ELEKTRISCHER STROM

Alex Gertsch

Physik-Skript für die Klassen 155a und 155b

Zürich im Oktober 2025

Kapitel 1

Der elektrische Widerstand

1.1 Einleitung zum Kapitel 1

elektrische Spannungen fassen wir als Ursache U für elektrische Ströme auf. Wie viel Strom effektiv durch einen Leiter fließt, d.h., welchen Wert die Stromstärke I aufweist, hängt aber nicht alleine von der angelegten Spannung U ab. Es kommt auch auf die **Leitfähigkeit** des Leiters an! Ein Stoff leitet den elektrischen Strom, wenn in ihm **frei bewegliche Ladungsträger** vorhanden sind. Metalle sind aufgrund ihrer Leitungselektronen sehr gute Leiter, Salzlösungen sind als Ionenleiter etwas schlechter und v.a. nimmt ihre Leitfähigkeit mit der Zeit ab. Ganz schlechte Leiter, also Isolatoren, sind Stoffe mit keinen frei beweglichen Ladungsträgern, wie z.B. Luft, Styropor oder Plastik.

Wir wollen nun die Leitfähigkeit verschiedener Objekte **quantitativ** untersuchen. Dabei werden wir bei einer Vielzahl von Leitern eine **Proportionalität** zwischen der angelegten Spannung U und dem daraus resultierenden Strom I entdecken: Ver-x-fache ich die Spannung über einem Leiter, so wächst die Stromstärke ebenfalls um den Faktor x an. Objekte mit dieser Proportionalitätseigenschaft nennen wir **Ohm'sche Leiter**. Bei **nicht-Ohm'schen Leitern** ist der Zusammenhang zwischen U und I nicht proportional.

Als **Widerstand** R eines Körpers definieren wir das Verhältnis aus angelegter Spannung und daraus hervorgehender Stromstärke:

$$R := \frac{U}{I} \qquad \text{“\textit{Widerstand ist Spannung} \textbf{pro} \textit{Stromstärke.}”}$$

Besitzt ein Leiter einen großen Widerstand, so muss über ihm eine große Spannung angelegt werden, um in ihm eine bestimmte Stromstärke zu erzeugen.

Bei Ohm'schen Leitern ist der elektrische Widerstand R ein konstanter Wert, bei nicht-Ohm'schen Leitern beobachten wir bei unterschiedlichen Spannungen resp. Stromstärken wieder einen neuen Widerstandswert.

Zum Schluss dieser Einleitung ein konkretes Beispiel: Am Farbcode eines **Kohleschichtwiderstandes** lese ich einen Widerstandswert von $82\,\Omega$ ab. Wollte ich durch diesen Widerstand einen Strom der Stärke $1\,\mathrm{A}$ fließen lassen, so müsste ich dafür theoretisch eine Spannung von $82\,\mathrm{V}$ über ihm anlegen:

$$82\,\Omega = 82\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \qquad \text{“\textit{82 Volt Spannung} \textbf{pro} \textit{1 Ampere Stromstärke.}”}$$

Allerdings würde dieser Kohleschichtwiderstand diese Stromstärke niemals aushalten. Sie würde zu viel Energie in ihm freisetzen, sodass er innert kürzester Zeit verbrennen würde. Tatsächlich sind Kohleschichtwiderstände nur in Bereichen sehr geringer Stromstärken einsetzbar und auch nur dort in guter Näherung Ohm'sch.

1.2 Lernziele zum Kapitel 1

- Ich kenne die Definition des **elektrischen Widerstandes** eines Leiters durch Gleichung (1.1) **auswendig** und kann in einfachen Worten erläutern, was unter dieser physikalischen Größe zu verstehen ist.

- Ich weiß, dass das Leitungsverhalten eines Leiters durch eine **Kennlinie** in einem I-U-**Diagramm** beschrieben werden kann. Solche Diagramme kann ich interpretieren.

- Ich kann in einfachen Worten beschreiben, was man unter einem **Ohm'schen** und einem **nicht-Ohm'schen Leiter** versteht. Für beide Fälle kann ich mindestens zwei typische Beispiele nennen.

- Ich weiß, dass für **Ohm'sche Leiter** das **Ohm'sche Gesetz** (1.2) gilt. Dieses kenne ich **auswendig**, kann es in Worten erläutern und in Berechnungen anwenden. Diese Berechnungen können auch umfangreicher sein und Schritte beinhalten, in denen die Definition für die Spannung ($U := \frac{\Delta E}{Q}$) oder für die Stromstärke ($I := \frac{Q}{\Delta t}$) zur Anwendung kommen.

- Ich weiß, dass der elektrische Widerstand von nicht allzu dünnen oder langen **Metalldrähten** resp. **-kabeln** sehr klein ist und in der Regel vernachlässigt werden darf.

- Mit Hilfe einer Farbcodeübersicht (vgl. Anhang A) bin ich in der Lage den Widerstandswert eines **Kohleschichtwiderstandes** zu bestimmen.

- Sobald ich eine nicht-verzweigte Schaltung (= **Serieschaltung**) vor mir habe, weiß ich, dass sich die Widerstandswerte der hintereinander liegenden Schaltelemente zum **Gesamtwiderstand** addieren; die Gesamtspannung ist die Summe der Teilspannungen über den einzelnen Schaltelementen, währenddem die Stromstärke in allen Elementen dieselbe ist.

Abbildung 1.1: Georg Simon Ohm (1787 – 1854), Entdecker des Ohm'schen Gesetzes.

1.3 Die Definition des elektrischen Widerstandes

Über einem Leiter (= irgendein Element in der Schaltung) liegt die Spannung U an (vgl. Abb. 1.2). Aufgrund dieser Spannung wird ein elektrischer Strom durch den Leiter fließen. Handelt es sich um einen guten Leiter, so wird die Stromstärke I groß sein. Bei einem schlechten Leiter ist sie klein. Umgekehrt kann man sagen: Besitzt der Leiter einen großen **elektrischen Widerstand**, so entsteht bei vorgegebener Spannung U eine geringe Stromstärke I, bei kleinem Widerstand hingegen ist die Stromstärke groß.

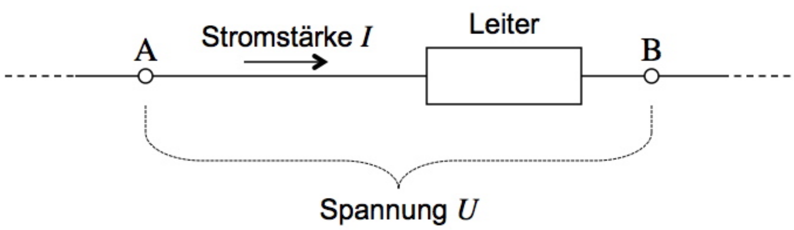


Abbildung 1.2: Illustration zur Idee des elektrischen Widerstandes: Aufgrund der über ihm angelegten Spannung U lässt ein Leiter eine bestimmte Stromstärke I zu. Der Leiter besitzt einen "elektrischen Widerstand", der bestimmt, wie viel Strom bei welcher Spannung fließt.

Definition des elektrischen Widerstandes

Über einem elektrischen Leiter herrsche eine elektrische Spannung U, welche in ihm einen elektrischen Strom der Stärke I hervorruft. Dann definieren wir den **elektrischen Widerstand** *R des Leiters als:*

$$R := \frac{U}{I} \tag{1.1}$$

"Widerstand = Spannung pro Stromstärke."

Anmerkungen zur Definition des elektrischen Widerstandes

- Mit der Definition des elektrischen Widerstandes wird auch erklärt, wie sich die SI-Einheit dieser Größe, das **Ohm** Ω, zusammensetzt:[1]

$$[\,R\,] = \frac{[\,U\,]}{[\,I\,]} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} =: \mathrm{Ohm} = \Omega$$

  Wenn du dir diese Einheitenkombination merkst, kannst du dir immer vor Augen führen, was der elektrische Widerstand eines Leiters beschreibt. Es wird die Frage beantwortet, wie viele Volt Spannung an den Leiter angelegt werden müssen, um eine bestimmte Stromstärke in Ampere zu erreichen (*"Volt pro Ampere"*).

- **Ein Beispiel:** Der Widerstandswert eines Kohleschichtwiderstands betrage $R = 1.2\,\mathrm{k}\Omega$. Das bedeutet, dass man pro Ampere Stromstärke, das man durch diesen Widerstand fließen lassen möchte, eine Spannung von $1200\,\mathrm{V}$ anzulegen hätte ($\Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$).[2]

---

[1] Diese Einheit geht auf den deutschen Gymnasiallehrer **Georg Simon Ohm** (vgl. Abb. 1.1) zurück, der als erster die physikalischen Zusammenhänge zwischen Spannung und Stromstärke untersuchte.
Das Symbol dieser Einheit ist ein griechisches großes Omega: Ω.

[2] Natürlich wird man das in der Realität nicht versuchen, denn ein Kohleschichtwiderstand ist nicht für so

1.4 Ohm'sche Leiter und das Ohm'sche Gesetz

Ohm'sche Leiter und das Ohm'sche Gesetz

Ein **Ohm'scher Leiter** *ist ein Leiter, dessen elektrischer Widerstand R konstant ist. D.h., der Widerstandswert R eines Ohm'schen Leiters ist unabhängig von der angelegten Spannung resp. der Stärke I des durch ihn fließenden Stromes.*

Bei Ohm'schen Leitern sind also Spannung U und Stromstärke I proportional zueinander. Der elektrische Widerstand R ist die Proportionalitätskonstante, welche Spannung und Stromstärke miteinander verknüpft:

$$U = R \cdot I \qquad \text{Merke: } \mathbf{Z\underline{U}E\underline{R}\underline{I}} \tag{1.2}$$

Diese Gleichung bezeichnen wir als das **Ohm'sche Gesetz**.

Anmerkungen zu Ohm'schen Leitern und zum Ohm'schen Gesetz

- **Eselsbrücken zum Ohm'schen Gesetz:** Der Kantonsname **URI** enthält die Symbole im Ohm'schen Gesetz in der richtigen Reihenfolge. Der Kantonsname ZUERI verrät durch das E zudem, wo das Gleichheitszeichen sitzt. Also: ZUERI ist besser als URI! ☺

- Als **Kennlinie** eines Leiters bezeichnen wir den zu diesem Leiter gehörenden Graphen in einem I-U-Diagramm. Man kann daraus ablesen, welche Spannung U an den Leiter anzuschließen ist, um durch ihn einen Strom der Stärke I fließen zu lassen.

