

Lösungen zur Kernphysik – Serie 2

1. Eine typische Spaltungsreaktion im Schweizer AKW

Für den Massenverlust berechnen wir bei dieser Spaltungsreaktion:

$$\begin{aligned}
 \Delta M &= M_{\text{Edukte}} - M_{\text{Produkte}} \\
 &= m_{\text{Kern}}(^{235}_{92}\text{U}) + m_n - m_{\text{Kern}}(^{139}_{56}\text{Ba}) - m_{\text{Kern}}(^{94}_{36}\text{Kr}) - 3 m_n \\
 &= [m_{\text{A}}(^{235}_{92}\text{U}) - 92 m_e] - [m_{\text{A}}(^{139}_{56}\text{Ba}) - 56 m_e] - [m_{\text{A}}(^{94}_{36}\text{Kr}) - 36 m_e] - 2 m_n \\
 &= m_{\text{A}}(^{235}_{92}\text{U}) - m_{\text{A}}(^{139}_{56}\text{Ba}) - m_{\text{A}}(^{94}_{36}\text{Kr}) - 2 m_n \\
 &= (235.043\,923 - 138.908\,841 - 93.934\,400) \cdot u - 2 m_n \\
 &= 3.045 \cdot 10^{-28} \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass sich die Elektronenmassen von der dritten zur vierten Zeile komplett wegstreichen. Das ist bei Spaltungsreaktionen der Normalfall. Nun ergibt sich aus dem Massenverlust für die freigesetzte Energiemenge:

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 = 3.045 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot c^2 = 2.736 \cdot 10^{-11} \text{ J} = \underline{\underline{171 \text{ MeV}}}$$

2. Instabile Kerne und Radioaktivität

(a) Für den Massenverlust ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \Delta M &= M_{\text{Edukt}} - M_{\text{Produkte}} \\
 &= m_{\text{Kern}}(^{198}_{79}\text{Au}) - m_{\text{Kern}}(^{198}_{80}\text{Hg}) - m_e - m_{\bar{\nu}_e} - m_{\gamma} \\
 &= [m_{\text{A}}(^{198}_{79}\text{Au}) - 79 m_e] - [m_{\text{A}}(^{198}_{80}\text{Hg}) - 80 m_e] - m_e - 0 - 0 \\
 &= m_{\text{A}}(^{198}_{79}\text{Au}) - m_{\text{A}}(^{198}_{80}\text{Hg}) \\
 &= (197.968\,242 - 197.966\,752) \cdot u = 2.474 \cdot 10^{-30} \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Auch hier beim β^- -Zerfall streichen sich die Elektronenmassen raus. Das ist bei dieser Zerfallsart tatsächlich immer so. Der nachfolgende γ -Zerfall hat darauf keinen Einfluss.

Für die freigesetzte Energiemenge folgt:

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 = 2.474 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot c^2 = 2.224 \cdot 10^{-13} \text{ J} = \underline{\underline{1.39 \text{ MeV}}}$$

(b) Die kinetische Energie der Zerfallsprodukte beträgt insgesamt $1.39 \text{ MeV} = 1\,390\,000 \text{ eV}$! Da kommt das zum violetten Licht gehörende Photon mit seinen 2.7 eV sehr bescheiden daher. Auch die 4.2 eV des Ultraviolett-Photons sind dagegen sehr gering.

Im Vergleich zu diesen Photonen dürften die Zerfallsprodukte demzufolge richtige Geschosse mit grosser Durchschlagskraft und Schadenswirkung sein. Wir sehen hier die energetische Begründung für die **Gefährlichkeit der Strahlung aus einer radioaktiven Quelle!**

3. Eine wichtige Kernreaktion

- (a) Es handelt sich um eine **Kernfusion**. Zwei leichtere Kohlenstoff-Kerne fusionieren zu einem schwereren Natrium-Kern. Dabei wird offenbar ein Proton abgestossen.
- (b) Wiederum berechnen wir zunächst den Massenverlust:

$$\begin{aligned}\Delta M &= M_{\text{Edukte}} - M_{\text{Produkte}} \\ &= 2 \cdot m_{\text{Kern}}(^{12}_6\text{C}) - m_{\text{Kern}}(^{23}_{11}\text{Na}) - m_p \\ &= 2 \cdot [m_A(^{12}_6\text{C}) - 6 m_e] - [m_A(^{23}_{11}\text{Na}) - 11 m_e] - m_p \\ &= 2 \cdot m_A(^{12}_6\text{C}) - m_A(^{23}_{11}\text{Na}) - m_e - m_p \\ &= (2 \cdot 12.000\,000 - 22.989\,770) \cdot u - m_e - m_p \\ &= 3.9935 \cdot 10^{-30} \text{ kg}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die frei gesetzte Energie:

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 = 3.9935 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot c^2 = 3.589 \cdot 10^{-13} \text{ J} = \underline{\underline{2.24 \text{ MeV}}}$$

- (c) Immer noch gilt (vgl. Aufgabe 2.(b)): Die bei der Reaktion frei werdende Energie nehmen die Produkt-Teilchen in Form von **kinetischer Energie** (= Bewegungsenergie) mit. Diese Energiemengen sind für die Grössenordnungen der Teilchen sehr gross. Das ist auch der Grund dafür, dass die bei einer Kernreaktion fortgeschleuderten leichten Teilchen als gefährliche Strahlung anzusehen sind.
- (d) Die Kernkraft ist extrem kurzreichweitig. D.h., damit die beiden C-12-Kerne überhaupt fusionieren können, müssen sie sehr nahe zueinander kommen. Beide Kerne sind aber 6-fach positiv geladen. Das bedeutet, sie stossen sich sehr stark elektrisch ab. Die beiden Kerne müssen also mit immenser kinetischer Energie aufeinander zu rasen, damit sie sich so nahe kommen können. Und so grosse Teilchenenergien entsprechen eben sehr hohen Temperaturen, wie sie nur innerhalb eines Plasmas herrschen können.
- (e) Nicht nur die Temperatur muss enorm sein, damit eine solche Fusion stattfindet. Auch die Dichte resp. der Druck muss gewaltig sein, damit überhaupt hinreichend viele C-12-Kerne nahe beieinander sind, sodass sich ab und zu zwei solche Teilchen finden und diese Fusionsreaktion mehrfach ablaufen wird. Ein solcher Zustand existiert in der Natur nur im Endstadium eines grösseren Sterns, in dem das sogenannte **Kohlenstoffbrennen** eingesetzt hat. Unsere Sonne wird diesen Zustand gar nie erreichen. Sie besitzt zu wenig Masse, sodass die entsprechenden Temperatur- und Druckwerte nicht realisiert werden.

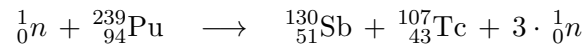
Andererseits ist aber völlig klar, dass ein früherer Stern in dieser Region des Universums einmal dieses Stadium erreicht haben muss, denn wie sonst könnte es bei uns Natrium und andere schwerere Kerne resp. Elemente geben. Und hier zeigt sich die Wichtigkeit dieser Fusionsreaktion. Das Leben auf unserer Erde basiert mitunter auch auf der Existenz schwerer Kerne. Ohne sie könnte das Leben in der uns bekannten Form hier nicht vorhanden sein.

4. Die Kernspaltung von Plutonium-239

(a) Für den fehlenden Tochterkern in der Spaltungsreaktion finden wir:

$$Z = 94 - 43 = 51 \quad \text{und} \quad A = 1 + 239 - 107 - 3 = 130$$

Somit lautet die vollständige Reaktionsgleichung:



(b) Für den Massenverlust bei dieser Reaktion erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta M &= M_{\text{Edukte}} - M_{\text{Produkte}} \\ &= m_{\text{Kern}}({}_{94}^{239}\text{Pu}) + m_n - m_{\text{Kern}}({}_{56}^{144}\text{Ba}) - m_{\text{Kern}}({}_{38}^{94}\text{Sr}) - 2 m_n \\ &= [m_{\text{A}}({}_{94}^{239}\text{Pu}) - 94 m_e] - [m_{\text{A}}({}_{56}^{144}\text{Ba}) - 56 m_e] - [m_{\text{A}}({}_{38}^{94}\text{Sr}) - 38 m_e] - m_n \\ &= m_{\text{A}}({}_{94}^{239}\text{Pu}) - m_{\text{A}}({}_{56}^{144}\text{Ba}) - m_{\text{A}}({}_{38}^{94}\text{Sr}) - m_n \\ &= (239.052\,163 - 143.922\,953 - 93.915\,361) \cdot u - m_n \\ &= 3.4072 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \end{aligned}$$

Wie üblich bei Spaltungsreaktionen haben sich die Elektronenmassen aus der Rechnung rausgestrichen.

Für die Reaktionsenergie ergibt sich aus der Masse-Energie-Äquivalenz:

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 = 3.4072 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot c^2 = 3.062 \cdot 10^{-11} \text{ J} = \underline{\underline{191 \text{ MeV}}}$$

5. Massendefekt in der Chemie

Aus der Avogadrokonstante und der molar frei werdenden Energie erhalten wir die frei werdende Bindungsenergie pro Reaktion:

$$E_{\text{B}} = \frac{286\,000 \frac{\text{J}}{\text{mol}}}{6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}} = 4.75 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Mit der Masse-Energie-Äquivalenz ergibt sich ein Massendefekt von:

$$\Delta M = \frac{E_{\text{B}}}{c^2} = \frac{4.75 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{c^2} = \underline{\underline{5.29 \cdot 10^{-36} \text{ kg}}}$$

Dies ist deutlich kleiner als eine Elektronenmasse:

$$\frac{m_e}{\Delta M} = \frac{m_e}{5.29 \cdot 10^{-36} \text{ kg}} = 172\,000$$

Bei der Knallgasreaktion ist das entstehende H_2O -Molekül also um den 172 000-sten Teil einer Elektronenmasse leichter als die Massen des H_2 und eines halben O_2 -Moleküls zusammen. Das ist ein extrem geringer Massenverlust, den man in Messungen nicht bemerkt. Und deshalb wird die Masse in chemischen Reaktionen als eine Konstante angesehen.

6. Energiefreisetzung beim α -Zerfall

(a) Für den Massenverlust beim α -Zerfall von Po-210 berechnen wir:

$$\begin{aligned}\Delta M &= m_{\text{Kern}}(^{210}_{84}\text{Po}) - m_{\text{Kern}}(^{206}_{82}\text{Pb}) - m_{\text{Kern}}(^4_2\text{He}) \\ &= [m_{\text{A}}(^{210}_{84}\text{Po}) - 84 m_e] - [m_{\text{A}}(^{206}_{82}\text{Pb}) - 82 m_e] - [m_{\text{A}}(^4_2\text{He}) - 2 m_e] \\ &= m_{\text{A}}(^{210}_{84}\text{Po}) - m_{\text{A}}(^{206}_{82}\text{Pb}) - m_{\text{A}}(^4_2\text{He}) \\ &= (209.982\,874 - 205.974\,449 - 4.002\,6033) \text{ u} \\ &= 9.667 \cdot 10^{-30} \text{ kg}\end{aligned}$$

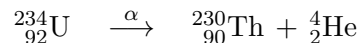
Bemerkungen:

- Die Werte für die Nuklidmassen findet man in diesem Fall alle im Tabellenanhang A.
- Die Elektronenmassen streichen sich komplett raus! Das ist immer so bei α - und β^- -Zerfällen, ebenso bei Kernspaltungsreaktion. Wenn du das weisst und in der Prüfung anmerkst, darfst du auch direkt mit der dritten Rechenzeile beginnen und somit wohl ein bisschen Zeit sparen. . .
- Für die TR-Eingabe ist es praktisch die Atommasseneinheit u auszuklammern. So brauche ich sie nur ein einziges Mal aus dem Katalog der Konstanten abzurufen. Vergiss diese Eingabe aber ja nicht!

Aus dem Massenverlust berechnen wir für die freigesetzte Energiemenge:

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 = 9.667 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot c^2 = 8.688 \cdot 10^{-13} \text{ J} = \underline{\underline{5.42 \text{ MeV}}}$$

(b) Die Zerfallsreaktion von U-234 lautet:



(c) Für den Massenverlust und die freigesetzte Energie erhalten wir hier:

$$\begin{aligned}\Delta M &= m_{\text{A}}(^{234}_{92}\text{U}) - m_{\text{A}}(^{230}_{90}\text{Th}) - m_{\text{A}}(^4_2\text{He}) \\ &= (234.040\,952 - 230.033\,134 - 4.002\,6033) \text{ u} \\ &= 8.659 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \\ \Rightarrow \Delta E &= \Delta M \cdot c^2 = 8.659 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot c^2 = 7.783 \cdot 10^{-13} \text{ J} = \underline{\underline{4.86 \text{ MeV}}}\end{aligned}$$

(d) Auch der Tochterkern Pb-206 erhält einen geringen Anteil der freigesetzten Energie, die ja in Form von kinetischer Energie anfällt. Wegen seiner im Vergleich zum α -Teilchen sehr grossen Masse, ist dieser Anteil aber nur gering.

(Weitere Erläuterung: Dem α -Zerfall folgt übrigens ein γ -Zerfall nach. D.h., der in der Reaktionsgleichung notierte Tochterkern Pb-206 befindet sich direkt nach dem Zerfall noch nicht in seinem Grundzustand. Er muss sich durch Aussendung eines γ -Quants zuerst abregen. Diese zusätzlich ausgesandte Energiemenge ist allerdings im von uns berechneten Energiebetrag mit enthalten!)

7. Der Bethe-Weizsäcker-Zyklus

(a) Die 6 Reaktionsgleichungen lauten:

1. Fusion und γ -Zerfall: $^{12}_6\text{C} + \frac{1}{1}p \longrightarrow ^{13}_7\text{N} + \gamma$
2. β^+ -Zerfall: $^{13}_7\text{N} \longrightarrow ^{13}_6\text{C} + e^+ + \nu_e$
3. Fusion und γ -Zerfall: $^{13}_6\text{C} + \frac{1}{1}p \longrightarrow ^{14}_7\text{N} + \gamma$
4. Fusion und γ -Zerfall: $^{14}_7\text{N} + \frac{1}{1}p \longrightarrow ^{15}_8\text{O} + \gamma$
5. β^+ -Zerfall: $^{15}_8\text{O} \longrightarrow ^{15}_7\text{N} + e^+ + \nu_e$
6. Fusion und α -Zerfall: $^{15}_7\text{N} + \frac{1}{1}p \longrightarrow ^{12}_6\text{C} + \frac{4}{2}\text{He}$

Bemerkung: Natürlich kennen wir im Moment noch keine Details von radioaktiven Zerfällen. Insbesondere haben wir noch nie über β^+ -Zerfälle gesprochen und ein Teilchen wie das **Positron** e^+ ist uns noch sehr fremd. Im Moment nehmen wir einfach mal zur Kenntnis, dass es das gibt, dass es einfach positiv geladen ist und dass es exakt dieselbe Masse hat wie ein Elektron. Tatsächlich ist ein Positron das sogenannte **Antiteilchen** des Elektrons. Das bedeutet, es wird sich zusammen mit einem Elektron gegenseitig vernichten, wenn es auf ein solches trifft.

- (b) Man könnte an dieser Stelle beispielsweise vermuten, dass die abschliessende Abspaltung eines α -Teilchens energetisch am ergiebigsten ist, so wie wir das schon beim dritten Schritt des Proton-Proton-Zyklus sehen konnten. Im Prinzip ist eine solche Voraussage aber nicht wirklich schlüssig. Richtigen Aufschluss werden erst die genauen Berechnungen in Aufgabe (c) liefern.
- (c) Für die Reaktionsenergien erhalten wir (die γ und die Neutrinos haben keine Masse; die Positronen e^+ haben dieselbe Massen wie Elektronen e^-):

$$\begin{aligned}
 1. \quad \Delta M &= m_{\text{Kern}}(^{12}_6\text{C}) + m_p - m_{\text{Kern}}(^{13}_7\text{N}) \\
 &= [m_{\text{A}}(^{12}_6\text{C}) - 6 m_e] + m_p - [m_{\text{A}}(^{13}_7\text{N}) - 7 m_e] \\
 &= m_{\text{A}}(^{12}_6\text{C}) - m_{\text{A}}(^{13}_7\text{N}) + m_p + m_e \\
 &= (12.000\,000 - 13.005\,739) \text{ u} + m_p + m_e = 3.464 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \\
 \Rightarrow \Delta E &= \Delta M \cdot c^2 = 3.464 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot c^2 = 3.113 \cdot 10^{-13} \text{ J} = \underline{\underline{1.94 \text{ MeV}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \Delta M &= m_{\text{Kern}}(^{13}_7\text{N}) - m_{\text{Kern}}(^{13}_6\text{C}) - m_e \\
 &= [m_{\text{A}}(^{13}_7\text{N}) - 7 m_e] - [m_{\text{A}}(^{13}_6\text{C}) - 6 m_e] - m_e \\
 &= m_{\text{A}}(^{13}_7\text{N}) - m_{\text{A}}(^{13}_6\text{C}) - 2 m_e \\
 &= (13.005\,739 - 13.003\,355) \text{ u} + m_e = 2.137 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \\
 \Rightarrow \Delta E &= \Delta M \cdot c^2 = 2.137 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot c^2 = 1.921 \cdot 10^{-13} \text{ J} = \underline{\underline{1.20 \text{ MeV}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \Delta M &= m_{\text{Kern}}(^{13}_6\text{C}) + m_p - m_{\text{Kern}}(^{14}_7\text{N}) \\
&= [m_{\text{A}}(^{13}_6\text{C}) - 6 m_e] + m_p - [m_{\text{A}}(^{14}_7\text{N}) - 7 m_e] \\
&= m_{\text{A}}(^{13}_6\text{C}) - m_{\text{A}}(^{14}_7\text{N}) + m_p + m_e \\
&= (13.003\,355 - 14.003\,074) \text{ u} + m_p + m_e = 1.346 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \\
\Rightarrow \Delta E &= \Delta M \cdot c^2 = 1.346 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \cdot c^2 = 1.210 \cdot 10^{-12} \text{ J} = \underline{\underline{7.55 \text{ MeV}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \Delta M &= m_{\text{Kern}}(^{14}_7\text{N}) + m_p - m_{\text{Kern}}(^{15}_8\text{O}) \\
&= [m_{\text{A}}(^{14}_7\text{N}) - 7 m_e] + m_p - [m_{\text{A}}(^{15}_8\text{O}) - 8 m_e] \\
&= m_{\text{A}}(^{14}_7\text{N}) - m_{\text{A}}(^{15}_8\text{O}) + m_p + m_e \\
&= (14.003\,074 - 15.003\,065) \text{ u} + m_p + m_e = 1.301 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \\
\Rightarrow \Delta E &= \Delta M \cdot c^2 = 1.301 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \cdot c^2 = 1.169 \cdot 10^{-12} \text{ J} = \underline{\underline{7.30 \text{ MeV}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad \Delta M &= m_{\text{Kern}}(^{15}_8\text{O}) - m_{\text{Kern}}(^{15}_7\text{N}) - m_e \\
&= [m_{\text{A}}(^{15}_8\text{O}) - 8 m_e] - [m_{\text{A}}(^{15}_7\text{N}) - 7 m_e] - m_e \\
&= m_{\text{A}}(^{15}_8\text{O}) - m_{\text{A}}(^{15}_7\text{N}) - 2 m_e \\
&= (15.003\,065 - 15.000\,109) \text{ u} + m_e = 3.087 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \\
\Rightarrow \Delta E &= \Delta M \cdot c^2 = 3.087 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot c^2 = 2.774 \cdot 10^{-13} \text{ J} = \underline{\underline{1.73 \text{ MeV}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad \Delta M &= m_{\text{Kern}}(^{15}_7\text{N}) + m_p - m_{\text{Kern}}(^{12}_6\text{C}) - m_{\text{Kern}}(^4_2\text{He}) \\
&= [m_{\text{A}}(^{15}_7\text{N}) - 7 m_e] + m_p - [m_{\text{A}}(^{12}_6\text{C}) - 6 m_e] - [m_{\text{A}}(^4_2\text{He}) - 2 m_e] \\
&= m_{\text{A}}(^{15}_7\text{N}) - m_{\text{A}}(^{12}_6\text{C}) - m_{\text{A}}(^4_2\text{He}) + m_p + m_e \\
&= (15.000\,109 - 12.000\,000 - 4.002\,6033) \text{ u} + m_p + m_e = 8.852 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \\
\Rightarrow \Delta E &= \Delta M \cdot c^2 = 8.852 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot c^2 = 7.956 \cdot 10^{-13} \text{ J} = \underline{\underline{4.97 \text{ MeV}}}
\end{aligned}$$

Die ertragreichsten Reaktionen sind also die beiden Fusionen in der Mitte des Zyklus, wo jeweils ein Proton mit dem bisherigen Kern verschmilzt.