

Übungen zum Elektromagnetismus – Lösungen Serie 9

1. Der Elektromotor

(a) **Linke Spule:** Stromrichtung **von oben gesehen im Gegenuhrzeigersinn!**

Begründung: Oberes Spulenende soll magnetischer Nordpol sein.

⇒ Magnetfeldlinien müssen oben aus der Spule austreten ⇒ B -Feld im Spuleninnern nach oben

⇒ RHR: Magnetfeld zeigt im Spuleninnern genau dann nach oben, wenn der Spulenstrom von oben her gesehen im Gegenuhrzeigersinn fließt.

Rechte Spule: Stromrichtung **von oben gesehen im Uhrzeigersinn!** Begründung analog.

(b) Der Motor rotiert **von vorne gesehen im Uhrzeigersinn! Begründungen:**

i. Betrachte linke Seite der Drehspule ⇒ Strom fließt nach vorne (Daumen)

Linker Polschuh = Nordpol, rechter Polschuh = Südpol

⇒ Magnetfeldlinien führen von links nach rechts (Zeigefinger)

⇒ 3-Finger-Regel: Mittelfinger der rechten Hand zeigt nach oben

⇒ Linke Spulenseite erfährt \vec{F}_L nach oben, d.h., Spule dreht von vorne gesehen im Uhrzeigersinn. (Analog: Lorentzkraft auf rechte Seite der Drehspule zeigt nach unten.)

ii. Drehspulenstrom fließt von oben gesehen im Gegenuhrzeigersinn

⇒ Rechte-Hand-Regel: Daumen entlang Stromrichtung

⇒ Im Spuleninnern zeigt das B -Feld der Drehspule nach oben

⇒ Drehspule besitzt oben einen Nord- und unten einen Südpol

⇒ Pole der Drehspule wechselwirken mit den äusseren Magnetpolen (Polschuhe): Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an

⇒ Spule dreht von vorne gesehen im Uhrzeigersinn

(c) Man kann entweder die Stromrichtung in den beiden äusseren Spulen und somit die Richtung des äusseren Magnetfeldes umkehren, oder aber die Stromrichtung in der Drehspule umkehren.

(d) i. Die Lorentzkräfte auf die vordere und die hintere Spulenseite sind maximal, wenn die Spule senkrecht steht. Dann ist der Winkel zwischen Magnetfeld und Strom $\varphi = 90^\circ$ und damit wird $\sin \varphi$ maximal, nämlich gleich 1.

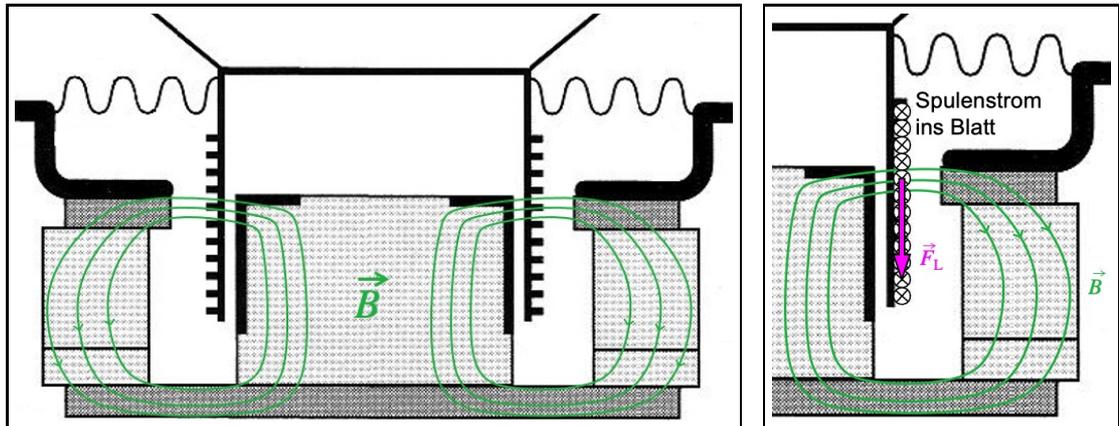
ii. Diese Lorentzkräfte sind für die Drehbewegung nicht relevant, weil sie nach hinten resp. nach vorne, also in Richtung der Drehachse wirken. (Kräfte parallel zu einer Achse können keine Drehung um eine solche Achse hervorrufen.)

