (a) Wir verwenden das Wiensche Verschiebungsgesetz zur Bestimmung der Wellenlänge maximaler Intensität:

$$\lambda_{\max} = \frac{2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{T} = \frac{2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{3873 \text{K}} = 0.748 \mu\text{m} \simeq \underline{\underline{750 \text{ nm}}}$$

Damit ist diese Wellenlänge gerade etwa am **oberen Rand des optischen Wellenlängenbereichs**, also eben tief rot.

- (b) Zuerst rechnen wir die Entfernung zu Aldebaran in Meter um:

$$r = 67 \text{ LJ} = 67 \cdot 3.0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 6.34 \cdot 10^{17} \text{ m}$$

Mit dem Abstandsgesetz lässt sich nun aus der hiesigen Strahlungsintensität auf die Leuchtkraft des Roten Riesen schliessen:

$$L = 4\pi r^2 \cdot I = 4\pi \cdot (6.34 \cdot 10^{17} \text{ m})^2 \cdot 11.4 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 5.76 \cdot 10^{28} \text{ W} = \underline{\underline{150 L_{\odot}}}$$

- (c) Die Oberfläche des Sterns sendet die eben berechnete Leuchtkraft aus. Mittels Stefan-Boltzmann-Gesetz (Stern = schwarzer Körper) schliessen wir unter Berücksichtigung der Oberflächentemperatur auf die Grösse dieser Oberfläche:

$$A = \frac{L}{\sigma \cdot T^4} = \frac{5.76 \cdot 10^{28} \text{ W}}{5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot (3873 \text{ K})^4} = 4.51 \cdot 10^{21} \text{ m}^2$$

Daraus folgt für den Sternradius:

$$A = 4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \sqrt{\frac{4.51 \cdot 10^{21} \text{ m}^2}{4\pi}} = 1.89 \cdot 10^{10} \text{ m} = \underline{\underline{27 R_{\odot}}}$$

## 7. Im Physikzimmer

- Rechtes Bild (IR-Kamera): Radiator gibt **Wärmestrahlung** ab. Diese wäre wohl noch stärker, wenn der Radiator schwarz wäre.
- §Offenbar will man gar nicht, dass der Radiator zu viel Wärmestrahlung abgibt! Strahlung erhöht v.a. die Temperatur der Gegenstände im Raum, nicht aber die Luft.  
(Alternativ könnte man auch vermuten, dass der Radiator nur im optischen Wellenlängenbereich weiss erscheint, aber im Infraroten eben schwarz, sodass er sehr gut Wärmestrahlung aussenden kann.)
- Die Luft soll auf jeden Fall auch erwärmt werden  $\Rightarrow$  dies geschieht durch **Wärmeleitung** (Erwärmung der Luft, die am Radiator vorbeiströmt) und Luft-**Konvektion** im Zimmer (warme Luft steigt über dem Radiator auf  $\Rightarrow$  **Umwälzung**).
- Fazit: Radiatoren sind weiss gestrichen, damit die Wärmestrahlung nicht zu dominant wird und genügend Wärme zur Erwärmung der Luft vorhanden ist.

## 8. Ein LötKolben als IR-Lampe

- (a) Mit dem Emissionsgrad zusammen ergibt sich aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz für die abgestrahlte Leistung folgender Ausdruck:

$$P_{\text{out}} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$$

Die abgestrahlte Leistung soll der aufgenommenen elektrischen Leistung entsprechen, sodass wir auf die Temperatur  $T$  schliessen können:

$$T = \sqrt[4]{\frac{P_{\text{out}}}{\varepsilon \cdot \sigma \cdot A}} = \sqrt[4]{\frac{24 \text{ W}}{0.76 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot 22 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}} = 709 \text{ K} \simeq \underline{\underline{440^\circ \text{C}}}$$

- (b)
- Der LötKolben wärmt auch die Umgebung. D.h., nicht die gesamte abgegebene Leistung ist Strahlung.  $P_{\text{out}}$  ist also kleiner, was die unter (a) berechnete Temperatur verringern würde. Ab einer gewissen Temperatur ist aber die Strahlungsabgabe gegenüber der Wärmeabgabe durch Wärmeleitung klar dominant, sodass die Korrektur eher gering ausfallen dürfte.
  - Der LötKolben empfängt auch Strahlung von der Umgebung (i.d.R. Zimmertemperatur). Damit würde der LötKolben also mehr Leistung aufnehmen als nur die elektrische. Er müsste somit auch wieder mehr Leistung abgeben, um dieselbe Temperatur zu behalten. Dieser Effekt würde die berechnete Temperatur nach oben korrigieren. Allerdings ist der Effekt wiederum gering, denn wegen der 4. Potenz von  $T$  im Stefan-Boltzmann-Gesetz ist die Strahlungsintensität der Umgebung ( $293^\circ \text{C}$ ) erheblich geringer als die abgestrahlte.

## 9. Doppelverglasung

Vorbemerkung: Bei einem realen doppelt verglasten Fenster wäre der Luftzwischenraum im Verhältnis zu den Glasscheiben nochmals dicker.

- (a) Wir setzen die Wärmestromdichten durch die Luft und durch eine Glasscheibe einander gleich und schliessen daraus auf das Verhältnis der Temperaturunterschiede über diesen Schichten:

$$j_L \stackrel{!}{=} j_G \Rightarrow \frac{\lambda_L \cdot \Delta\vartheta_L}{l_L} = \frac{\lambda_G \cdot \Delta\vartheta_G}{l_G}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta\vartheta_L}{\Delta\vartheta_G} = \frac{l_L \cdot \lambda_G}{l_G \cdot \lambda_L} = \frac{6.25 \text{ mm} \cdot 0.80 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}}{5.0 \text{ mm} \cdot 0.025 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}} = 40 \Leftrightarrow \Delta\vartheta_L = 40 \cdot \Delta\vartheta_G$$

Die Summe über die drei einzelnen Temperaturdifferenzen ist gleich der Gesamttemperaturdifferenz  $\Delta\vartheta = \vartheta_i - \vartheta_a = 22^\circ\text{C} - 1.0^\circ\text{C} = 21^\circ\text{C}$ , woraus wir folgern:

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_G + \Delta\vartheta_L + \Delta\vartheta_G = \Delta\vartheta_G + 40\Delta\vartheta_G + \Delta\vartheta_G = 42\Delta\vartheta_G \stackrel{!}{=} 21^\circ\text{C} \Leftrightarrow \Delta\vartheta_G = \underline{\underline{0.5^\circ\text{C}}}$$

- (b) Die eingeschlossene Luftschicht weist eine deutlich geringere **Wärmeleitfähigkeit** als das Glas auf. Dadurch lässt die Doppelverglasung eine viel geringere **Wärmestromdichte** zu als eine einfache Glasschicht, selbst wenn diese viel dicker wäre.

## 10. Die Trans-Alaska-Pipeline

- (a) Die Querschnittsfläche der Wand ergibt sich aus der Differenz zwischen Gesamtquerschnittsfläche der Säule und Querschnittsfläche des darin enthaltenen Hohlraums:

$$A = A_{\text{gesamt}} - A_{\text{hohl}} = \frac{\pi d_{\text{gesamt}}^2}{4} - \frac{\pi d_{\text{hohl}}^2}{4} = \frac{\pi}{4} (d_{\text{gesamt}}^2 - d_{\text{hohl}}^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} ((46 \text{ cm})^2 - (43.5 \text{ cm})^2) = 176 \text{ cm}^2 = 0.0176 \text{ m}^2$$

Damit und mit der Temperaturdifferenz zwischen Öl und Boden lässt sich nun der Wärmestrom berechnen:

$$J = \frac{\lambda_{\text{Stahl}} \cdot A \cdot \Delta\vartheta}{l} = \frac{65 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 0.0176 \text{ m}^2 \cdot (60^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C})}{3.2 \text{ m}} = 21.45 \text{ W} \simeq \underline{\underline{21 \text{ W}}}$$

- (b) Im Prinzip können wir einfach das Resultat aus (a) durch die Fläche dividieren:

$$j = \frac{J}{A} = \frac{21.45 \text{ W}}{0.0176 \text{ m}^2} = 1219 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \simeq \underline{\underline{0.12 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}}}$$

Andererseits lässt sich die Wärmestromdichte auch ohne Kenntnis der Querschnittsfläche bestimmen:

$$j = \frac{J}{A} = \frac{\frac{\lambda_{\text{Stahl}} \cdot A \cdot \Delta\vartheta}{l}}{A} = \frac{\lambda_{\text{Stahl}} \cdot \Delta\vartheta}{l} = \frac{65 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (60^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C})}{3.2 \text{ m}} = 1219 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \simeq \underline{\underline{0.12 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}}}$$

11. Ein Gedankenexperiment im Weltraum

- (a) Da das Blech schwarz eingefärbt sein soll, gehe ich von einem schwarzen Körper aus. Er absorbiert die gesamte ankommende Strahlung. Mit der Solarkonstante von  $S = 1367 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  folgt für die aufgenommene Strahlungsleistung:

$$P_{\text{in}} = S \cdot A = 1367 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 2.5 \text{ m}^2 = 3418 \text{ W}$$

Da sich beim Blech auf Dauer ein thermisches Gleichgewicht zwischen absorbierter und emittierter Leistung einstellt und wir aufgrund des Stefan-Boltzmann-Gesetzes über einen temperaturabhängigen Ausdruck für die abgestrahlte Leistung verfügen, lässt sich auf die Blechtemperatur schliessen. Für die emittierende Fläche muss nun allerdings die doppelte Blechfläche eingesetzt werden, denn schliesslich strahlen beide Blechseiten Wärme ab:

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \Rightarrow \sigma \cdot 2A \cdot T^4 = P_{\text{in}}$$

$$\Leftrightarrow T = \sqrt[4]{\frac{P_{\text{in}}}{\sigma \cdot 2A}} = \sqrt[4]{\frac{3418 \text{ W}}{5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot 2 \cdot 2.5 \text{ m}^2}} = 331 \text{ K} \simeq \underline{\underline{58^\circ \text{C}}}$$

Gerade für Aufgabe (b) und zugunsten von mehr signifikanten Ziffern lohnt es sich hier noch rasch zu zeigen, dass die Grösse des Blechs für dessen Temperatur irrelevant ist:

$$P_{\text{out}} \stackrel{!}{=} P_{\text{in}} \Rightarrow \sigma \cdot 2A \cdot T^4 = S \cdot A \Rightarrow 2\sigma \cdot T^4 = S$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{S}{2\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1367 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}}} \simeq 331.4 \text{ K} = \underline{\underline{58.20^\circ \text{C}}}$$

- (b) Es kommen vor allem zwei Massnahmen in Frage:

- Durch eine passende Bestreichung des Blechs resp. einer Raumkapsel können wir den Absorptionskoeffizienten  $\alpha$  verringern. Zwar gilt das Kirchhoff'sche Gesetz –  $\alpha \approx \varepsilon$ , "ein guter Absorber ist auch ein guter Emittierer" – man könnte also denken, dass sich dieser Effekt wieder rauskürzt, aber die absorbierte Strahlung ist kurzwellig, während die emittierte Strahlung langwellig ist. Deshalb lässt sich ein Unterschied erreichen, der dem Kirchhoff'schen Gesetz nicht widerspricht.
- Man könnte das Verhältnis von abstrahlender zu aufnehmender Fläche vergrössern. Wäre z.B. die von der Sonne abgewandte Seite gewellt oder einfach rund, so würde immer noch gleich viel Wärme aufgenommen, aber eben mehr abgestrahlt. Das dürfte ebenfalls helfen. Solange wir an der Gestalt des Blechs nichts ändern, kürzt sich die Fläche auf jeden Fall weg und hat somit keinen Einfluss auf die Temperatur, egal wie gross oder klein wir sie machen.