  Bei Ohm'schen Leitern ist diese Kennlinie stets eine **Ursprungsgerade**, da Spannung U und Stromstärke I proportional zueinander sind. Der elektrische Widerstand R des Leiters gibt die Steigung der Kennlinie an.

- **Kohleschichtwiderstände** und **nicht zu dünne Metalldrähte** resp. **-kabel** sind gute Beispiele für Ohm'sche Leiter, wie es die zugehörigen Kennlinien in Abb. 1.3 illustrieren.

- Kohleschichtwiderstände für die Elektronik lassen sich heutzutage mit praktisch beliebigem Widerstandswert anfertigen. In einem Elektroladen erhält man fast gratis Widerstände von ein paar Ω bis hin zu einigen $\mathrm{M}\Omega$ (Megaohm).

  Anhang A gibt darüber Auskunft, wie man aus dem **Farbcode** auf einem Kohleschichtwiderstand auf dessen Widerstandwert schließen kann.

- **Metalldrähte weisen ganz allgemein sehr kleine Widerstandswerte auf.** Nur bei enorm langen oder sehr dünnen Drähten werden die zugehörigen Widerstandswerte relevant, ansonsten dürfen wir sie **vernachlässigen**.

  Eine Referenzgröße: Der Widerstand eines $1\,\mathrm{mm}$ dicken und $1\,\mathrm{m}$ langen Kupferdrahtes beträgt ziemlich genau $22\,\mathrm{m}\Omega\,(= 0.022\,\Omega)$ – also praktisch nichts.

---

große Stromstärken wie $1\,\mathrm{A}$ gebaut. Bei dieser Stromstärke würde der Kohleschichtwiderstand sofort zerstört, da in ihm die riesige Energiemenge von $1200\,\mathrm{J}$ pro Sekunde in Form von Joule'scher Wärme umgesetzt würde...

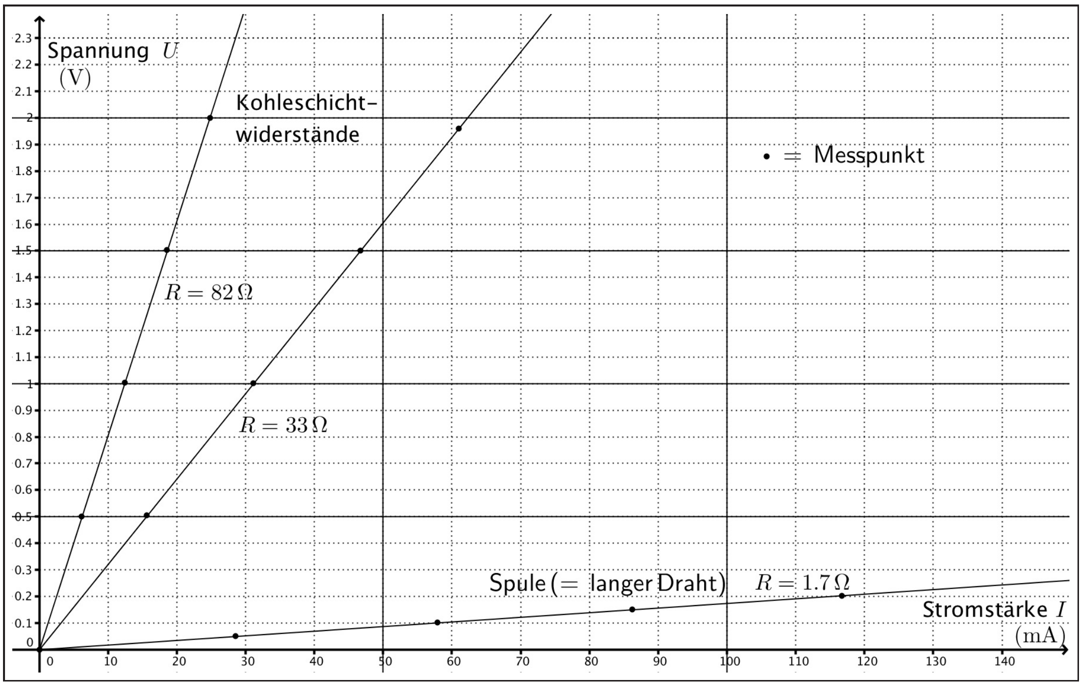


Abbildung 1.3: Kennlinien zweier Kohleschichtwiderstände und einer Spule.

1.5 Nicht-Ohm'sche Leiter

Viele Leiter des elektrischen Stromes verhalten sich **nicht-Ohm'sch**. Das bedeutet, angelegte Spannung U und Stärke I des fließenden Stromes sind nicht proportional zueinander. Hier einige allgemeine Anmerkungen zu solchen nicht-Ohm'schen Leitern:

- Die Kennlinie eines nicht-Ohm'schen Leiters verläuft zwar weiterhin durch den Ursprung des I-U-Diagramms[3], ist aber keine Gerade mehr.

  Abb. 1.4 zeigt die Kennlinie eines Glühlämpchens für maximal $10\,\mathrm{V}$. Man sieht gut, wie sich auch eine Gesetzmäßigkeit, aber ganz offensichtlich keine Proportionalität ergibt.

  In der Regel ist es nicht selbstverständlich, dass sich ein solcher von der Proportionalität abweichender Zusammenhang mathematisch geschlossen durch eine Funktionsgleichung $U(I)$ beschreiben lässt. In Abb. 1.4 zeigt die gezeichnete Kurve den Versuch, eine mathematisch wohldefinierte Kennlinie durch die Messpunkte zu legen – das gelingt in diesem Fall gar nicht so schlecht.[4]

- Nicht-Ohm'sche Leiter sind z.B. Glühdrähte, Dioden, Luft, der menschliche Körper, u.v.a.

- **Es gibt keine Leiter, die sich unter allen Umständen Ohm'sch verhalten!**

  Richtig ist vielmehr die Aussage, dass manche Leiter sich über einen gewissen Spannungsbereich hinweg in guter Näherung Ohm'sch verhalten. Das gilt auch für Kohleschichtwiderstände und Metalldrähte.

[3] Klar: Ohne Spannung kein Strom!

[4] Bei der gezeichneten Kurve handelt es sich um den Graphen einer Potenzfunktion $U(I) = k \cdot I^n$, deren Parameter k und n so gewählt wurde, dass der Graph möglichst gut durch die Messpunkte verläuft. Für die beiden Parameter wurden die Werte $k = \frac{57.76}{100\,000}$ und $n = 1.83$ ermittelt, sodass man für die Funktionsgleichung insgesamt schreiben kann: $U(I) = \frac{57.76}{100\,000}\,\mathrm{V} \cdot \left(\frac{I}{\mathrm{mA}}\right)^{1.83}$.

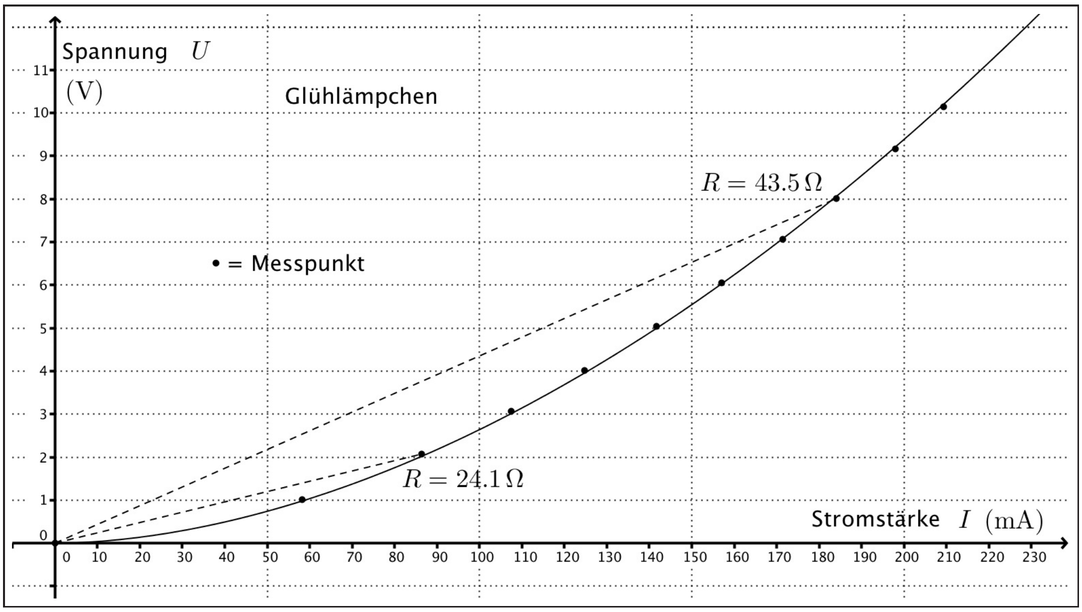


Abbildung 1.4: Kennlinie eines Glühlämpchens.

- Das Leitungsverhalten ist im Übrigen **temperaturabhängig**. Verändert sich die Temperatur eines Leiters, so hat dies in der Regel Einfluss auf dessen Leitfähigkeit.

  Das sehen wir sehr schön bei der Kennlinie des Glühlämpchens in Abb. 1.4. Will man die Stromstärke immer weiter erhöhen, so braucht man dafür überproportional mehr Spannung. Das heißt, der Widerstand des Lämpchens ist bei großen Spannungs- und Stromstärkewerten deutlich größer als bei geringen. Grund dafür ist die große Temperatur des Glühdrahtes, die das Fließen der Leitungselektronen im Metall erschwert.

- Wir halten fest: Bei nicht-Ohm'schen Leitern ist die Beschreibung des Leitungsverhaltens durch eine Funktionsgleichung $U(I)$ schwierig.