(e) Der Kommutator ist dafür zuständig die Stromrichtung in der Drehspule alle 180° umzukehren. Ansonsten würde die Drehspule in der vertikalen Lage stehen bleiben (vgl. Aufgabe (b)).

Der Kommutator funktioniert beispielsweise mit **Schleifkontakten** zwischen den Enden der Drehspule und den beiden Anschlusspolen.

2. Der dynamische Lautsprecher

- (a) Die Feldlinien verlaufen hauptsächlich im Innern des Ringmagneten. Nur gerade im Raum zwischen Polkern und äusserem Ring gibt es äussere Feldlinien. In diesem Zwischenraum befindet sich die Ringspule. Das Magnetfeld läuft dort horizontal von innen nach aussen, also vom Polkern zum äusseren Ring, wie man der linken Skizze unten entnehmen kann.
- (b) Die rechte Skizze zeigt die Situation auf der rechten Seite des Polkerns vergrössert. Das Feld führt im Zwischenraum nach rechts. Der Strom in der Spule geht ins Blatt hinein. Mit der 3FR kann man überprüfen, dass die Spule in dieser Situation eine Lorentzkraft nach unten erfährt.



- (c) Im gezeigten Moment wird die Spule nach unten gedrückt. Im nächsten Augenblick hat sich aber die Spannung des Eingangssignals bereits wieder geändert. Es kann ein stärkerer, ein schwächerer, und insbesondere auch ein anders gerichteter Strom fließen. Dies führt dazu, dass die Schwingenspule, wie es der Name schon sagt, dem Signal folgend auf und ab schwingen wird. Dies tut sie mit Frequenzen im hörbaren Bereich. Die Schwingung wird auf die Membran übertragen, welche ihrerseits die Luft zu diesen Schwingungen anregt und so den Schall erzeugt, der schliesslich bei unserem Gehör ankommt.
- (d) Es ergibt sich eine Drahtlänge von:

$$N \cdot \pi \cdot d = 250 \cdot \pi \cdot 0.026 \text{ m} = \underline{\underline{20.4 \text{ m}}}$$

Damit folgt für die auf die Spule wirkende Lorentzkraft:

$$F_L = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \varphi = 0.89 \text{ A} \cdot 20.4 \text{ m} \cdot 0.0128 \text{ T} \cdot \sin 90^\circ = \underline{\underline{0.23 \text{ N}}}$$

3. Einen Draht anheben im Helmholtz-Spulenpaar – ein sichtbarer Effekt?

- (a) Der Strom I_{HH} im HH-Spulenpaar muss von uns aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn fließen.
Begründung:
- i. Die Lorentzkraft F_L auf den nach links fließenden Strom I_D soll nach oben zeigen.
 - ii. Wir wenden die 3FR mit der rechten Hand auf den Strom I_D an:
 - Daumen nach links (Stromrichtung)
 - Mittelfinger nach oben (F_L)
 - \Rightarrow Zeigefinger resp. B -Feld nach vorne in unsere Richtung
 - iii. Soll das B -Feld im Innern des HH-Spulenpaares nach vorne zeigen, so muss gemäss der RHR der Strom im Spulenpaar von uns aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn fließen.

- (b) Wir haben die Lorentzkraft auf den Draht zu berechnen. Dafür brauchen wir zunächst die magnetische Flussdichte des vom HH-Spulenpaar erzeugten B -Feldes:

$$B = 0.716 \cdot \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_{\text{HH}}}{R} = 0.716 \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 124 \cdot 9.0 \text{ A}}{0.150 \text{ m}} = 6.694 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Ungefähr $l = 30 \text{ cm}$ Draht befinden sich in diesem B -Feld und erfahren somit die Lorentzkraft. Der Draht verläuft senkrecht zur B -Feldrichtung durch dieses hindurch. Daraus folgt für den Betrag der Lorentzkraft:

$$F_L = I_D \cdot l \cdot B \cdot \sin \varphi = 3.5 \text{ A} \cdot 0.30 \text{ m} \cdot 6.694 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot \underbrace{\sin 90^\circ}_{=1} = 0.0070 \text{ N} = \underline{\underline{7.0 \text{ mN}}}$$

