Das Newton'sche Aktionsprinzip als Differentialgleichung

Die Ortsfunktion der Newton'schen Mechanik: Die *Ortsfunktion* $x(t)$ beschreibt, an welchem *Ort* x sich der betrachtete Körper zu jedem beliebigen *Zeitpunkt* t befindet:

$$\text{Ortsfunktion:} \qquad t \quad \longmapsto \quad x(t)$$

Ableitungen der Ortsfunktion: Mit der Ortsfunktion $x(t)$ sind auch die *Geschwindigkeitsfunktion* $v(t)$ und die *Beschleunigungsfunktion* $a(t)$ verknüpft, denn die *Geschwindigkeit* v ist die *Veränderungsrate des Ortes* x und die *Beschleunigung* a ist die *Veränderungsrate der Geschwindigkeit*, also:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$$
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = x''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}$$

Rep.: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ist die *Leibniz*-Schreibweise und $\dot{x}$ die *Newton*-Schreibweise für die Ableitung von x nach der Zeit t. Die von uns am meisten verwendete Ableitungsnotation $x'(t)$ wird als *Lagrange*-Schreibweise bezeichnet.

Der Zweck des Aktionsprinzips: Das Ziel der *Newton'schen Mechanik* ist das Aufspüren der Ortsfunktion $x(t)$. Wie geht das? Mit dem *Aktionsprinzip*! Die auf den Körper wirkenden *Kräfte* steuern die Bewegung, indem sie zur resultierenden Kraft zusammengefasst werden und dieses F_{res} in jedem Moment die Beschleunigung festlegt:

$$F_{\mathrm{res}} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} \qquad \text{resp.} \qquad a = \ddot{x} = \frac{F_{\mathrm{res}}}{m}$$

Dabei steht die *Masse* m für die *Trägheit* des Körpers – je grösser m, desto kleiner a resp. $\ddot{x}$.

Zusammensetzung der resultierenden Kraft: F_{res} hängt von allen Faktoren ab, die Einfluss auf die einzelnen Kräfte haben. Das können – je nach Situation – ganz viele Umstände sein, die eine Rolle spielen. Insbesondere können diese Kräfte von der Zeit t, vom momentanen Ort x oder von der Geschwindigkeit $\dot{x}$ abhängen. Die resultierende Kraft ist somit als Funktion von t, x und $\dot{x}$ zu verstehen:

$$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{res}}(t, x, \dot{x})$$

Diese Aussage wird bei der Betrachtung von Beispielen noch klarer.

Das Aktionsprinzip als Differentialgleichung: Mit diesem Gedanken notieren wir das Aktionsprinzip nochmals neu:

$$F_{\mathrm{res}}(t, x, \dot{x}) = m \cdot \ddot{x}$$

Hier haben wir einen ganz neuen Gleichungstyp vor Augen. Die Lösung dieser Gleichung ist nicht mehr eine einzelne Zahl x, sondern eine ganze Funktion $x(t)$! Es ist diejenige Ortsfunktion $x(t)$, die diese Gleichung zu jedem beliebigen Zeitpunkt t erfüllt. Dabei beschreibt die Gleichung eine Beziehung zwischen der Variable t, der Funktion x und ihren ersten beiden Ableitungen $\dot{x}$ und $\ddot{x}$, weshalb sie als *Differentialgleichung (DGL)* für die Funktion $x(t)$ bezeichnet wird.

Das Aktionsprinzip der klassischen Mechanik ist also stets eine Differentialgleichung (DGL) für die Ortsfunktion $x(t)$!

Lösen von Differentialgleichungen: In aller Regel sind Differentialgleichungen richtig widerspenstig und schwierig zu lösen. Meistens lässt sich gar kein algebraischer Ausdruck in der uns gewohnten Form für die Lösung angeben, sondern wir können nur eine numerische Approximation ermitteln. Das mag im ersten Moment als mathematisch unbefriedigend erscheinen, für Wissenschaft und Technik ist das aber durchaus zufriedenstellend – auch weil wir dank Computern über mächtige numerische Hilfsmittel verfügen.