  Was aber immer geht, ist eine punktuelle Angabe des elektrischen Widerstands R: Mit Gleichung (1.1) kann durch eine gleichzeitige Messung von Spannung U und Stromstärke I der elektrische Widerstand R bei genau dieser Spannung resp. Stromstärke bestimmt werden. Der erhaltene Wert gilt dann aber eben nur für genau diese Einstellung.

  So beträgt z.B. der elektrische Widerstand des Glühlämpchens in Abb. 1.4 bei verschiedenen Einstellungen (Auswahl von Messpunkten):

Spannung U (V)	0	2.08	4.01	6.05	8.01	10.14
Stromstärke I (mA)	0	86.3	124.7	157.1	184.1	209.4
Widerstand $R = \frac{U}{I}$ (Ω)	–	24.1	32.2	38.5	43.5	48.42

  Im Diagramm erkennt man die unterschiedlichen Widerstandswerte bei verschiedenen Spannungseinstellungen daran, dass die direkten Verbindungslinien zwischen Ursprung und Messpunkt verschiedene Steigungen aufweisen. Diese Steigungen haben jeweils eben den Wert $R = \frac{U}{I}$. Zwei Beispiele sind in Abb. 1.4 eingetragen.

1.6 Die Serieschaltung (= Reihenschaltung) von Widerständen

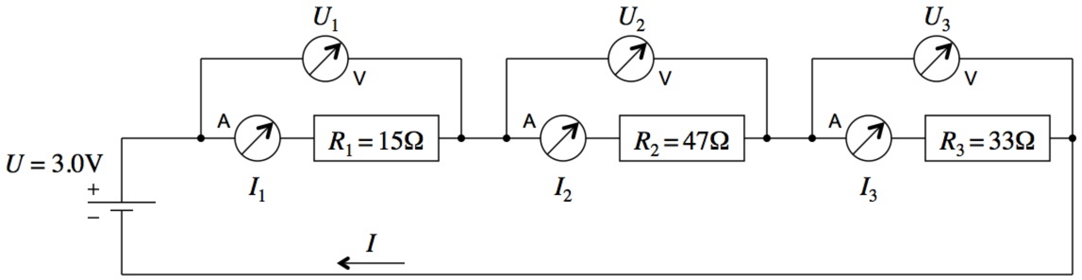


Abbildung 1.5: Eine Serieschaltung von drei Widerständen. Alle Messgeräte sind ideal gedacht. D.h., durch die Voltmeter fließt gar kein Strom und die Amperemeter sind komplett widerstandsfrei, beeinflussen den Stromfluss selber also nicht.

Abb. 1.5 zeigt drei hintereinander geschaltete Widerstände: R_1, R_2 und R_3. Wir sprechen von einer **Reihen-** oder **Serieschaltung**.

Über der Schaltung als Ganzes liegt eine **Gesamtspannung** von $U = 3.0\,\text{V}$ an, bei der ein Strom der Stärke I fließt. Welche Zusammenhänge gelten nun für die elektrischen Größen bei einer solchen Aneinanderreihung mehrerer Widerstände? Das soll hier beleuchtet werden.

Überlegungen zur Serieschaltung (Reihenschaltung) von Widerständen

Punkto Stromstärke: Jeder Ladungsträger (z.B. jedes Elektron) muss alle drei Widerstände durchqueren, um vom einen zum anderen Batteriepol zu gelangen. Es gibt keine anderen Wege. Daraus folgt:

$$I = I_1 = I_2 = I_3$$

"In einer Serieschaltung herrscht überall dieselbe Stromstärke."

Punkto Spannung: Die Quellenspannung U bestimmt, welche Energie ΔE eine bestimmte Ladungsmenge Q auf ihrem Weg durch die Schaltung insgesamt abgibt:

$$U := \frac{\Delta E}{Q} \quad \Rightarrow \quad \Delta E = U \cdot Q$$

In Abb. 1.5 sind das $3.0\,\text{J}$ Energie pro Coulomb Ladung ($U = 3.0\,\text{V} = 3.0\,\frac{\text{J}}{\text{C}}$).

Dieses Freiwerden von Energie passiert in Etappen. Der Anteil ΔE_1 wird in R_1, der Anteil ΔE_2 in R_2 und der Anteil ΔE_3 in R_3 umgesetzt. Insgesamt kann aber nicht mehr Energie abgegeben werden, als der Ladungsmenge Q aus der Spannungsquelle zur Verfügung steht ($\rightarrow$ **Energieerhaltung**). Es muss offenbar gelten:

$$\Delta E \overset{!}{=} \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3$$

Dividiert man diese Gleichung durch die Ladungsmenge Q, so ergibt sich eine Beziehung zwischen der Gesamtspannung U und den Teilspannungen U_1, U_2 und U_3:

$$U = \frac{\Delta E}{Q} = \frac{\Delta E_1}{Q} + \frac{\Delta E_2}{Q} + \frac{\Delta E_3}{Q} = U_1 + U_2 + U_3$$

"In einer Serieschaltung addieren sich die Teilspannungen zur Gesamtspannung."

Punkto Widerstände: Es ergibt Sinn, der Serieschaltung als Ganzes einen Widerstandswert zuzuweisen, denn schließlich stellen wir ja fest, dass sie bei der Spannung U eine ganz bestimmte Stromstärke I zulässt:

$$R := \frac{U}{I} \qquad \text{Ersatzwiderstand} := \frac{\text{Gesamtspannung}}{\text{(Gesamt-)Stromstärke}}$$

Unter dem Ersatzwiderstand R verstehen wir denjenigen Widerstandswert, den man anstelle der Serieschaltung aus R_1, R_2 und R_3 an die Gesamtspannung U anschließen könnte, um die gleiche Stromstärke I zu erhalten.

Da für jeden einzelnen Widerstand das Ohm'sche Gesetz gilt ($U_1 = R_1 \cdot I$, $U_2 = R_2 \cdot I$, $U_3 = R_3 \cdot I$), folgt aus der Spannungsgleichung von oben:

$$\begin{aligned} && U &= U_1 + U_2 + U_3 && \mid \text{4 x Ohm'sches Gesetz} \\ \Rightarrow && R \cdot I &= R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I && \mid :I \\ \Leftrightarrow && R &= R_1 + R_2 + R_3 \end{aligned}$$

"In einer Serieschaltung addieren sich die Widerstände zum Ersatzwiderstand."

Übersicht zur Serieschaltung elektrischer Widerstände

Gegeben sei eine Serieschaltung aus n Widerständen $R_1, \ldots, R_n$, durch welche Ströme mit den Stärken $I_1, \ldots, I_n$ fließen, und über welchen die Teilspannungen $U_1, \ldots, U_n$ anliegen. Legt man über der Schaltung die Gesamtspannung U an, so fließe ein Gesamtstrom der Stärke I und wir können den Ersatzwiderstand R der Schaltung bestimmen aus $R = \frac{U}{I}$.

Unter diesen Voraussetzungen gelten die folgenden Regeln:

$$I = I_1 = \ldots = I_n \tag{1.3}$$

"In einer Serieschaltung herrscht überall dieselbe Stromstärke."

$$U = U_1 + \ldots + U_n \tag{1.4}$$

"Bei einer Serieschaltung addieren sich die Teilspannungen zur Gesamtspannung."

$$R = R_1 + \ldots + R_n \tag{1.5}$$

"Bei einer Serieschaltung addieren sich die Widerstände zum Ersatzwiderstand."

Der Ersatzwiderstand R einer Serieschaltung ist stets größer als jeder einzelne der darin enthaltenen Widerstände R_1, ..., R_n.

In unserer Beispielserieschaltung aus Abb. 1.5 ergibt sich für den Ersatzwiderstand:

$$R \overset{(1.5)}{=} R_1 + R_2 + R_3 = 15\,\Omega + 47\,\Omega + 33\,\Omega = 95\,\Omega$$

Mit diesem Wert kann man nun aus der Gesamtspannung auf die Stromstärke schließen:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{3.0\,\mathrm{V}}{95\,\Omega} = 0.0316\,\mathrm{A} = 31.6\,\mathrm{mA}$$

Aus der Gesamtstromstärke und dem Ohm'schen Gesetz folgen nun auch die Spannungen über den drei einzelnen Widerständen:

$$U_1 = R_1 \cdot I = 15\,\Omega \cdot 0.0316\,\mathrm{A} = 0.47\,\mathrm{V}$$
$$U_2 = R_2 \cdot I = 47\,\Omega \cdot 0.0316\,\mathrm{A} = 1.5\,\mathrm{V}$$
$$U_3 = R_3 \cdot I = 33\,\Omega \cdot 0.0316\,\mathrm{A} = 1.0\,\mathrm{V}$$

Bei Serieschaltungen wird im größten Widerstand stets am meisten Energie umgesetzt!

1.7 "Spannung, Widerstand, Stromstärke" – eine Rekapitulation

Zum Schluss dieses Kapitels soll der Zusammenhang von Spannung, Widerstand und Stromstärke im elektrischen Stromkreis nochmals auf den Punkt gebracht werden. Du solltest sicherstellen, dass du diesen Abschnitt genau verstanden hast, denn er ist so etwas wie die allen Stromkreisen zugrunde liegende Idee!

Wodurch wird die Stromstärke in einem Stromkreis festgelegt?

1. Die **Spannung** U einer Quelle schiebt/zieht die beweglichen **Ladungsträger** durch den Stromkreis. Der Spannungswert ist ein Mass für die Stärke dieses Schiebens/Ziehens.

2. Die Bewegung der Ladungsträger ist allerdings nicht gratis, denn im Stromkreis gibt es Hindernisse, eben **Widerstände**.

   Selbst Metalldrähte sind solche Hindernisse, wenn auch nur ganz kleine im Vergleich zu anderen Schaltelementen. Deshalb vernachlässigen wir den elektrischen Widerstand von Metallkabeln in der Regel.

3. Der **Gesamtwiderstand** R einer Schaltung bestimmt, wie viel Strom bei der Spannung U fließt, wie groß also die **Stromstärke** I wird:

   $$I = \frac{U}{R}$$

   Das haben wir neuerdings bei der **Serieschaltung** mehrerer Widerstände gesehen. Jeder einzelne Widerstand in einer Serieschaltung bewirkt, dass insgesamt weniger Strom fließt. Dabei spielt es keine Rolle, an wie vielter Stelle er eingebaut ist.