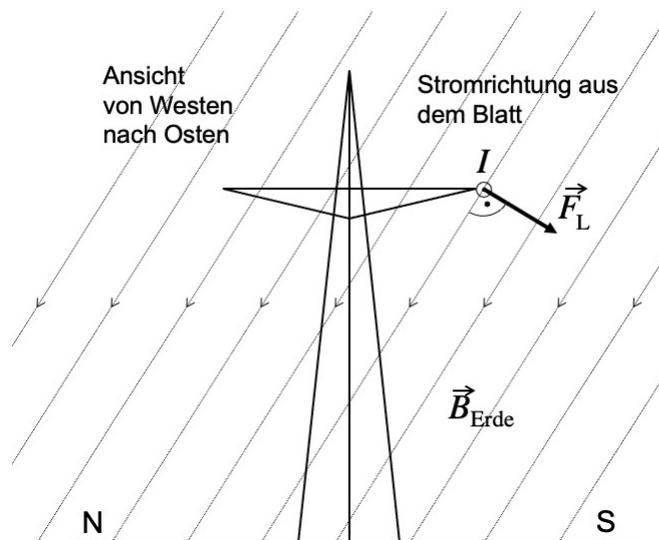
- (c) Die Gewichtskraft des Drahtes beträgt:

$$F_G = m \cdot g = 0.001 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 0.00981 \text{ N} \approx 10 \text{ mN}$$

Damit sind Lorentzkraft und Gewichtskraft in vergleichbarer Grössenordnung. Man wird beobachten, wie der Draht "fast ein bisschen schwebt".

4. Kraft auf eine Hochspannungsleitung

- (a) Die Situation der Hochspannungsleitung stellt sich folgendermassen dar:



- (b) Wie man anhand der Skizze überlegen kann, beträgt der Winkel φ zwischen der Stromrichtung und der Magnetfeldrichtung 90° .

Für die Lorentzkraft auf 150 m Leitung erhält man nun:

$$F_L = I \cdot l \cdot B_{\text{Erde}} \cdot \sin \varphi = 290 \text{ A} \cdot 150 \text{ m} \cdot 47.4 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \underbrace{\sin 90^\circ}_{=1} = \underline{\underline{2.1 \text{ N}}}$$

- (c) Dies ist eine messbare, verglichen mit der Gewichtskraft der Leitung aber auch eine extrem kleine Kraft:

$$F_G = m \cdot g = 300 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \approx 3000 \text{ N}$$

Die Gewichtskraft ist um etwa einen Faktor 1500 grösser als die Lorentzkraft. Eine Verstärkung der Masten aufgrund des Erdmagnetfeldes ist sicher nicht nötig.

(Die Angabe von 300 kg für die Masse des Leitungsabschnittes von 150 m Länge ist vermutlich sogar noch untertrieben...)

5. Amperemeter mit Drehspulmesswerk

- (a) Betrachten wir z.B. die rechte Seite der Drehspule. Dort fließt der Strom nach hinten (Daumen). Diese Spulenseite soll eine Kraft gegen unten erfahren (Mittelfinger), damit der Zeiger in die nach rechts ausschlägt. Dies ist laut der Drei-Finger-Regel nur möglich, wenn der Zeigefinger nach rechts zeigt. Das Magnetfeld muss also von links nach rechts zeigen, und das bedeutet, dass sich der Nordpol des Hufeisenmagneten links, und der Südpol rechts befinden muss.
- (b) Angegeben ist der Gesamtbetrag aller wirkenden Lorentzkräfte auf die linke und die rechte Seite der Drehspule. Dies entspricht bei 80 Windungen 160 mal der Lorentzkraft auf einen einzelnen Strom der angegebenen Stärke und Leiterlänge. Schliesslich kommt pro Windung einmal diese Stromstärke dazu und bei zwei beitragenden Seiten verdoppelt sich das Ganze, also $2N$ -mal den einzelnen Strom. Es folgt:

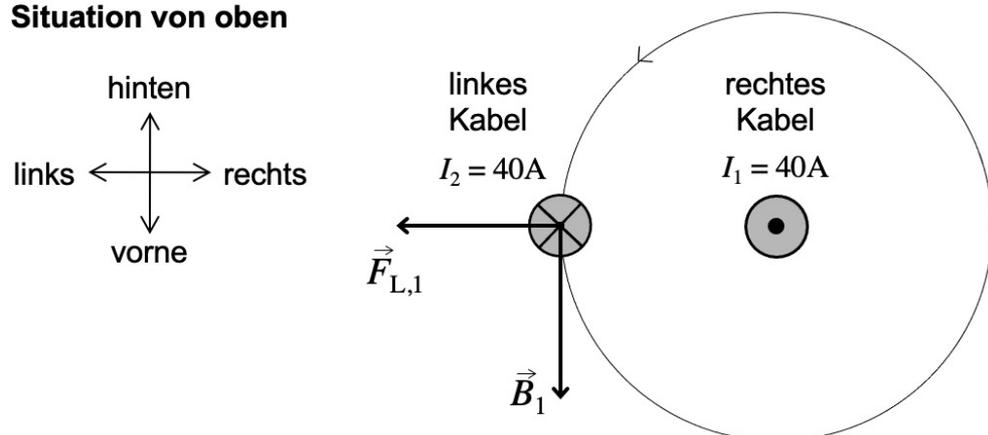
$$F_L = 2 \cdot N \cdot I \cdot l \cdot B \cdot \underbrace{\sin \varphi}_{=1} \Rightarrow B = \frac{F_L}{2 \cdot N \cdot I \cdot l} = \frac{0.75 \text{ N}}{2 \cdot 80 \cdot 0.50 \text{ A} \cdot 0.032 \text{ m}} = \underline{\underline{0.29 \text{ T}}}$$

- (c) In der gezeigten horizontalen Lage der Spule verlaufen Strom- und Feldlinien ohnehin parallel zueinander. Eine Lorentzkraft existiert in dieser Situation also gar nicht. Aber selbst wenn sich die Spule etwas gedreht hat und eine Lorentzkraft tatsächlich vorhanden ist, kann sie gar nichts zu einer Drehbewegung beitragen, weil sie parallel zur Richtung der Drehachse steht.

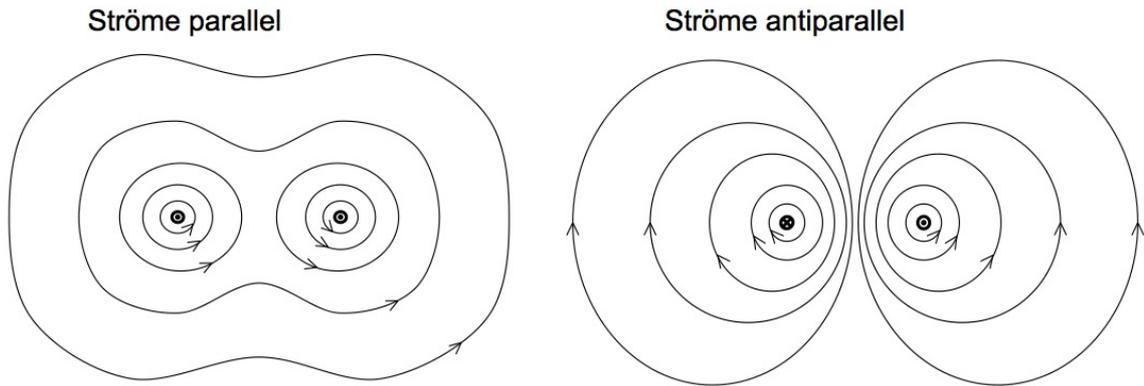
6. Zwei Kabel

- (a) Kurz: Die beiden Drähte führen antiparallele Ströme. Dann erfährt der eine Draht eine abstossende Lorentzkraft im Magnetfeld des anderen Drahtes und umgekehrt. Für die ausführliche Begründung ist eine Skizze hilfreich (vgl. Skizze unten).
- Der rechte Draht führt den Strom I_1 nach oben. Er erzeugt ein Magnetfeld, dessen Feldvektor \vec{B}_1 am Ort des Stromes I_2 nach vorne zeigt (RHR, Daumen nach oben).
 - Im linken Draht fließt der Strom I_2 abwärts. Im nach vorne zeigenden Magnetfeld \vec{B}_1 erfährt dieser Strom eine Lorentzkraft $\vec{F}_{L,1}$ nach links, also weg vom anderen Draht (3FR, rechte Hand, Daumen nach unten, Zeigefinger nach vorne \Rightarrow Mittelfinger nach links).
 \Rightarrow Die Drähte stossen sich gegenseitig ab.

