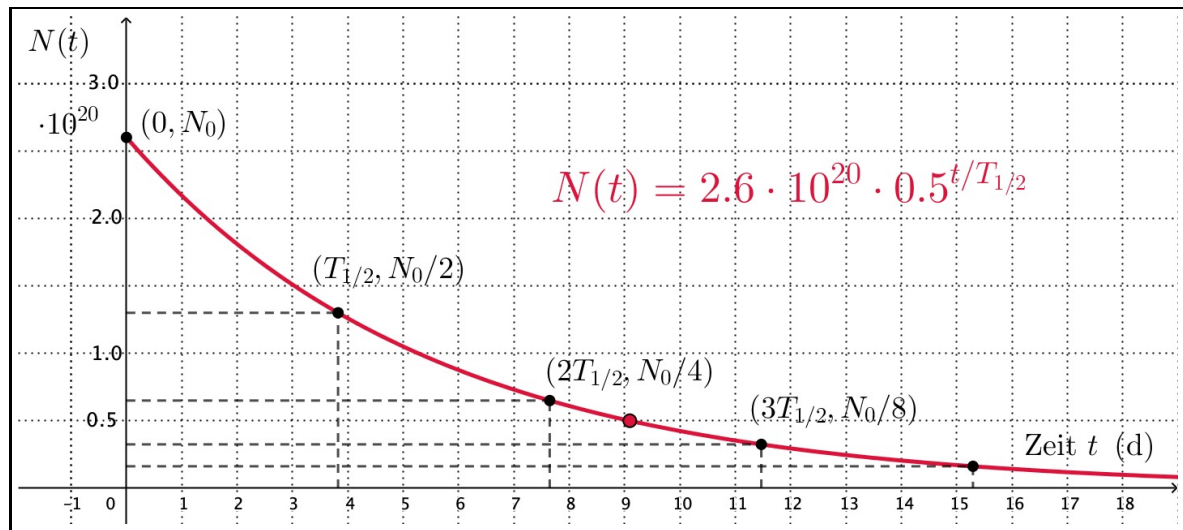


Übungen zur Kernphysik – Lösungen Serie 5

1. Das Zerfallsgesetz graphisch

Die Halbwertszeit von Rn-222 beträgt 3.824 Tage. Die Anzahl der noch vorhandenen Radon-Nuklide halbiert sich also alle 3.824 Tage. Somit ergibt sich folgendes Diagramm:



2. Einzelne Rechnungen zum Zerfallsgesetz

- (a) i. Die Halbwertszeit von Po-210 beträgt $T_{1/2} = 138.4$ d. Für die Anzahl Kerne in 13.2 mg ergibt sich aus der Nuklidmasse von $m_A = 210$ u:

$$N_0 = \frac{m}{m_A} = \frac{13.2 \text{ mg}}{210 \text{ u}} = \frac{13.2 \cdot 10^{-6} \text{ kg}}{210 \text{ u}} = 3.785 \cdot 10^{19}$$

Somit erhalten wir für die Aktivität der Polonium-Quelle:

$$A_0 = \frac{N_0 \cdot \ln 2}{T_{1/2}} = \frac{3.785 \cdot 10^{19} \cdot \ln 2}{138.4 \text{ d}} = \frac{3.785 \cdot 10^{19} \cdot \ln 2}{138.4 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = \underline{\underline{2.19 \cdot 10^{12} \text{ Bq}}}$$

- ii. Nach 200 Tagen erhalten wir für die noch vorhandene Polonium-210-Masse resp. für die Aktivität:

$$m(200 \text{ d}) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200 \text{ d}}{T_{1/2}}} = 13.2 \text{ mg} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200 \text{ d}}{138.4 \text{ d}}} = \underline{\underline{4.85 \text{ mg}}}$$

$$A(200 \text{ d}) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200 \text{ d}}{T_{1/2}}} = 2.19 \cdot 10^{12} \text{ Bq} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200 \text{ d}}{138.4 \text{ d}}} = \underline{\underline{8.04 \cdot 10^{11} \text{ Bq}}}$$

- (b) Zu P-32 gehört eine Halbwertszeit von $T_{1/2} = 14.28$ d. Die Frage kann umformuliert werden: "Nach welcher Zeit sind noch 5 % der anfänglichen Menge vorhanden?" Mit dieser Fragestellung lässt sich das Zerfallsgesetz direkt anwenden:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = 0.05 \cdot N_0 = 5\% \cdot N_0 \quad | : N_0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = 0.05 \quad | \log_{1/2}(\dots)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{T_{1/2}} = \log_{1/2} 0.05 \quad | \cdot T_{1/2}$$

$$\Leftrightarrow t = T_{1/2} \cdot \log_{1/2} 0.05 \quad | \text{Halbwertszeit einsetzen}$$

$$= 14.28 \text{ d} \cdot \log_{1/2} 0.05 = \underline{\underline{61.7 \text{ d}}}$$

(c) Der noch vorhandene Bruchteil beträgt:

$$p(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{85 \text{ Mio. a}}{4.2 \text{ Mio. a}}} = 8.1 \cdot 10^{-7} = \underline{\underline{0.000081\%}}$$

(d) Laut Aufgabenstellung sind nach 10.0 min noch 8.8 % der anfänglichen Menge vorhanden. Daraus folgern wir mit dem Zerfallsgesetz:

$$\begin{aligned} N(10 \text{ min}) &= N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10 \text{ min}}{T_{1/2}}} = 0.088 \cdot N_0 & | : N_0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10 \text{ min}}{T_{1/2}}} = 0.088 & | \log_{1/2}(\dots) \\ \Leftrightarrow & \frac{10 \text{ min}}{T_{1/2}} = \log_{1/2} 0.088 & | \cdot \frac{T_{1/2}}{\log_{1/2}(0.088)} \\ \Leftrightarrow & T_{1/2} = \frac{10 \text{ min}}{\log_{1/2} 0.088} = \underline{\underline{2.85 \text{ min}}} \end{aligned}$$

(e) i. Wir berechnen die Anzahl Cs-137-Nuklide in einem Kilogramm und somit die Anzahl noch nicht stattgefundenen Zerfälle:

$$N_0 = \frac{m}{m_A} = \frac{1 \text{ kg}}{137 \text{ u}} = \underline{\underline{4.396 \cdot 10^{24}}}$$

Wie lange dauert es, bis davon noch 1 Milliarde Radionuklide übrig sind? Mit der Halbwertszeit von Cs-137 von $T_{1/2} = 30.1671 \text{ a}$ ergibt sich unter Anwendung des Zerfallsgesetzes:

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \Rightarrow t = T_{1/2} \cdot \log_{1/2} \left(\frac{N(t)}{N_0}\right) \\ &= 30.1671 \text{ a} \cdot \log_{1/2} \left(\frac{1\,000\,000\,000}{4.396 \cdot 10^{24}}\right) = \underline{\underline{1568 \text{ a}}} \end{aligned}$$

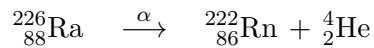
ii. Für die dann noch vorhandene Aktivität ergibt sich:

$$\begin{aligned} A(1560 \text{ a}) &= \underbrace{\frac{N_0 \cdot \ln 2}{T_{1/2}}}_{= A_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1560 \text{ a}}{T_{1/2}}} \\ &= \frac{4.396 \cdot 10^{24} \cdot \ln 2}{30.1671 \text{ a}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1568 \text{ a}}{30.1671 \text{ a}}} \\ &= \frac{4.396 \cdot 10^{24} \cdot \ln 2}{30.1671 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1568 \text{ a}}{30.1671 \text{ a}}} = \underline{\underline{0.723 \text{ Bq}}} \end{aligned}$$

Nach 1560 Jahren findet pro Sekunde noch etwas weniger als ein Zerfall statt.

3. Marie Curie und das Radium

(a) Als Zerfallsreaktion ergibt sich aus der Nuklidtabelle:



(b) Die Halbwertszeit von Ra-226 beträgt 1600 a. Damit erhalten wir:

$$N(t) = 90\% \cdot N_0 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \Rightarrow 0.9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600 \text{ a}}} \Rightarrow t = 243 \text{ a}$$

Von 1911 aus gerechnet wird also im Jahre 2154 nur noch 90 % der ursprünglichen Radiummenge vorhanden sein.

(c) Für den Prozentsatz nach bis heute 110 Jahren ergibt sich:

$$\frac{N(t)}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{110 \text{ a}}{1600 \text{ a}}} = 0.953 = 95.3\% \Rightarrow 100\% - 95.3\% = \underline{\underline{4.7\%}}$$

(d) Das Radium-226-Nuklid besitzt, wie der Name schon andeutet, eine Atommasse von ziemlich genau 226 u. Damit lässt sich das Gramm in eine Anzahl Atome umrechnen:

$$N = \frac{m}{m_A} = \frac{0.001 \text{ kg}}{226 \text{ u}} = 2.665 \cdot 10^{21}$$

Mit dieser in 1 g Ra-226 enthaltenen Anzahl Radionuklide ergibt sich für die Aktivität:

$$1 \text{ Ci} = A(1 \text{ g } {}^{226}\text{Ra}) = \frac{N \cdot \ln 2}{T_{1/2}} = \frac{2.665 \cdot 10^{21} \cdot \ln 2}{1600 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = \underline{\underline{3.66 \cdot 10^{10} \text{ Bq}}}$$

4. Die Radiokarbon-Methode

Der Hinweis besagt, dass die Aktivität $A(t)$ zum Zeitpunkt t jeweils proportional ist zur noch vorhandenen Menge Radionuklide, also:

$$A(t) = \text{konst.} \cdot N(t) = \text{konst.} \cdot N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} \quad \text{Startzeitpunkt: } A(0) = \text{konst.} \cdot N_0$$

Durch Verhältnisbildung der Aktivitäten zum Zeitpunkt t und zum Zeitpunkt $t = 0$ fällt die Proportionalitätskonstante konst. heraus:

$$\frac{A(t)}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$$

Und somit können wir aufgrund des Aktivitätenverhältnisses auf die verstrichene Zeit t schliessen und das Präparat zurückdatieren. Dabei verwenden wir die C-14-Halbwertszeit von $T_{1/2} = 5730 \text{ a}$:

$$\text{Alter} = t = T_{1/2} \cdot \log_{1/2} \left(\frac{A(t)}{A_0} \right) = 5730 \text{ a} \cdot \log_{1/2} \left(\frac{41.2}{124} \right) = \underline{\underline{9100 \text{ a}}}$$

5. Alternative Schreibweise für das Zerfallsgesetz

- (a) Die Zahl noch vorhandener Nuklide nach der Zeit t , also $N(t)$, muss in beiden Schreibweisen gleich gross herauskommen. Daraus folgt sofort:

$$\begin{aligned}
 N(t) &= N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \stackrel{!}{=} N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} & | : N_0 \\
 \Leftrightarrow & e^{-\lambda \cdot t} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} & | \ln(\dots) \\
 \Leftrightarrow & -\lambda \cdot t = \ln \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} & | \text{3. Log-Gesetz: } \log_a(b^c) = c \cdot \log_a b \\
 \Leftrightarrow & -\lambda \cdot t = \frac{t}{T_{1/2}} \cdot \ln \frac{1}{2} & | : t \\
 \Rightarrow & -\lambda = \frac{1}{T_{1/2}} \cdot \ln \frac{1}{2} & | \ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2 \\
 \Leftrightarrow & -\lambda = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} & | \cdot (-1) \\
 \Leftrightarrow & \underline{\underline{\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}}}
 \end{aligned}$$

- (b) Natürlich gilt nun auch $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Damit schreiben wir für die Anfangsaktivität sofort:

$$A_0 = \frac{N_0 \cdot \ln 2}{T_{1/2}} = \frac{N_0 \cdot \ln 2}{\frac{\ln 2}{\lambda}} = \underline{\underline{N_0 \cdot \lambda}}$$

Aufgrund der uns nunmehr zur Verfügung stehenden Differentialrechnung ist es aber angebracht dieses Resultat auch noch aus der Ableitung von $N(t)$ zu erhalten und so eben ein Beispiel dafür zu haben, weshalb man in der Physik Exponentialfunktionen aus Gründen der Einfachheit sehr gerne mit der Basis e notiert:

$$A(t) := -N'(t) = \left[-N_0 \cdot e^{-\lambda t}\right]' = -N_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = N_0 \lambda \cdot e^{-\lambda t} \stackrel{!}{=} A_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow \underline{\underline{A_0 = N_0 \lambda}}$$

Ableitungen von Exponentialfunktionen mit Basis e sind wirklich sehr einfach und rasch erledigt!

6. Die Aktivität einer künstlichen Quelle

- (a) Zwei Monate sind $\frac{1}{6}$ a. Setzen wir diese Zeit ins Zerfallsgesetz für die Aktivität ein, so ergibt sich:

$$A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = 327 \text{ kBq} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\frac{1}{6} \text{ a}}{5.2713 \text{ a}}} = 319.9 \text{ kBq}$$

Damit folgt für den Aktivitätsverlust (die Lösung ist auch ohne Minuszeichen in Ordnung.):

$$\Delta A = A(t) - A_0 = 319.9 \text{ kBq} - 327 \text{ kBq} = \underline{\underline{-7.1 \text{ kBq}}}$$

- (b) Ich möchte aus der Aktivität die in der Quelle enthaltene Anzahl Co-60-Atome bestimmen. Dazu löse ich den Zusammenhang $A_0 = \frac{N_0 \cdot \ln 2}{T_{1/2}}$ nach N_0 auf und setze dann die Aktivität (327 kBq). Diesmal muss ich die Halbwertszeit allerdings in Sekunden umrechnen, damit das Produkt Bq · s eben 1 ergibt:

$$N_0 = \frac{A \cdot T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{327 \text{ kBq} \cdot 5.2713 \text{ a}}{\ln 2} = \frac{327\,000 \text{ Bq} \cdot 5.2713 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}}{\ln 2} = 7.842 \cdot 10^{13}$$

Nun haben wir die Anzahl Atome. Daraus eine Masse zu machen, fällt nicht weiter schwer, denn wir wissen ja, welche Masse das einzelne Atom besitzt, nämlich $m_A = 60.0 \text{ u}$:

$$m = N_0 \cdot m_A = 7.842 \cdot 10^{13} \cdot 60.0 \text{ u} = 7.81 \cdot 10^{-12} \text{ kg} = \underline{\underline{7.81 \text{ ng}}}$$

Dabei habe ich verwendet, dass $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g} = 10^3 \cdot 10^9 \text{ g} = 10^{12} \text{ ng}$.

7. Das Alter eines Steins

- (a) Soll 1 % der gerade vorhandenen U-238-Kerne zerfallen, so bleiben 99 % = 0.99 bestehen. Daraus folgern wir mit dem Zerfallsgesetz für die Zeit:

$$\begin{aligned}
 N(t) &= 0.99 \cdot N_0 && | \text{Zerfallsgesetz einsetzen} \\
 \Rightarrow N_0 \cdot 0.5^{\frac{t}{T_{1/2}}} &= 0.99 \cdot N_0 && | : N_0 \\
 \Leftrightarrow 0.5^{\frac{t}{T_{1/2}}} &= 0.99 && | \log_{0.5}(\dots) \\
 \Leftrightarrow \frac{t}{T_{1/2}} &= \log_{0.5} 0.99 && | \cdot T_{1/2} \\
 \Leftrightarrow t &= T_{1/2} \cdot \log_{0.5} 0.99 && | \text{Halbwertszeit einsetzen} \\
 &= 4.46 \text{ Mia a} \cdot \log_{0.5} 0.99 \\
 &= 0.0647 \text{ Mia a} \\
 &= \underline{\underline{65 \text{ Mio a}}}
 \end{aligned}$$

- (b) Im Stein sind momentan folgende Atomzahlen vorhanden:

$$\begin{aligned}
 N_U &= \frac{m}{m_A} = \frac{321 \text{ mg}}{238 \text{ u}} = \frac{321 \cdot 10^{-6} \text{ kg}}{238 \text{ u}} = 8.122 \cdot 10^{20} \\
 N_{\text{Pb}} &= \frac{m}{m_A} = \frac{182 \text{ mg}}{206 \text{ u}} = \frac{182 \cdot 10^{-6} \text{ kg}}{206 \text{ u}} = 5.321 \cdot 10^{20}
 \end{aligned}$$

Gehen wir davon aus, dass alle Pb-206-Kern früher einmal U-238-Kerne waren, so folgt für diese ursprüngliche Anzahl:

$$N_{U,0} = N_U + N_{\text{Pb}} = 8.122 \cdot 10^{20} + 5.321 \cdot 10^{20} = 13.443 \cdot 10^{20}$$

Mit dem Zerfallsgesetz lässt sich nun auf das Alter des Steins schliessen:

$$\begin{aligned}
 N_U &= N_{U,0} \cdot 0.5^{\frac{t}{T_{1/2}}} && | : N_0 \\
 \Leftrightarrow 0.5^{\frac{t}{T_{1/2}}} &= \frac{N_U}{N_{U,0}} && | \log_{0.5}(\dots) \\
 \Leftrightarrow \frac{t}{T_{1/2}} &= \log_{0.5} \left(\frac{N_U}{N_{U,0}} \right) && | \cdot T_{1/2} \\
 \Leftrightarrow t &= T_{1/2} \cdot \log_{0.5} \left(\frac{N_U}{N_{U,0}} \right) && | \text{Werte einsetzen} \\
 &= 4.46 \text{ Mia a} \cdot \log_{0.5} \left(\frac{8.122 \cdot 10^{20}}{13.443 \cdot 10^{20}} \right) \\
 &= \underline{\underline{3.24 \text{ Mia a}}}
 \end{aligned}$$

- (c) Die entscheidende Annahme ist, dass alle heute vorhandenen Pb-206-Kerne früher einmal U-238-Kerne waren. Es könnte aber durchaus sein, dass ein gewisser Anteil der Pb-206-Kerne bereits bei der Bildung des Steins vorhanden gewesen sind. Dann hätten seit der Existenz des Steins weniger Zerfälle stattgefunden. Der Stein müsste somit jünger sein. Die 3.24 Mia a sind also eine **obere Altersgrenze** für den Stein.

Rechnerisch: Mit einem Anteil ursprünglich bereits vorhandener Pb-206-Kerne wäre die Anzahl damaliger U-238-Kerne, also $N_{U,0}$ geringer und der Bruch $\frac{N_U}{N_{U,0}}$ würde näher bei 1 liegen. Dies wiederum würde bewirken, dass der Wert des Logarithmus $\log_{0.5} \left(\frac{N_U}{N_{U,0}} \right)$ näher bei 0 liegt. Es ergäbe sich eine kleinere Zeitspanne.

8. Eine mathematische Herausforderung

(a) Der noch vorhandene Bruchteil beträgt:

$$p(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4.5 \cdot 10^9 \text{ a}}{4.2 \cdot 10^6 \text{ a}}} = \underline{\underline{2.94 \cdot 10^{-323}}} \quad !!!$$

Mathematischer Exkurs: Der TR wird beim Versuch $0.5^{4500/4.2}$ zu berechnen einfach das Resultat 0 ausgeben. Wie kann man trotzdem sagen, wie gross resp. wie klein diese Zahl ist? Exakt gleich Null kann sie ja nicht sein!

Überlegung: Für die 0.1 gilt: $\log 0.1 = \log 10^{-1} = -1 \cdot \log 10 = -1 \cdot 1 = -1$. Dabei ist $\log x$ der Logarithmus zur Basis 10 von x (kurz: Zehnerlogarithmus).

Dem entsprechend sind $\log 0.01 = -2$ und $\log 0.001 = -3$. Folglich muss sich der Zehnerlogarithmus von 0.007 zwischen -2 und -3 befinden. D.h., für alle Zahlen x , die ausgeschrieben auf der 3. Nachkommastelle beginnen, gilt: $-3 \leq \log x < -2$.

Allgemein: Jede Zahl, die ausgeschrieben auf der n -ten Nachkommastelle beginnt, hat einen Zehnerlogarithmus, der zwischen $-n$ und $-n + 1$ liegt.

Jede solche Zahl lässt sich schreiben in der Form $x = a \cdot 10^{-n}$ mit $1 \leq a < 10$. Daraus folgt für den Zehnerlogarithmus:

$$\log x = \log(a \cdot 10^{-n}) = \log a + \log 10^{-n} = \log a - n$$

Dabei ist $\log a$ eine Zahl zwischen 0 und 1 resp. genauer: $0 \leq \log a < 1$.

Anwendung: Haben wir nun, wie im vorliegenden Fall, eine sehr kleine Zahl, die wir nur als Potenz kennen, also z.B. $x = 0.5^{\frac{4500}{4.2}}$, so können wir den Zehnerlogarithmus darauf anwenden, um die Zehnerpotenz abzuspalten. Dabei hilft das 3. Logarithmengesetz, dank dem sich ein Exponent des Argumentes als Faktor vor den Logarithmus ziehen lässt:

$$\log x = \log 0.5^{\frac{4500}{4.2}} = \frac{4500}{4.2} \cdot \log 0.5 \approx -322.532$$

Somit muss unsere Zahl auf der 323. Nachkommastelle beginnen! Sie lässt sich also schreiben in der Form $x = a \cdot 10^{-323}$. Das können wir ausnutzen, um auch noch den Vorfaktor a zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \log x &= \log(a \cdot 10^{-323}) = \log a + \log 10^{-323} = \log a - 323 \stackrel{!}{=} -322.532 \\ \Rightarrow \log a &= 0.467 \quad \Rightarrow a = 10^{0.467} \approx 2.94 \end{aligned}$$

Die vollständige Zahl lautet daher $x = 0.5^{\frac{4500}{4.2}} \approx 2.94 \cdot 10^{-323}$.

(b) **Harte Konsequenz des Resultates aus (a):** Man findet sicher kein primordiales Technetium mehr, selbst wenn bei der Entstehung der Erde welches vorhanden gewesen sein sollte! Die Zahl $2.94 \cdot 10^{-323}$ ist dermassen klein

Zum Vergleich: Im ganzen sichtbaren Universum gibt es "nur" etwa 10^{81} Atome...