4. Und als Folgeüberlegung resp. als Überleitung zum nächsten Kapitel: Indem der Widerstand eines Gerätes steuert, wie viel Strom durch dieses fließt, regelt er auch gerade, wie viel **Leistung**, also **Energie pro Zeit** es abbekommt. Wie wir in Kapitel 2 sehen werden, gilt nämlich für ein Gerät, über dem die Spannung U anliegt und durch das in der Folge die Stromstärke I fliesst:

   $$\text{Leistung} = P = \text{Energieumsatz pro Zeitspanne} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = U \cdot I = \frac{U^2}{R}$$

   Je geringer der Widerstand eines Gerätes ist, desto mehr Leistung wird es von der (direkt über ihm angelegten) Spannung beziehen, weil es aufgrund dieses geringeren Widerstandes eben mehr Strom fließen lässt.

Kapitel 2

Die elektrische Leistung

2.1 Einleitung zum Kapitel 2

Die Ursache eines elektrischen Stromes ist stets eine elektrische Spannung – so haben wir es nun schon seit einiger Zeit gesehen und angewendet. Die Ladungen fließen durch eine Leitung, weil sie dabei elektrische Energie abgeben können. Das Fließen eines Stromes ist also zwangsläufig mit einem Energieumsatz verbunden.

Wenn wir genau wissen, wie viel "Ladung pro Zeiteinheit" unterwegs ist ($=$ Angabe der Stromstärke I) und wie viel "Energie pro Ladungseinheit" frei wird ($=$ Angabe der elektrischen Spannung U), so muss sich daraus bestimmen lassen, wie viel "elektrische Energie pro Zeiteinheit" abgegeben wird. Diese Angabe bezeichnen wir mit dem Namen **elektrische Leistung** P_{el}. Wir werden in diesem Kapitel feststellen, dass dafür gilt:

$$P_{\text{el}} = U \cdot I$$

Wie jede physikalische Leistung, so beschreibt auch die elektrische Leistung den zeitlichen Energieumsatz in einem Prozess, es gilt also nach wie vor:

$$P_{(\text{el})} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \qquad \text{mit} \qquad [\,P\,] = \text{Watt} = \text{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}} \overset{\text{neu!}}{=} \text{V} \cdot \text{A}$$

Die Gleichung $P_{\text{el}} = U \cdot I$ gibt nicht nur an, wie sich eine elektrische Leistung errechnen lässt. Vielmehr beschreibt sie ganz allgemein, wie der Energietransport in elektrischen Leitungen funktioniert: Eine bestimmte Leistung kann entweder durch eine schwache Spannung und eine große Stromstärke (geringer Leitungswiderstand), oder durch eine schwache Stromstärke und eine große Spannnung (großer Leitungswiderstand) zustande kommen.

Die zweite Variante ist für unsere Stromversorgung von zentraler Bedeutung: Bei großen Stromstärken ist der Energieverlust in Leitungen überproportional groß, weil dann besonders viel Joule'sche Wärme erzeugt wird. Niedrige Stromstärken reduzieren diesen auf die Wärmewirkung zurückzuführenden Energieverlust massiv! Deshalb ist es zweckmäßig, für den Energietransport zwischen Kraftwerken und Verbrauchern **Hochspannungsleitungen** zu verwenden. Die extrem hohen Spannungen ermöglichen den Leistungstransport bei geringen Stromstärken. Nur so rentieren sich lange Stromleitungen überhaupt.

2.2 Lernziele zum Kapitel 2

- Ich kenne die **allgemeine Leistungsdefinition** durch Gleichung (2.1) **auswendig** und kann sie in ein paar Sätzen erläutern.
- Ich kann mit der Leistungseinheit **Watt** und der Energieeinheit **Kilowattstunde** kWh umgehen. Ich bin in der Lage rasch abzuschätzen, wie viele kWh ein Gerät mit einer bestimmten Leistungsaufschrift über eine bestimmte Betriebszeit hinweg benötigt.
- Ich weiß, welchen **Preis** elektrische Energie bei uns etwa hat: Die kWh kostet im **Normaltarif der Schweizer Elektrizitätswerke** derzeit etwa $20\,\mathrm{Rp.}$.
- Ich kenne die Gleichung (2.2) für die **elektrische Leistung auswendig** und beherrsche den rechnerischen Umgang damit. Zudem kann ich diese Gleichung in Worte fassen und anschaulich erklären, weshalb die in einem Gerät umgesetzte elektrische Leistung das Produkt aus der Spannung über dem und der Stromstärke durch das Gerät sein muss.
- Ich kann erklären, weshalb eine Stromversorgung nur mit **Hochspannungsleitungen** effizient funktionieren kann. Diese Hochspannungsleitungen bringen die elektrische Energie von den Kraftwerken zu den Verbrauchsorten.
- Durch eine Leistungsberechnung kann ich erklären, weshalb Geräte an einer **anderen Spannung** als der vorgesehenen schlecht oder gar nicht funktionieren.
- Bei **Serieschaltungen** bin ich nun in der Lage, **umfangreiche Berechnungen** mit elektrischer Ladung, Stromstärke, Spannung, Energiumsatz und Leistung durchzuführen.
- Ich kann die Gefährlichkeit von **Kurzschlüssen** fachlich korrekt begründen und weiß, wie solche Kurzschlüsse im Alltag vermieden werden.

2.3 Repetition: "Leistung ist Energieumsatz pro Zeit"

In allen Arten von Prozessen wird Arbeit verrichtet und/oder Wärme übertragen. Energie geht von einem auf einen anderen Körper über und wechselt von einer Form in eine andere, etc.

Kurz: **Alle Vorgänge sind mit Energieumsätzen $\boldsymbol{\Delta E}$ verbunden.**

Mit der **Leistung** P (engl. *power* gibt man an, wie rasch ein solcher Energieumsatz abläuft:

Die Definition der Leistung

Ist ΔE der Energieumsatz während der Zeitspanne Δt, so definieren wir die **Leistung** P *durch:*

$$P := \frac{\Delta E}{\Delta t} \tag{2.1}$$

"Leistung $=$ Energieumsatz pro Zeitspanne."

Anmerkungen zur Definition der Leistung

- Zur Leistung gehört die SI-Einheit **Watt**:

$$[\,P\,] = \frac{[\,E\,]}{[\,t\,]} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3} =: \mathrm{Watt} = \mathrm{W}$$

- Die Zusammensetzung des Watts aus SI-Basiseinheiten ($\mathrm{W} = \frac{\mathrm{kg\cdot m^2}}{\mathrm{s^3}}$)[1] ist in der Anwendung nicht besonders wichtig, dafür umso mehr der Zusammenhang mit der Energieeinheit Joule:

$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$	*"1 Watt entspricht einem Energieumsatz von 1 Joule pro Sekunde."*
$\mathrm{J} = \mathrm{W}\cdot\mathrm{s}$	*"1 Joule ist 1 Wattsekunde."*

- Mit der Leistungseinheit Watt wird eine weitere, sehr gebräuchliche und große **Energieeinheit** eingeführt, die **Kilowattstunde** (kWh). Es gilt:

$$\text{Kilowattstunde} = \mathrm{kWh} = \mathrm{k}\cdot\mathrm{W}\cdot\mathrm{h} = 1000\cdot\mathrm{W}\cdot 3600\,\mathrm{s} = 3\,600\,000\,\mathrm{J} = 3.6\,\mathrm{MJ}$$

  Bitte merke dir: Es sind **immer Kilowattstunden** (kWh), niemals Kilowatt pro Stunde (kW/h). Diese Einheit gibt es nicht. Sie ist einfach falsch.

- Das Elektrizitätswerk rechnet die bezogene Energie in **Kilowattstunden** (kWh) ab.

  Warum ist die Abrechnung in dieser Einheit praktisch? Weil jedefrau sofort selber ausrechnen kann, wie viel Energie bei der Benutzung eines Gerätes bezogen wird.

  Ein Beispiel: Ein Elektroofen beziehe während dem Backen eines Kuchens eine Leistung von $1500\,\mathrm{W}$. Die Backzeit betrage $40\,\mathrm{min} = \frac{2}{3}\,\mathrm{h}$. Daraus ergibt sich eine bezogene Energiemenge von:

$$\Delta E = P\cdot\Delta t = 1500\,\mathrm{W}\cdot\frac{2}{3}\,\mathrm{h} = 1000\,\mathrm{Wh} = 1\,\mathrm{kWh}$$

  Die Energieberechnung kann ohne große Umrechnungen im Kopf durchgeführt werden, da die Stunden für Alltagsgebrauchszeiten die richtige Größenordnung besitzen.

- **Stromkosten:** Aktuell kostet $1\,\mathrm{kWh}$ elektrische Energie bei den Elektrizitätswerken etwa $20\,\mathrm{Rp.}$ im **Normaltarif**. Für $20\,\mathrm{Rp.}$ erhalten wir $3\,600\,000\,\mathrm{J}$![2] Das Backen des Kuchens von oben ist also enorm billig und fällt bei dessen Kosten kaum ins Gewicht – wir genießen als Wohlstandsgesellschaft eine ungeheuer günstige Energieversorgung! Im **Nachttarif** ist die elektrische Energie übrigens nochmals billiger, nämlich ca. halb so teuer.

  Bezieht man **Ökostrom**, so kommt keine andere elektrische Energie aus der Steckdose. Vielmehr gibt man dadurch, dass man mehr zahlt, dem Elektrizitätswerk den Auftrag nachhaltige Stromerzeugungsmethoden zu fördern und finanziell zu unterstützen. Ökostrom wird in der Regel drei- bis viermal so teuer verkauft, wobei die Preise langsam niedriger werden.

---

[1] Z.B.: Ein Watt ist die Leistung, mit der man einen Körper von $1\,\mathrm{kg}$ Masse innerhalb von genau einer Sekunde auf eine Geschwindigkeit von $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beschleunigen kann.

[2] Zur Erinnerung: $1\,\mathrm{J} \approx$ Energiemenge, mit der man 1 Tafel Schokolade um $1\,\mathrm{m}$ anheben kann.
Außerdem: $4200\,\mathrm{J} \approx$ Energiemenge, mit der man 1 Liter Wasser um $1\,^\circ\mathrm{C}$ erwärmen kann.

2.4 Herleitung der Formel für die elektrische Leistung

Betrachte Abb. 2.1. Über irgendeinem Leiter (Lämpchen, Gerät, etc.) herrscht die Spannung U und es fließt ein Strom der Stärke I.

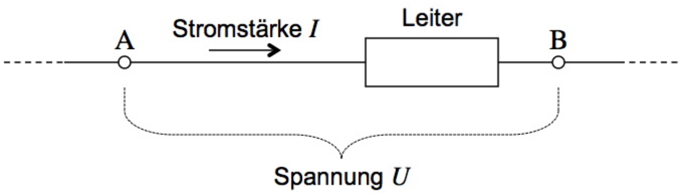


Abbildung 2.1: Zum Verständnis der elektrischen Leistung.

Rep. Spannung: $U := \frac{\Delta E}{Q}$. In Worten: Die Spannung U über einem Leiter gibt an, welche Energiemenge ΔE umgesetzt wird pro Ladungsmenge Q, welche den Leiter durchquert:

$$U := \frac{\Delta E}{Q} \qquad \text{“Spannung ist Energieumsatz pro Ladung.”}$$

Rep. Stromstärke: $I := \frac{Q}{\Delta t}$. In Worten: Die Stromstärke I beschreibt, welche Ladungsmenge Q pro Zeitabschnitt Δt eine beliebige Stelle in der Leitung passiert:

$$I := \frac{Q}{\Delta t} \qquad \text{“Stromstärke ist Ladung pro Zeitabschnitt.”}$$

Multiplizieren wir diese beiden Größen miteinander, so stellen wir fest, dass das Produkt eine Leistungsangabe ergibt, also eine Aussage über den Energieumsatz pro Zeitabschnitt macht:

$$U \cdot I = \frac{\Delta E}{Q} \cdot \frac{Q}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Die Ladungsmenge Q kürzt sich weg. D.h., beim resultierenden Ausdruck kommt es gar nicht darauf an, auf welche Ladungsmenge Q der Energieumsatz ΔE verteilt wird. Wichtig ist nur, dass wir nun über eine Angabe verfügen, die uns mitteilt, in welchem Zeitabschnitt Δt die Energiemenge ΔE umgesetzt wird. Und dies entspricht eben einer Leistungsangabe.

Die Berechnung der elektrischen Leistung

Fließt in einem Leiter ein elektrischer Strom der Stärke I und herrscht über diesem Leiter eine elektrische Spannung U, so gibt die **elektrische Leistung** *P_{el} den zeitlichen Energieumsatz $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ im Leiter an. Es gilt:*

$$P_{\mathrm{el}} = U \cdot I \tag{2.2}$$

“Elektrische Leistung = Spannung mal Stromstärke.”

Anmerkung zu den Einheiten

Für die elektrische Leistung ergibt sich (klarerweise) dieselbe SI-Einheit wie für alle anderen Leistungen, nämlich das **Watt**. Neuerdings wissen wir also, dass sich das Watt auch aus den elektrischen Einheiten Volt und Ampere zusammensetzen lässt:

$$[P] = \mathrm{W} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A} = [U] \cdot [I] \qquad \text{denn:} \qquad \mathrm{V} \cdot \mathrm{A} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} \cdot \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}$$

2.5 Die elektrische Leistung bei Ohm'schen Leitern

Im Kapitel 1 haben wir gesehen, dass der Strom in einem Leiter in der Regel stärker wird, wenn wir die über dem Leiter anliegende Spannung vergrößern. Bei Ohm'schen Leitern sind die beiden Größen direkt proportional zueinander. Der Widerstand R im Ohm'schen Gesetz $U = R \cdot I$ ist in diesem Fall eine Konstante. Daraus können wir für die elektrische Leistung Ohm'scher Leiter allgemein folgern:

$$U = R \cdot I \qquad \Rightarrow \qquad P_{\text{el}} = U \cdot I = R \cdot I \cdot I = I^2 \cdot R$$

$$I = \frac{U}{R} \qquad \Rightarrow \qquad P_{\text{el}} = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$$

Die elektrische Leistung bei Ohm'schen Leitern

Ist ein Ohm'scher Leiter mit Widerstand R an eine elektrische Spannung U angeschlossen und bezeichnet I die durch ihn fließende Stromstärke, so ist die in ihm umgesetzte elektrische Leistung gegeben durch:

$$P_{\text{el}} = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \tag{2.3}$$

Joule'sche Wärme in Stromleitungen

Metallene Leiter verhalten sich Ohm'sch, wenn ihre Temperatur konstant gehalten werden kann. Solange nicht so viel Energie im Draht umgesetzt wird, dass die Wärmeabgabe an die Umgebung nicht mehr nachkommt, bleibt ihr elektrischer Widerstand also derselbe.

Die in einem solchen Leiter umgesetzte elektrische Leistung erzeugt sogenannte **Joule'sche Wärme** (z.B. durch Reibung der Leitungselektronen im Leiter). Je mehr Strom durch den Leiter fließt, umso größer wird diese Wärmeproduktion, was im letzten Ausdruck von (2.3) deutlich zum Vorschein kommt. Die umgesetzte Leistung ist proportional **zum Quadrat** der Stromstärke: $P_{\text{el}} = I^2 \cdot R$!

Will man also den Verlust durch Joule'sche Wärme gering halten, so sollte man um kleine Stromstärken bemüht sein, denn diese sind massgeblich für diesen Verlust verantwortlich. Mit $P_{\text{el}} = U \cdot I$ kann man direkt folgern, dass elektrische Energie also nach Möglichkeit unter Verwendung großer Spannungen, aber kleiner Ströme übertragen werden sollte.

Und genau so machen wir es bei Überlandleitungen. Diese werden erst durch die Verwendung von **Hochspannung** (bis zu $380\,\mathrm{kV}$!) wirklich effizient und sinnvoll.[3]

[3] Diese ganze Überlegung darf man nicht mit $P_{\text{el}} = \frac{U^2}{R}$ durchführen, denn die am Leiter angelegte Spannung U ist, ganz besonders im Falle einer Hochspannungsleitung, viel geringer als die Spannung der Quelle. Die Stromstärke im Leiter ist allerdings dieselbe wie diejenige durch die Quelle, weshalb die Überlegung so stimmt.

2.6 Die Gefährlichkeit elektrischer Kurzschlüsse

"Kurzschließen" bedeutet, die beiden Pole einer Spannungsquelle mit einer guten Leitung, z.B. mit einem Metalldraht, direkt miteinander zu verbinden. Bei einem Kurzschluss gibt es zwischen den beiden Polen einer Spannungsquelle fast keinen elektrischen Widerstand mehr ($R \to 0$). Dies hat eine sehr große Stromstärke I zur Folge.

Die Konsequenz einer großen Stromstärke wiederum ist die rasche Freisetzung einer großen Menge elektrischer Energie ($P_{\mathrm{el}} = U \cdot I$ wird groß!). Außerdem erfolgt diese Energiefreisetzung in der Regel in Form von **Joule'scher Wärme**. Dies bedeutet, dass es irgendwo heiß wird und damit werden Kurzschlüsse potentiell gefährlich!

Batterie: Eine kurzgeschlossene Batterie erwärmt sich sehr stark. Grund dafür ist ihr **Innenwiderstand**, der in der Regel deutlich größer als der Widerstand der Kurzschlussleitung ist. Somit wird die Energie mehrheitlich in der Batterie selber freigesetzt.

Der Kurzschluss führt zu einer raschen **Entleerung** der Batterie. Das ist zwar für das Porte-monnaie schlecht, normalerweise aber nicht besonders gefährlich.

Stabile Spannungsquellen: Wird eine Steckdose oder ein Netzgerät kurzgeschlossen, so kann die große Leistungsabgabe über längere Zeit aufrecht erhalten werden. Dann wird es gefährlich, denn nun erhitzen sich auch die Kurzschlussleitungen. Dies kann bei offenen Leitungen zum Glühen, allenfalls zum Durchschmelzen führen.

Besonders schlimm wird es bei Kurzschlüssen in eingebauten Leitungen (in den Wänden). Dann können die Erhitzungen zu Kabel- und Schwelbränden innerhalb des Gebäudes führen. Diese sind schwierig zu lokalisieren und zu bekämpfen.

Sicherungen zum Schutz vor Kurzschlüssen

Es ist sinnvoll sich gegen anhaltende Kurzschlüsse abzusichern. Dazu sind Sicherungen da. Diese unterbrechen den Stromfluss automatisch, wenn zu viel Strom fließt.

Ältere Sicherungen funktionieren mit dünnen Schmelzdrähten, die bei zu starkem Strom einfach durchschmelzen. Solche Sicherungen gibt es auch für einzelne Geräte (z.B. Netzgeräte und Multimeter). Schmelzdrahtsicherungen müssen nach einmaligem Auslösen ersetzt werden.

Neuere Sicherungen verwenden die elektromagnetische Wirkung des Stromes zum Umlegen eines Schalters. Deshalb lassen sie sich mehrfach verwenden.

Normalerweise verfügt jedes Zimmer eines Hauses über eine eigene Sicherung, die typischerweise maximal $10\,\mathrm{A}$ Stromstärke zulässt. In einem normalen Zimmer kann somit total eine maximale elektrische Leistung von $2300\,\mathrm{W}$ bezogen werden:

$$P_{\mathrm{el,max}} = U \cdot I_{\mathrm{max}} = 230\,\mathrm{V} \cdot 10\,\mathrm{A} = 2300\,\mathrm{W}$$

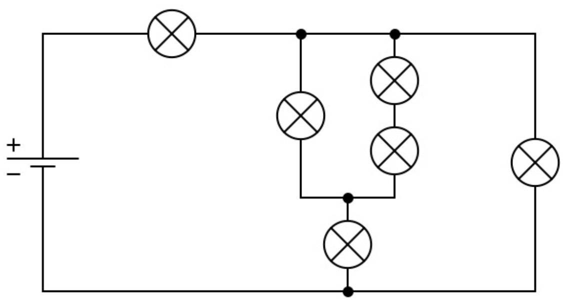
Wundere dich also nicht, dass plötzlich der Strom ausfällt, wenn du im selben Zimmer gleichzeitig einen Haarföhn (z.B. $1500\,\mathrm{W}$) und einen Staubsauger (z.B. $1100\,\mathrm{W}$) benutzen möchtest.

Kapitel 3

Die Parallelschaltung elektrischer Widerstände

3.1 Einleitung zum Kapitel 3

Wie verteilt sich eigentlich der elektrische Strom an einem Knoten? Wodurch wird festgelegt, durch welche Teile einer verzweigten Schaltung viel und durch welche wenig Strom fließt? Welches Lämpchen leuchtet beispielsweise in der folgenden Schaltung am hellsten?



Mit dem Inhalt dieses Kapitels wirst du dir die Antwort selber geben können.

Sicher kennst du die alltägliche Redewendung:

"Der Strom nimmt den Weg des geringsten Widerstandes."

Das tönt zwar gut und einprägsam, ist aber nur bedingt richtig. Eine etwas bessere Variante wäre:

"Die Stromstärke ist auf dem Weg des geringsten Widerstandes am größten."

Auch auf den schlechter leitenden Wegen sind also messbare Ströme vorhanden! Der am besten leitende Weg führt einfach am meisten Strom.

In diesem Kapitel lernen wir diese Aussage nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ kennen. Schließlich können wir in Stromkreisen, welche sich aus ineinander verschachtelten Serie- und Parallelschaltungen zusammensetzen, sämtliche Teilspannungen und -stromstärken voraussagen.

Bei allen Untersuchungen von Schaltkreisen ist zentral, dass wir verstehen: Über jedem Schaltelement A muss eine Spannung U_{A} herrschen, damit durch A ein Strom der Stärke I_{A} fließt. Das heißt, für jedes einzelne Schaltelement lässt sich das Ohm'sche Gesetz separat aufstellen:

$$U_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{A}} \cdot I_{\mathrm{A}}$$

3.2 Lernziele zum Kapitel 3

- Ich weiß, dass in einer **Parallelschaltung** die Spannung über allen Stromwegen dieselbe ist und dass sich die Teilstromstärken zur Gesamtstromstärke addieren.
- Ich bin in der Lage, den **Ersatzwiderstand** für eine Parallelschaltung zu bestimmen.
- Bei einer größeren Schaltung kann ich den **Gesamtwiderstand** berechnen, wenn diese sich aus verschachtelten Serie- und Parallelschaltungen zusammensetzt. Bei einer solchen Schaltung kann ich auch berechnen, welche Spannungen über und Stromstärken in den einzelnen Schaltelementen vorherrschen, wenn dafür ausreichende Daten zur Verfügung stehen.

3.3 Die Parallelschaltung von Widerständen

Abb. 3.1 zeigt eine Parallelschaltung aus drei Widerständen mit $R_1 = 15\,\Omega$, $R_2 = 47\,\Omega$ und $R_3 = 33\,\Omega$. Über der Schaltung liegt eine (Gesamt-)spannung von $U = 3\,\text{V}$ an. Der Gesamtstrom I verteilt sich auf die drei zur Verfügung stehenden Wege. Wodurch diese Stromverteilung genau festgelegt wird, soll nun überlegt werden.

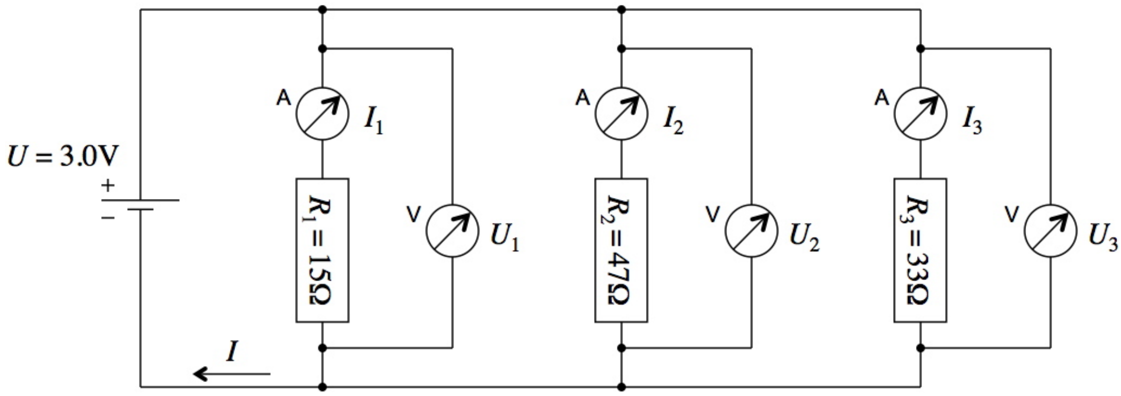


Abbildung 3.1: Eine Parallelschaltung von drei Widerständen. Die Messgeräte sollen ideal sein. D.h., durch die Voltmeter fließt gar kein Strom ($R_\text{V} = \infty$) und die Amperemeter sind komplett widerstandsfrei, beeinflussen den Stromfluss selber also nicht ($R_\text{A} = 0$).

Überlegungen zur Parallelschaltung von Widerständen

Punkto Stromstärke: In Abb. 3.1 kann jedes vom Minuspol der Quelle kommende Elektron genau einen der drei Wege "wählen". Vor und hinter der Parallelschaltung treffen wir aber genau gleich viele zu- wie abfließende Elektronen an (→ **Ladungserhaltung**). Daraus folgt:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

"Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Teilstromstärken zur Gesamtstromstärke."

Punkto Spannung: Egal, welchen der drei Wege ein Elektron nun tatsächlich beschreitet, es hat insgesamt nur genau einen einzigen Widerstand zu durchqueren, um vom Minus- zum Pluspol der Spannungsquelle zu gelangen. Eine aus mehreren Elektronen bestehende Ladungsmenge Q muss ihre von der Spannungsquelle erhaltene Energie $\Delta E = U \cdot Q$ loswerden, egal durch welchen Widerstand sie nun fließt (→ **Energieerhaltung**). Die pro Ladungsmenge umgesetzte Energie ist also stets dieselbe, egal welcher Weg beschritten wird. D.h., über den drei Widerständen herrscht dieselbe Spannung ($3.0\,\mathrm{V}$ in Abb. 3.1):

$$U = U_1 = U_2 = U_3$$

"Bei einer Parallelschaltung sind die Spannungen über allen Widerständen (d.h. Stromwegen) gleich groß."

Punkto Widerstände: Auch der Parallelschaltung kann als Ganzes ein Widerstandswert zugewiesen werden, denn auch hier wird bei einer Spannung U eine ganz bestimmte Gesamtstromstärke I hervorgerufen:

$$R := \frac{U}{I}$$

Auch hier bezeichnen wir R als **Ersatzwiderstand** für die Widerstände R_1, R_2 und R_3. Es ist wiederum derjenige Widerstandswert, den man anstelle der Parallelschaltung aus den drei Einzelwiderständen an die Spannung U anschließen könnte, um die gleiche Gesamtstromstärke I zu erhalten.

Aus der Stromstärkengleichung von oben folgt:

$$\begin{array}{lll} & I = I_1 + I_2 + I_3 & \quad | \text{ 4 x Ohm'sches Gesetz} \\ \Rightarrow & \dfrac{U}{R} = \dfrac{U}{R_1} + \dfrac{U}{R_2} + \dfrac{U}{R_3} & \quad | : U \\ \Leftrightarrow & \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} & \end{array}$$

"Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Kehrwerte der Einzelwiderstände zum Kehrwert des Ersatzwiderstandes."

Im Beispiel aus Abb. 3.1 erhalten wir demzufolge für den Ersatzwiderstand der drei parallel geschalteten Widerstände:

$$R = \left(\frac{1}{R}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{15\,\Omega} + \frac{1}{47\,\Omega} + \frac{1}{33\,\Omega}\right)^{-1} = 8.46\,\Omega$$

Man beachte das rechnerische Vorgehen!

Übersicht zur Parallelschaltung elektrischer Widerstände

Gegeben sei eine Parallelschaltung aus n Widerständen $R_1, \ldots, R_n$, durch welche Ströme mit den Stärken $I_1, \ldots, I_n$ fließen, und über welchen die Spannungen $U_1, \ldots, U_n$ anliegen. Legt man über der Schaltung die Gesamtspannung U an, so fließe ein Gesamtstrom der Stärke I und wir können der Schaltung via $R = \frac{U}{I}$ den Ersatzwiderstand R zuordnen. Es gilt:

$$I = I_1 + \ldots + I_n \tag{3.1}$$

"Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Teilströme zum Gesamtstrom."

$$U = U_1 = \ldots = U_n \tag{3.2}$$

"Bei einer Parallelschaltung sind die Spannungen über allen Widerständen (d.h. Stromwegen) gleich groß."

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_n} \tag{3.3}$$

"Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Kehrwerte der Einzelwiderstände zum Kehrwert des Ersatzwiderstandes."

Der Ersatzwiderstand R einer Parallelschaltung ist stets kleiner als jeder einzelne der darin enthaltenen Widerstände R_1, ..., R_n.

Weitere Anmerkungen zur Parallelschaltung

- Die Stromstärke im einzelnen Widerstand ist unabhängig von den Strömen durch die anderen Widerstände! Wenn ich einen zusätzlichen Widerstand parallel anschließe, bezieht dieser von der Spannungsquelle einfach zusätzlichen Strom, ohne dass die Stromstärken in den anderen Widerstände dadurch abnehmen würden.[1] Der Gesamtstrom nimmt um den entsprechenden Betrag zu.

- *"Bei einer Parallelschaltung ist der Ersatzwiderstand stets kleiner als jeder darin enthaltene Einzelwiderstand."*

  Klar: Wenn ich zu einer bestehenden Leitung parallel einen zusätzlichen Weg öffne, dann kann insgesamt mehr Strom fließen. Egal, wie gut der zusätzliche Kanal selber leitet, die neue Schaltung leitet insgesamt sicher besser als die alte.

- Rechnen wir zum Schluss das Beispiel von Abb. 3.1 zuende: Für die Gesamt- und die Teilstromstärken folgt (oben berechneter Ersatzwiderstand $R = 8.46\,\Omega$):

  Teilströme: $I_1 = \frac{U}{R_1} = 200\,\text{mA}$ $\quad I_2 = \frac{U}{R_2} = 64\,\text{mA}$ $\quad I_3 = \frac{U}{R_3} = 91\,\text{mA}$

  Gesamtstrom: $I = \frac{U}{R} = \frac{3\,\text{V}}{8.46\,\Omega} = 0.355\,\text{A} = 355\,\text{mA} = I_1 + I_2 + I_3$

  Da die Spannung über allen Widerständen gleich groß ist, wird im kleinsten Widerstand am meisten Energie umgesetzt, denn dort fließt der stärkste Strom ($P_{\text{el}} = U \cdot I$).

[1] Dies gilt allerdings nur, solange die Spannungsquelle nicht überlastet ist. Bei Batterien ist es z.B. so, dass bei zu starkem Strombezug die Spannung einzubrechen beginnt. Dann hat natürlich die parallele Zuschaltung jedes weiteren Widerstandes Einfluss auf die Ströme durch die anderen Widerstände.

3.4 Die Verschachtelung von Serie- und Parallelschaltungen

Bei umfangreicheren Schaltungen lassen sich die darin auftretenden Teilstromstärken und Teilspannungen in vielen Fällen durch konsequente Anwendung der eben gefundenen Gesetzmäßigkeiten ermitteln. Dies sei hier an einem Beispiel (Abb. 3.2) durchdiskutiert.

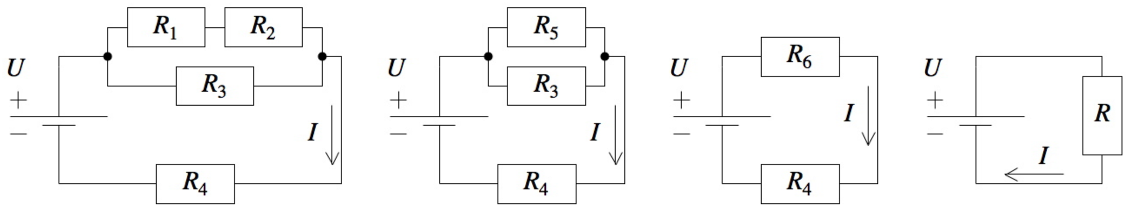


Abbildung 3.2: Eine kompliziertere Schaltung und ihre Vereinfachung durch schrittweise Einführung von Ersatzwiderständen.
Bekannte Werte: $R_1 = 1.8\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 390\,\Omega$, $R_3 = 1.5\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 820\,\Omega$ und $U = 12\,\mathrm{V}$.

Durch **sukzessives Zusammenfassen zu Ersatzwiderständen "von innen nach aussen"** bringen wir es fertig, den **Gesamtwiderstand** R der Schaltung zu ermitteln. Achte im Folgenden auf die Namensgebungen in Abb. 3.2:

$$\begin{aligned}
&R_1 \;\&\; R_2 \text{ seriell} && \Rightarrow && R_5 = R_1 + R_2 = 1800\,\Omega + 390\,\Omega = 2190\,\Omega\\
&R_3 \;\&\; R_5 \text{ parallel} && \Rightarrow && R_6 = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1500\,\Omega} + \frac{1}{2190\,\Omega}\right)^{-1} = 890\,\Omega\\
&R_4 \;\&\; R_6 \text{ seriell} && \Rightarrow && R = R_4 + R_6 = 820\,\Omega + 890\,\Omega = 1710\,\Omega
\end{aligned}$$

Mit diesem Gesamtwiderstand kann jetzt die Gesamtstromstärke ermittelt werden:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{1710\,\Omega} = 0.007\,02\,\mathrm{A} = 7.0\,\mathrm{mA}$$

Umgekehrt lässt sich mit diesen Gesamtgrößen nun "in die Schaltung hineinrechnen", und zwar unter ständiger Ausnutzung des Ohm'schen Gesetzes für die einzelnen Widerstände: $U_i = R_i \cdot I_i$ (gilt auch für Ersatzwiderstände).[2] Ebenso benutzen wir ständig die Gleichungen (1.3), (1.4), (3.1) und (3.2), welche uns darüber aufklären, wie die Teilspannungen und Teilstromstärken bei Serie- und Parallelschaltung zusammenhängen.

"Von außen nach innen" finden wir z.B. für die Spannung U_1 über R_1:

$$\begin{aligned}
&I_4 = I_6 = I = 0.007\,02\,\mathrm{A} && \Rightarrow && U_6 = R_6 \cdot I_6 = 820\,\Omega \cdot 0.007\,02\,\mathrm{A} = 5.76\,\mathrm{V}\\
&U_3 = U_5 = U_6 = 5.76\,\mathrm{V} && \Rightarrow && I_5 = \frac{U_5}{R_5} = \frac{5.76\,\mathrm{V}}{2190\,\Omega} = 0.002\,63\,\mathrm{A}\\
&I_1 = I_2 = I_5 = 0.002\,63\,\mathrm{A} && \Rightarrow && U_1 = R_1 \cdot I_1 = 1800\,\Omega \cdot 0.002\,63\,\mathrm{A} = 4.7\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

Manche Schaltungen lassen sich allerdings nicht so einfach als Ineinander-Verschachtelung von Serie- und Parallelschaltungen ansehen. Dann braucht man zur Bestimmung von Teilstromstärken und -spannungen zwei allgemeiner gültige Prinzipien, die man als **Kirchhoff'sche Regeln** bezeichnet. Wie so etwas gehen würde, erfährst du im Anhang B.

[2] Ein solches Ohm'sches Gesetz muss für jeden einzelnen Widerstand gelten, denn damit wird ja jeweils unmittelbar beschrieben, warum Strom durch den Widerstand fließt: Die Spannung U_i über dem Widerstand R_i führt zu einem Strom der Stärke I_i durch R_i, wobei eben gilt: $U_i = R_i \cdot I_i$.

Anhang A

Farbcodes bei Kohleschichtwiderständen

Farbe			1. Ring (1. Ziffer)	2. Ring (2. Ziffer)	3. Ring (Zahl der Nullen)	4. Ring (Toleranz)
schwarz	sw		0	0	–	–
braun	br		1	1	0	± 1%
rot	rt		2	2	00	± 2%
orange	or		3	3	000	
gelb	ge		4	4	0 000	
grün	gn		5	5	00 000	
blau	bl		6	6	000 000	
violett	vt		7	7		
grau	gr		8	8		
weiß	ws		9	9		
		ohne Ring				± 20%
Manchmal		gold			× 0,1	± 5%
auch:		silber			× 0,01	± 10%

Abbildung A.1: Bedeutung des Farbcodes auf Keramikwiderständen.

Beispiel: Der Farbcode **gelb-violett-orange-gold** bedeutet:

$$R = \underset{\text{gelb}}{4} \quad \underset{\text{violett}}{7} \quad \underset{\text{orange}}{000} \quad \Omega \quad = 47\,000\,\Omega = 47\,\mathrm{k}\Omega$$

Der vierte Ring beschreibt die **Toleranz** des Widerstandes, d.h. seine Präzision. Bei den von uns verwendeten Widerständen ist der vierte Ring in der Regel goldig. Das bedeutet, dass der tatsächliche Wert um bis zu $\pm 5\,\%$ abweichen kann, hier also um bis zu $\pm 2.35\,\mathrm{k}\Omega$.

Anhang B

Die Kirchhoff'schen Gesetze

Mit der Beschreibung von Serie- und Parallelschaltungen in den Kapiteln 1 und 3 haben wir eine Idee davon erhalten, wie wir in komplizierteren Schaltungen mit Spannungen und Strömen umgehen.

Allerdings wurden in Kapitel 3 als kompliziertester Fall lediglich Verschachtelungen von Serie- und Parallelschaltungen angeschaut. Es gibt aber durchaus noch komplexere Situation, in denen nicht so leicht zwischen Serie- und Parallelschaltung unterschieden werden kann. Hier ein typisches Beispiel:

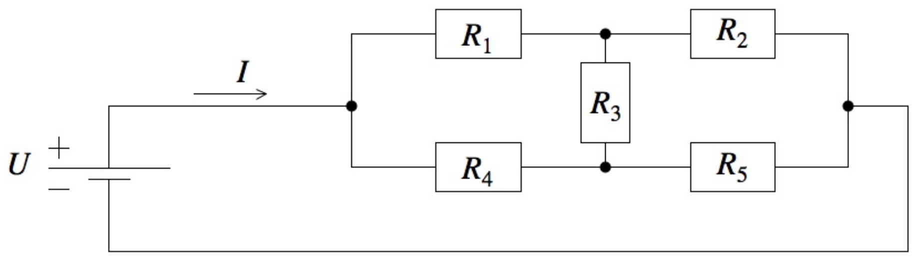


Abbildung B.1: Eine Schaltung, welche nur durch Anwendung der Kirchhoff'schen Regeln zu analysieren ist.

Wie verteilt sich in dieser Schaltung der Strom? In welche Richtung fliesst er beispielsweise im mittleren Widerstand R_3?

In diesem Anhang werden nun die beiden allgemeinen Grundgesetze beschrieben, mit welchen sich im Prinzip beliebig komplizierte Schaltkreise untersuchen lassen. Es sind dies die beiden **Kirchhoff'schen Gesetze**. De facto handelt es sich dabei um zwei passend für elektrische Stromkreise formulierte Grundgesetze der Physik: Das 1. Kirchhoff'sche Gesetz (1. KG), die **Knotenregel**, widerspiegelt die **Ladungserhaltung**, das 2. KG, die **Maschenregel**, resultiert aus der **Energieerhaltung**. Die KGs ermöglichen uns weitergehende Analysen von Schaltungen – allerdings wird es auch mathematisch anspruchsvoller. Wir werden Gleichungssysteme zu lösen haben, wobei diese in aller Regel linear sind und somit eindeutige Lösungen besitzen.[1]

[1]Zum Glück! Alles andere wäre höchst verwirrend, denn schiesslich realisiert die Natur in der Schaltug auch nur eine ganz bestimmte Spannungs- und Stromstärkeverteilung.

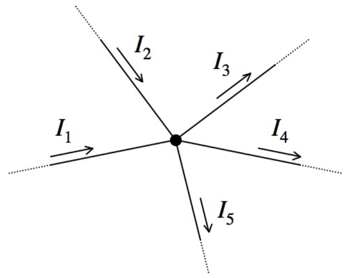
Die Kirchhoff'schen Gesetze

1. Kirchhoff'sches Gesetz: Die Knotenregel

Bei jedem Knoten in einer Schaltung sind die zu- und die abfliessenden Ströme insgesamt gleich stark:

$$\text{Knoten} \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{zu}} - \sum I_{\text{ab}} = 0 \tag{B.1}$$

Konkret:



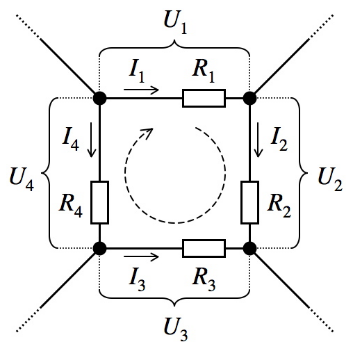
$$\Rightarrow \quad I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

2. Kirchhoff'sches Gesetz: Die Maschenregel

Bei jeder Masche in einer Schaltung ist die Summe über sämtliche Teilspannungen längs einer Umlaufrichtung gleich Null:

$$\text{Masche} \quad \Rightarrow \quad \sum U_i = 0 \tag{B.2}$$

Konkret:



$$\Rightarrow \quad U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0$$

Anmerkungen zu den Kirchhoff'schen Gesetzen

- Ganz fremd sind uns diese Regeln nicht. Z.B. beinhaltet die Knotenregel (B.1) die Gleichung (3.1): Bei einer Parallelschaltung teilt sich der Gesamtstrom in die Teilströme auf. Und die Maschenregel (B.2) ist eine umfassendere Formulierung von (1.4): Bei einer Serieschaltung addieren sich die Teilspannungen zur Gesamtspannung.[2]

- Die beiden Gesetze sind auf ganz fundamentale physikalische Gesetzmässigkeiten zurückzuführen: Im Falle der Knotenregel geht es um die **Ladungserhaltung** (resp. die Erhaltung der Elektronen) bei einem Knoten. Bei der Maschenregel haben wir eine weitere Variante des **Energieerhaltungsprinzips** vor uns.[3]

---

[2] Also ist $U - U_1 - U_2 - \ldots = 0$.

[3] Führen wir ein Elektron durch eine ganze Masche hindurch, so hat es am Ende wieder gleich viel elektrische

- Die Maschenregel wendet man korrekt an, indem man völlig unabhängig von irgendwelchen Kriterien eine Umlaufsrichtung in der Masche festlegt. Bei Abschnitten, auf welchen die Stromrichtung in eben diese Umlaufsrichtung zeigt, wird die Teilspannung im Ohm'schen Gesetz positiv angesetzt, ansonsten wird ein Minuszeichen eingebaut:

$$\begin{array}{lll} & \text{Umlaufsrichtung} \upharpoonleft\upharpoonright \text{Stromrichtung} & \Rightarrow \quad U_i = R_i \cdot I_i \\ \text{und:} & \text{Umlaufsrichtung} \upharpoonleft\downharpoonright \text{Stromrichtung} & \Rightarrow \quad U_i = -R_i \cdot I_i \end{array}$$

  Im Prinzip ist auch die Festlegung der Stromrichtungen zunächst willkürlich. Am Beispiel von Abb. B.2 werden wir diskutieren, welche Festlegungen sinnvoll sind und wie wir die Resultate der Berechnungen zu interpretieren haben.

Rechnen mit den Kirchhoff'schen Gesetzen – ein Beispiel

Vorgegeben sei die Schaltung in Abb. B.2. Es ist die Schaltung vom Anfang dieses Anhangs (vgl. Abb. B.1), nun allerdings mit ganz konkreten Vorgaben der Widerstandswerte und der Gesamtspannung.

Aus der Analyse dieser Schaltung soll hervorgehen, wie stark die Teilströme sind. Zudem möchten wir herausfinden, in welche Richtung der Strom durch Widerstand R_3 fliesst.

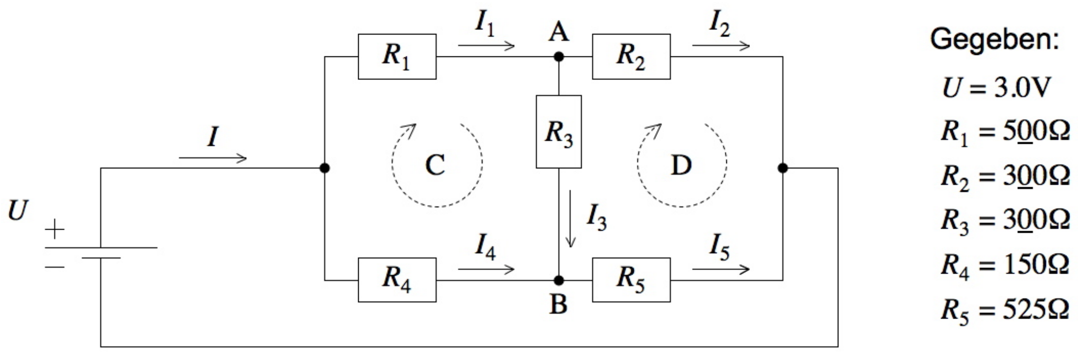


Abbildung B.2: Die Analyse einer Schaltung mittels Kirchhoff'scher Regeln. Für jeden Widerstand muss zu Beginn eine Stromrichtung und für jede Masche eine Umlaufrichtung definiert werden.

Als Vorbereitung einer solchen Analyse muss man Strom- und Maschenrichtungen ins Schaltschema eintragen. Die Wahl der Maschenrichtungen ist für jede einzelne Masche beliebig. Ich habe mich für den Uhrzeigersinn entschieden. Bei den Strömen mag es Richtungen geben, welche von Beginn weg klar sind. In unserem Beispiel sind dies die Richtungen von I_1, I_2, I_4 und I_5. Ungewiss ist hingegen die Richtung von I_3. Wir legen dafür zunächst willkürlich eine Richtung fest. Ich habe mich für "von oben nach unten" entschieden.

Am Ende unserer Berechnungen werden wir evaluieren: Für die Ströme I_1, I_2, I_4 und I_5 müssen wir positive Werte erhalten, sonst ist etwas schief gelaufen. Die Richtung von I_3 werden wir am Vorzeichen dieser Stromstärke erkennen.

Energie wie am Anfang, denn es befindet sich ja an derselben Stelle in der Schaltung. Demnach muss sein Energieumsatz bei diesem Vorgang insgesamt gleich Null sein. Es muss also gleich viel Energie aufgenommen wie abgegeben haben.

Mit den beiden Kirchhoff'schen Gesetzen lässt sich notieren:

Knotenregel bei A:	$I_1 - I_2 - I_3 = 0$
Knotenregel bei B:	$I_3 + I_4 - I_5 = 0$
Maschenregel in C:	$U_1 + U_3 + U_4 = R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0$
Maschenregel in D:	$U_2 + U_5 + U_3 = R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_3 I_3 = 0$

Das sind bis jetzt vier Gleichungen für fünf Unbekannte (I_1 bis I_5). Noch nicht mit eingeflossen ist die Gesamtspannung U. Dies kann auf verschiedenem Weg passieren, z.B.:

$$U = U_1 + U_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 \qquad \text{oder} \qquad U = U_4 + U_3 + U_2 = R_4 I_4 - R_3 I_3 + R_2 I_2$$

Grundsätzlich ist jeder Weg durch die Schaltung, vom Plus- zum Minuspol der Spannungsquelle, für diese letzte Gleichung wählbar, solange man auch hier für die Vorzeichen die Stromrichtungspfeile beachtet. Sinnvoll ist natürlich eine möglichst einfache Variante.

Nun haben wir ein **lineares Gleichungssystem** mit fünf Gleichungen und fünf Unbekannten erhalten. Dieses hat in aller Regel – und zu unserem Glück – genau eine Lösung. D.h., unsere physikalischen Gesetze, wie auch die Natur, verhalten sich eindeutig:

$$\left| \begin{array}{rcl} I_1 - I_2 - I_3 &=& 0 \\ I_3 + I_4 - I_5 &=& 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_4 I_4 &=& 0 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_5 I_5 &=& 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 &=& U \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{rcl} I_1 - I_2 - I_3 &=& 0 \\ I_3 + I_4 - I_5 &=& 0 \\ 500\,I_1 + 300\,I_3 - 150\,I_4 &=& 0 \\ 300\,I_2 - 300\,I_3 - 525\,I_5 &=& 0 \\ 500\,I_1 + 300\,I_2 &=& 3.0 \end{array} \right|$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich z.B. mit dem Additionsverfahren lösen, das wir aus der Algebra kennen. Wir sehen hier also eine konkrete Anwendung dieser Mathematik. Man erhält:

$$I_1 = 3.0\,\mathrm{mA} \qquad I_2 = 5.0\,\mathrm{mA} \qquad I_3 = -2.0\,\mathrm{mA} \qquad I_4 = 6.0\,\mathrm{mA} \qquad I_5 = 4.0\,\mathrm{mA}$$

I_3 kommt negativ heraus! D.h., die tatsächliche Stromrichtung im Widerstand führt entgegen der willkürlich gewählten Pfeilrichtung "von unten nach oben".

Das ist nicht sehr überraschend, denn der Weg vom Plus- zum Minuspol der Spannungsquelle über R_1-R_3-R_5 besitzt einen klar grösseren Widerstand als derjenige über R_4-R_3-R_2.

Wir müssen übrigens nicht in der Lage sein lineare Gleichungssysteme mit fünf Gleichungen von Hand zu lösen. Probieren darf man's aber durchaus einmal!

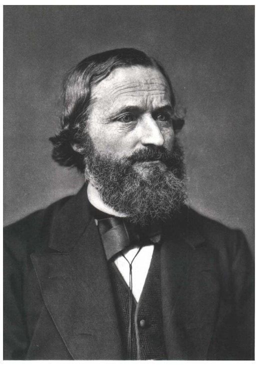


Abbildung B.3: Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887), verewigt auch als Briefmarke.