Situation von oben



- (b) In kombinierten Feldlinienbildern mehrerer Quellen erkennt man Anziehung daran, dass es gemeinsame Feldlinien gibt. Umgekehrt wird Abstossung daraus ersichtlich, dass sich die Einzelfelder voneinander wegdrücken. Genau dies ist hier bei antiparallelen Strömen der Fall:



- (c) Zuerst bestimmen wir die durch I_1 am Ort von I_2 hervorgerufene magnetische Flussdichte B_1 :

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 40 \text{ A}}{2\pi \cdot 0.016 \text{ m}} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 40}{0.016} \text{ T} = 0.00050 \text{ T}$$

Damit lässt sich die Lorentzkraft auf 2 cm des anderen Kabels bestimmen:

$$F_L = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \varphi = 40 \text{ A} \cdot 0.02 \text{ m} \cdot 0.00050 \text{ T} \cdot \sin 90^\circ = 0.00040 \text{ N} = \underline{\underline{0.4 \text{ mN}}}$$

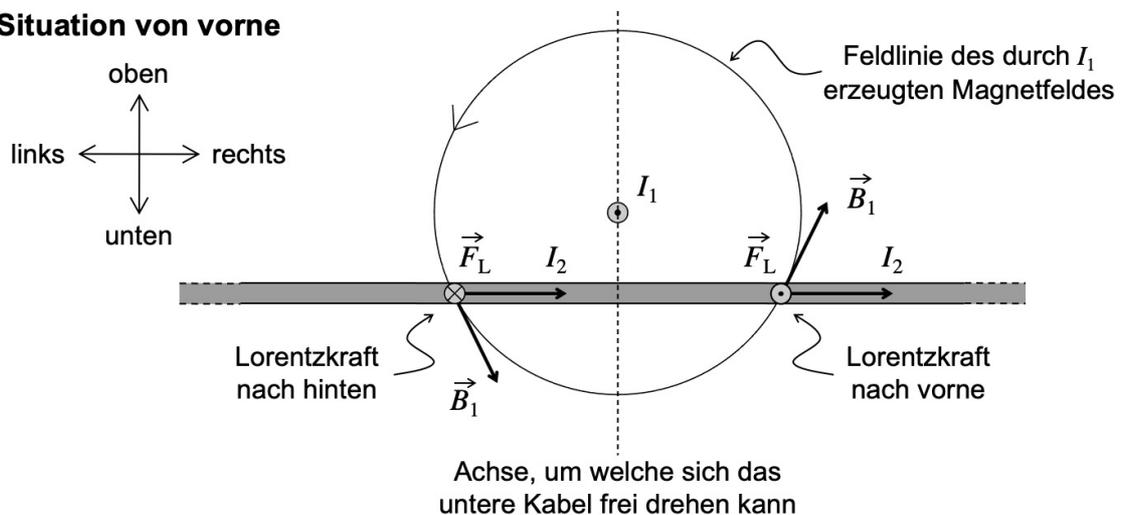
7. Eine neue Situation mit zwei Kabeln

- (a) In dieser Situation wird sich das untere, frei drehbare Kabel von oben gesehen im Uhrzeigersinn drehen, bis es parallel zum oberen Kabel ausgerichtet ist. Dann fließen die Ströme in den beiden Kabeln parallel und es liegt eine anziehende Situation vor.

Begründen lässt sich diese Ausrichtung auf zwei Arten:

- Es wird eine anziehende Situation angestrebt, in welcher sich die Einzelfelder der beiden Kabel im Feldlinienbild zu einem gemeinsamen Feldlinienbild ergänzen (vgl. Aufgabe 6.(b)).
- Im Magnetfeld des oberen Kabels erfährt der rechte Teil des unteren Kabels eine Lorentzkraft in unsere Richtung und der linke Teil eine Kraft weg von uns, wie man sich anhand der 3FR klarmachen kann.

