

Übungen zum Elektromagnetismus

Serie 10: Lorentzkräfte bei geladenen Teilchen

1. Die Geschwindigkeit der Elektronen im Fadenstrahlrohr

Im Fadenstrahlrohr werden Elektronen von einer "Elektronenkanone" senkrecht zu den Feldlinien ins homogene Magnetfeld des Helmholtz-Spulenpaares eingeschossen. Dort folgen sie aufgrund der Lorentzkraft einer Kreisbahn.

Die Elektronen werden von der **Beschleunigungsspannung** U_B auf eine bestimmte Geschwindigkeit v gebracht. Bei verschiedenen Werten von U_B und Stromstärken I_{HH} resp. Magnetfeldstärken B des Helmholtz-Spulenpaares ergeben sich unterschiedliche Bahndurchmesser d .

In dieser Aufgabe sollst du aufgrund von eigenen Messdaten die Geschwindigkeiten v der Elektronen bei verschiedenen Spannungseinstellungen ermitteln.

Daten zum Helmholtz-Spulenpaar: Windungszahl $N = 124$, Radius $R = 14.8 \text{ cm}$.

- (a) Das Fadenstrahlrohr erlaubt die Ausmessung des Bahndurchmessers d aufgrund des darin enthaltenen Messgestänges. Nimm fünf Datensätze (U_B , d , I_{HH}) bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen auf (siehe Vorgabe). Wähle als Bahndurchmesser jeweils 8 cm oder 10 cm. Das ist für die Genauigkeit der Messung besser.

Grösse	Messwerte / Rechenresultate				
Beschleunigungsspannung U_B (V)	200	250	300	350	400
Bahndurchmesser d (cm)					
Stromstärke I_{HH} (A)					
Feldstärke B (mT)					
e^- -Geschwindigkeit v ($\frac{\text{km}}{\text{s}}$)					

Bestimme aus den fünf Datensätzen (U_B , d , I_{HH}) jeweils zuerst die magnetische Flussdichte B in mT und danach die Elektronengeschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Verwende dafür die Gleichungen (8.3) und (10.5) aus dem Skript.

Entscheidende Überlegung: Wir beobachten, dass sich die Elektronen auf einer Kreisbahn bewegen. Demzufolge muss die auf sie wirkende resultierende Kraft eine Zentripetalkraft sein, also stets senkrecht zur aktuellen Bewegungsrichtung v stehen! Da die Lorentzkraft F_L im Magnetfeld des Helmholtz-Spulenpaares die einzige wirklich relevante Kraft auf die Elektronen ist, muss sie gerade die Zentripetalkraft ausmachen:

$$F_Z = F_L$$

- (b) **Zusatzaufgabe:** Nachdem du die fünf Elektronengeschwindigkeiten bestimmt hast, kannst du den Zusammenhang zwischen Beschleunigungsspannung U und daraus resultierender Elektronengeschwindigkeit v studieren.

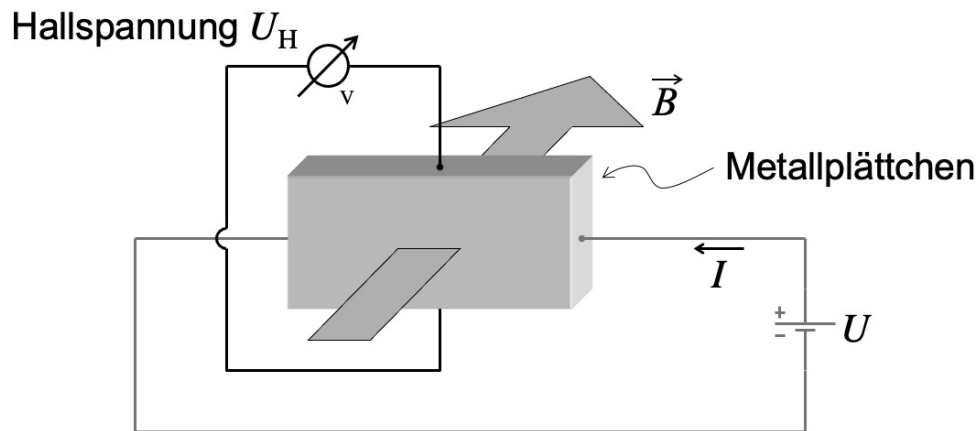
Sind U und v proportional zueinander oder gilt ein anderer Zusammenhang? Welche Mathematik verknüpft die beiden Grössen am ehesten?

$$v = \text{konst.} \cdot U \qquad v = \text{konst.} \cdot U^2 \qquad v = \text{konst.} \cdot \sqrt{U} \qquad ???$$

Welche Vermutung zutreffen sollte, wird im Anhang E des Skripts erläutert.

2. Der Hall-Sensor

Zur **Messung einer Magnetfeldstärke** wurde im Jahre 1879 von einem gewissen **Edwin Hall** ein Gerät erfunden, das auch heute noch verwendet wird, z.B. in Magnetfeldsensoren. Der **Hall-Sensor** (siehe unten) funktioniert auch heute noch nach dem folgenden Prinzip:



Ein vom Strom I durchflossenes Metallplättchen wird in das auszumessende Magnetfeld gebracht. Dabei wird darauf geachtet, dass die Linien des Magnetfeldes durch das Plättchen hindurch verlaufen. (Oben: Strom I nach links, Magnetfeld B nach hinten.)

Schliesst man ein Voltmeter an die obere und die untere Seite des Plättchens an, so misst man eine elektrische Spannung, der man den Namen **Hallspannung** U_H gab. Offenbar bilden sich im Magnetfeld B aufgrund des Stromes I an der Ober- und der Unterseite des Plättchens elektrische Pole! Je stärker das Magnetfeld ist, desto stärker ausgeprägt sind diese Pole und umso stärker ist die gemessene Hallspannung U_H .

- Erkläre, wie diese "Hall-Polung" des Metallplättchens entsteht, und folgere aus deinen Überlegungen, wo der positive und wo der negative Pol entstanden ist.
- Der Hall-Sensor hat historische Bedeutung. Mit ihm konnte Edwin Hall erstmals zeigen, dass die frei beweglichen Ladungsträger in Metallen negativ geladen sein müssen. Warum ist der Hall-Versuch ein experimenteller Nachweis für diesen Befund? Erkläre!



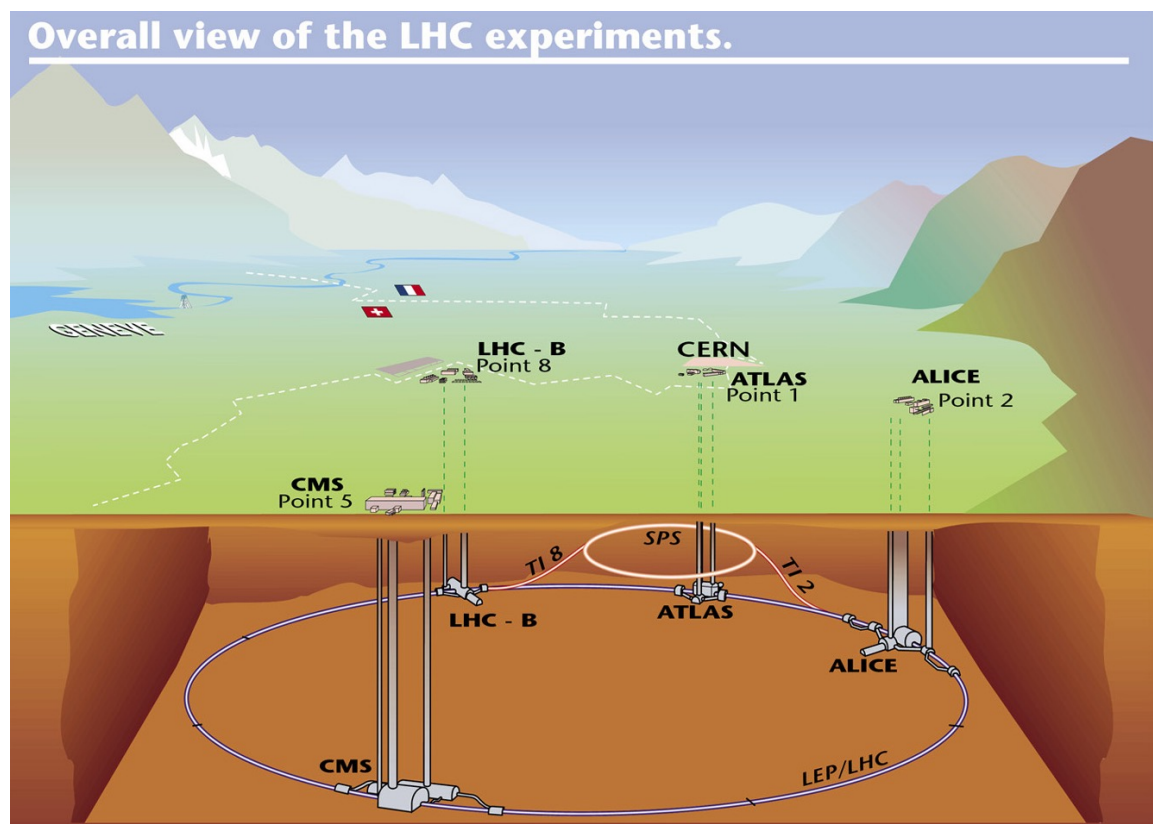
3. Relativistische Protonen im LHC-Speicherring

Im grossen Teilchenbeschleuniger **LHC (Large Hadron Collider)** am CERN in Genf werden Protonen auf nahezu Lichtgeschwindigkeit ($v \approx c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) beschleunigt. Zur Speicherung dieser hochenergetischen Protonen werden sie in einen 26.659 km langen unterirdischen Kreistunnel geschickt, in welchem sie durch die Lorentzkraft in einem 5.1 T starken Magnetfeld auf der Kreisbahn gehalten werden. (Die Erzeugung eines solch starken Magnetfeldes über die ganze Tunnellänge hinweg ist eine enorme technische Herausforderung!)

Protonendaten:	Ladung:	$q_p = +e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
	Ruhemasse:	$m_p = 1.672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

- (a) Auf dem Bild unten soll ein Proton von oben her gesehen im Uhrzeigersinn im LHC unterwegs sein. In welche Richtung muss das Magnetfeld zeigen, durch welches das Proton auf der Kreisbahn gehalten wird? Gib eine kurze Begründung unter Anführung und Anwendung der entsprechenden Regel!
- (b) Bei einem sich sehr schnell bewegenden Proton (Geschwindigkeit nahe der Lichtgeschwindigkeit) ist gemäss Albert Einsteins **Spezieller Relativitätstheorie (SRT)** die Masse viel grösser, als wenn das Proton ruht.

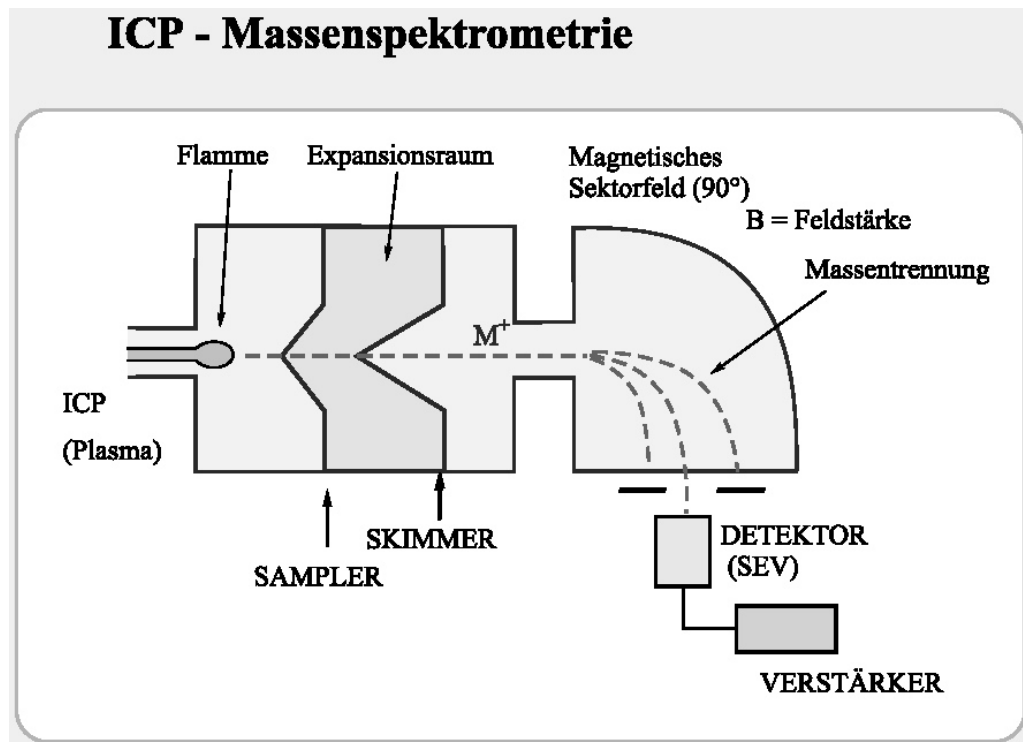
Bestimme aus den oben gegebenen Daten zur Kreisbewegung im LHC die Masse eines im Ring "gespeicherten" Protons und vergleiche das Resultat mit seiner Ruhemasse. Um welchen Faktor ist die Masse dieser ultraschnellen Protonen grösser als im Zustand der Ruhe?



4. Massenspektroskopie

Repetition Kernphysik: Atomkerne setzen sich aus Protonen und Neutronen zusammen. Die Anzahl der Protonen bestimmt, um welches Element es sich handelt. Die Anzahl Neutronen kann bei einem gegebenen Element variieren. Man spricht von den **Isotopen** des Elementes (= Atome des gleichen Elementes mit unterschiedlicher Neutronenzahl im Kern).

Das Nuklid ^{12}C enthält z.B. 6 Protonen und 6 Neutronen, während das ^{13}C -Nuklid 6 Protonen und 7 Neutronen beinhaltet. Die beiden Isotope treten in der Natur mit unterschiedlicher relativer Häufigkeit auf: ^{12}C -Nuklide sind im **natürlichen Isotopengemisch** mit 98.9 % wesentlich häufiger vorhanden als ^{13}C -Nuklide mit 1.1 % relativer Häufigkeit.



Bei einer Messung in einem Massenspektrographen sollen 1-fach ionisierte Methan-Moleküle (CH_4 -Moleküle, bei denen ein Elektron entfernt wurde) mit einer Geschwindigkeit von $490.0 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ in ein homogenes Magnetfeld der Stärke 270.0 mT geschossen werden.

Im Magnetfeld teilt sich der Teilchenstrahl in einen sehr starken Haupt- und einen schwächeren Nebenstrahl auf: Der stärkere Strahl beschreibt eine Kreisbahn mit einem Radius von $r_1 = 30.159 \text{ cm}$. Beim schwächeren Strahl beträgt der Bahnradius $r_2 = 32.046 \text{ cm}$.

- (a) Fasse zunächst in Worte, warum sich der anfänglich kompakte Strahl im Magnetfeld des Massenspektrometers in einen Haupt- und einen Nebenstrahl aufteilt.
- (b) Bestimme aus den Angaben oben die Massen der beiden CH_4 -Ionen mit verschiedenen Kohlenstoff-Isotopen.

Hinweis: Nimm bei allen Zwischenresultaten immer mindestens 5 Ziffern mit.

- (c) **Zusatzaufgabe:** Bestimme schliesslich aus den Resultaten von (b) die Masse des im ^{13}C -Kern zusätzlich eingebundenen Neutrons und vergleiche das Resultat mit der Masse eines einzelnen freien Neutrons ($m_n = 1.6750 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$). Welchen erstaunlichen, dir bereits bekannten Unterschied stellt man fest?

5. Protonen im inneren Van-Allen-Gürtel

Repetition: Der **Sonnenwind** besteht hauptsächlich aus Protonen und Elektronen. Das Erdmagnetfeld fängt diese geladenen Teilchen ab und führt sie auf Spiralbahnen in Richtung Erdmagnetpole. Trifft ein Teilchen dort auf ein geeignetes Atom in den oberen Atmosphärenschichten, so leuchtet dieses auf und es entsteht das als **Polarlicht** bekannte Himmelsphänomen.

Das Neue: Die Verdichtung der Erdmagnetfeldlinien gegen die Pole hin führt dazu, dass die meisten Teilchen umkehren, bevor sie in die Erdatmosphäre eindringen. So sausen viele Teilchen auf ihren Spiralbahnen zwischen den Erdmagnetpolen hin und her (siehe Abbildung rechts oben).

Auf diese Weise entstehen im erdnahen Weltraum zwei Zonen erhöhter Teilchenkonzentration, die sogenannten **Strahlungs- oder Van-Allen-Gürtel** (siehe Abbildung rechts Mitte).

Wir betrachten den **inneren** Van-Allen-Gürtel, der die hin und her spiralenden **Protonen** enthält.¹ Dieser innere Strahlungsgürtel liegt in 1000 km bis 6000 km über der Erdoberfläche. Dort hat das Erdmagnetfeld eine Stärke von nur noch etwa $8 \mu\text{T}$.

Zu einem im inneren Van-Allen-Gürtel "gefangenen" Proton gehören z.B. die folgenden typischen Daten:

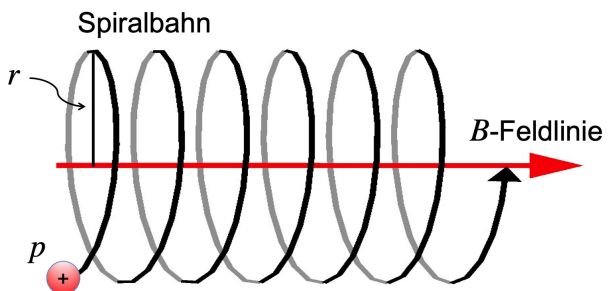
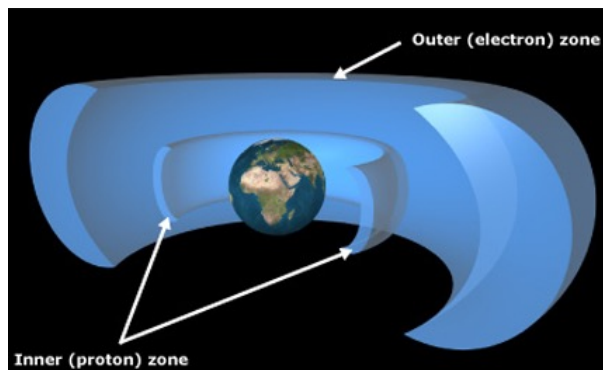
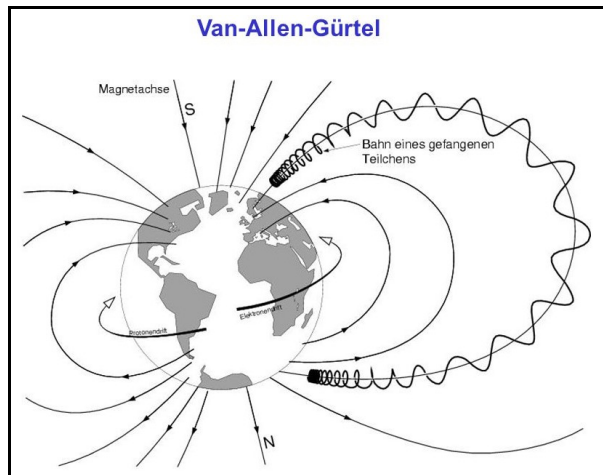
- Geschwindigkeits-Komponente senkrecht zu den Magnetfeldlinien: $v_{\perp} = 45\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$,
- Protonenmasse: $m_p = 1.672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

- (a) Bestimme den **Radius r der Protonen-Spiralbahn** (siehe unterste Abbildung).

Hinweis: Mit der angegebenen Senkrecht-Komponente $v_{\perp}$ der Geschwindigkeit kann bei der Berechnung der Lorentzkraft $\varphi = 90^\circ$ gesetzt werden und auch sonst kann man arbeiten, wie wenn es sich um eine Kreisbahn handeln würde.

- (b) **Zusatzaufgabe:** Wie müsste man die oberste Abbildung verändern, wenn man die Spiralbahn eines Protons im inneren Van-Allen-Gürtel **massstäblich** zeichnen wollte?

Tipp: Es wären mehrere Korrekturen notwendig! Verwende für deine Überlegungen Angaben aus dem Text, dein Wissen aus der Geografie, aber auch das Resultat aus (a).



¹Im äusseren Van-Allen-Gürtel findet man dementsprechend die Elektronen.

6. Repetition zum Fadenstrahlrohr

Das folgende Bild zeigt das **Fadenstrahlrohr** aus dem Unterricht. Der leuchtende Kreis im Innern des Rohres ist der Elektronenstrahl.



- (a) Im Magnetfeld des Helmholtz-Spulenpaares kreisen die Elektronen von uns aus gesehen **im Gegenuhrzeigersinn**.

In welche Richtung fließt demzufolge der Strom im Helmholtzspulenpaar? Im Uhrzeiger- oder im Gegenuhrzeigersinn?

Begründe deine Antwort, indem du die entsprechenden elektromagnetischen Gesetzmäßigkeiten zitierst und auf die Situation anwendest!

Tipp: Die Richtung des Magnetfeldes im Innern des Helmholtz-Spulenpaares muss ein Zwischenresultat der Überlegung sein.

- (b) Aktuell beträgt der Durchmesser der Elektronen-Kreisbahn gerade 10.0 cm.

Wie stark ist demzufolge der Strom im Helmholtz-Spulenpaar, wenn die Elektronen durch eine Spannung von $U_B = 380 \text{ V}$ beschleunigt wurden?

Elektronenmasse: $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Tipp: Verwende die Musterlösung zur Aufgabe 1.(c) resp. den Anhang E, um aus der Beschleunigungsspannung die Geschwindigkeit der Elektronen zu bestimmen.