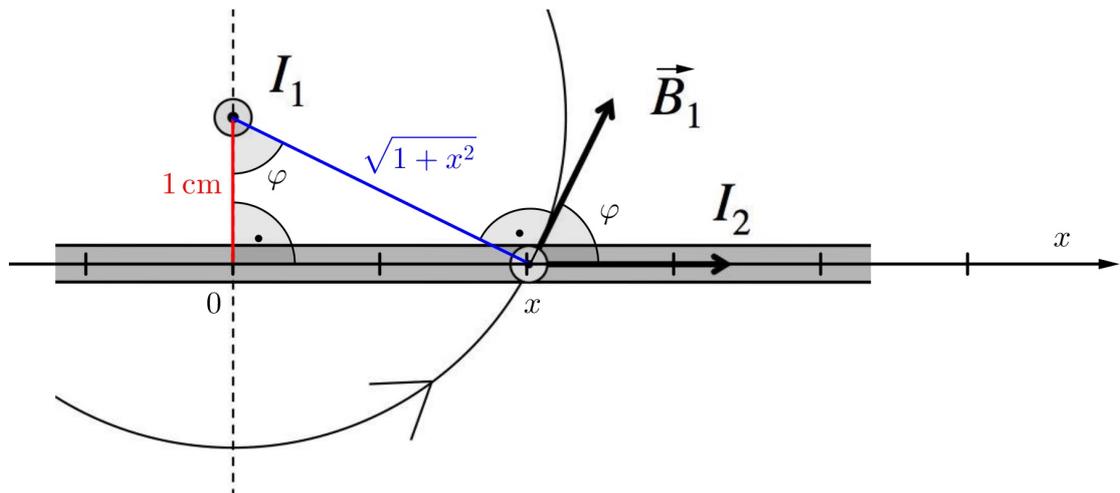
Situation von vorne



- (b) **Vorüberlegung zur Existenz von Lorentzkraft-Maxima im unteren Kabel:** Die Kabelstelle direkt unterhalb des oberen Kabels erfährt keine Lorentzkraft, denn dort verlaufen die Stromrichtung und die Richtung des Magnetfeldes parallel zueinander. Ebenso muss die Lorentzkraft im Fernbereich gegen Null streben, denn das Magnetfeld des oberen Leiters wird immer schwächer. Folglich muss es in einer mittleren Distanz ein Maximum des Lorentzkraftbetrages geben.

Tipps zur selbständigen Lösung

- Man betrachte folgende Skizze, in der erstens eine x -Achse längs des unteren Kabels eingeführt wird und zweitens ein paar geometrische Konstruktionen mit dem Winkel φ eingezeichnet sind:



- Die verwendete Längeneinheit ist stets Zentimeter. Der Abstand zwischen dem oberen Kabel und der Stelle x beträgt somit:

$$r(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

- Weiter bemerke man:

$$\sin \varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

- Für die Lorentzkraft auf ein kleines Drahtstückchen der Länge l an der Stelle x gilt:

$$F_L(x) = I_2 \cdot l \cdot B_1(x) \cdot \sin \varphi(x)$$

- Dabei ist die magnetische Flussdichte $B_1(x)$ gegeben durch:

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r(x)} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot \sqrt{1 + x^2}}$$

- Schliesslich kann man alles zusammensetzen und erhält einen Ausdruck der Form:

$$F_L(x) = \text{konst.} \cdot \frac{x}{1 + x^2}$$

Dieser Ausdruck soll in Abhängigkeit von x maximal werden, d.h. $F'_L(x) = 0$. Um die Stelle x mit maximaler Lorentzkraft zu bestimmen, muss also F_L nach x abgeleitet werden!

Explizite Lösung

Gemäss der Grafik bei den Tipps notieren wir:

$$r(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \text{und} \quad \sin \varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Für die durch den Strom I_1 an der Stelle x erzeugte Flussdichte $B_1(x)$ ergibt sich demnach:

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r(x)} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot \sqrt{1+x^2}}$$

Damit können wir für die Lorentzkraft $F_L(x)$ auf ein Drahtstückchen der ganz kleinen Länge l am Ort x folgern:

$$F_L(x) = I_2 \cdot l \cdot B_1(x) \cdot \sin \varphi(x) = I_2 \cdot l \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \underbrace{\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi}}_{=\text{konst.}} \cdot \frac{x}{1+x^2}$$

Dieser Ausdruck muss nach x abgeleitet werden. Dazu verwenden wir die **Quotientenregel**:

$$\text{Ist } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ so gilt: } f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Angewendet auf unser Beispiel heisst das:

$$F'_L(x) = \text{konst.} \cdot \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \text{konst.} \cdot \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \text{konst.} \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Eine notwendige Bedingung für eine Maximalstelle lautet, dass $F'_L(x) = 0$ sein muss.

Soll ein Bruch gleich Null sein, so muss sein Zähler gleich Null sein, woraus folgt:

$$1 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

Und damit sind wir am Ziel: Die Lorentzkraft hat an zwei Stellen den maximal möglichen Betrag, nämlich einen Zentimeter links und einen Zentimeter rechts von der Stelle, wo der untere Draht genau unter dem oberen durchkommt.

Hier noch der Graph der Funktion $F_L(x) = \text{konst.} \cdot \frac{x}{1+x^2}$, wobei ich die Konstante gleich 1 gesetzt habe. Die beiden Extrema liegen, wie berechnet, bei den Stellen $x = \pm 1$:

