

Übungen zur Elektrizitätslehre – Lösungen Serie 3

1. Rechnungen in einfachen Serie- und Parallelschaltungen

(a) Serielle Schaltung der drei Widerstände

- i. Gesamtwiderstand: $R = R_1 + R_2 + R_3 = 220\ \Omega + 470\ \Omega + 680\ \Omega = 1370\ \Omega = \underline{1400\ \Omega}$
 \Rightarrow Stromstärke $I = \frac{U}{R} = \frac{9.0\text{ V}}{1370\ \Omega} = 0.00657\text{ A} = \underline{6.6\text{ mA}}$ (in allen Widerständen gleich!)
- ii. Spannungen: $U_1 = R_1 \cdot I = 220\ \Omega \cdot 0.00657\text{ A} = 1.445\text{ V} = \underline{1.4\text{ V}}$
Ebenso: $U_2 = R_2 \cdot I = 3.088\text{ V} = \underline{3.1\text{ V}}$ und $U_3 = R_3 \cdot I = 4.468\text{ V} = \underline{4.5\text{ V}}$
- iii. Leistung total: $P_{\text{el}} = U \cdot I = 9.0\text{ V} \cdot 0.00657\text{ A} = 0.0591\text{ W} = \underline{59\text{ mW}}$
In den Einzelwiderständen: $P_{\text{el},1} = U_1 \cdot I = 1.445\text{ V} \cdot 0.00657\text{ A} = 0.00949\text{ W} = \underline{9.5\text{ mW}}$
Ebenso: $P_{\text{el},2} = U_2 \cdot I = \underline{20\text{ mW}}$ und $P_{\text{el},3} = U_3 \cdot I = \underline{29\text{ mW}}$

Parallele Schaltung der drei Widerstände

- i. Gesamtwiderstand: $R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{220\ \Omega} + \frac{1}{470\ \Omega} + \frac{1}{680\ \Omega} \right)^{-1} = 123\ \Omega = \underline{120\ \Omega}$
 \Rightarrow Gesamtstromstärke: $I = \frac{U}{R} = \frac{9.0\text{ V}}{123\ \Omega} = 0.0732\text{ A} = \underline{73\text{ mA}}$
- ii. Spannung: $U = 9\text{ V}$ (über allen Widerständen gleich!)
Teilstromstärken: $I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{9.0\text{ V}}{220\ \Omega} = 0.0409\text{ A} = \underline{41\text{ mA}}$
Ebenso: $I_2 = \frac{U}{R_2} = 0.0191\text{ A} = \underline{19\text{ mA}}$ und $I_3 = \frac{U}{R_3} = 0.0132\text{ A} = \underline{13\text{ mA}}$
- iii. Leistung total: $P_{\text{el}} = U \cdot I = 9.0\text{ V} \cdot 0.0732\text{ A} = 0.659\text{ W} = \underline{660\text{ mW}}$
In den Einzelwiderständen: $P_{\text{el},1} = U \cdot I_1 = 9.0\text{ V} \cdot 0.0409\text{ A} = 0.368\text{ W} = \underline{370\text{ mW}}$
Ebenso: $P_{\text{el},2} = U \cdot I_2 = \underline{170\text{ mW}}$ und $P_{\text{el},3} = U \cdot I_3 = \underline{120\text{ mW}}$

- (b) Die Steckdosenspannung von 230 V liegt bei der Parallelschaltung über jedem der beiden Geräte an. Mit der Projektorleistung ergibt sich für die Stromstärke in diesem Gerät:

$$P_{\text{el}} = U \cdot I \quad \Rightarrow \quad I_{\text{H}} = \frac{P_{\text{el,H}}}{U} = \frac{450\text{ W}}{230\text{ V}} = 1.96\text{ A}$$

Der Gesamtstrom ist die Summe der Teilströme. Somit beträgt der Strom durch die Stereoanlage:

$$I_{\text{S}} = I - I_{\text{H}} = 2.31\text{ A} - 1.96\text{ A} = 0.35\text{ A}$$

Für die beiden Gerätewiderstände folgt:

$$R_{\text{H}} = \frac{U}{I_{\text{H}}} = \frac{230\text{ V}}{1.96\text{ A}} = 117\ \Omega = \underline{120\ \Omega} \quad \text{und} \quad R_{\text{S}} = \frac{U}{I_{\text{S}}} = \frac{230\text{ V}}{0.35\text{ A}} = 657\ \Omega = \underline{660\ \Omega}$$

Mit diesen Werten berechnen wir schliesslich noch den Gesamtwiderstand:

$$R = \left(\frac{1}{R_{\text{H}}} + \frac{1}{R_{\text{S}}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{117\ \Omega} + \frac{1}{657\ \Omega} \right)^{-1} = 99.3\ \Omega = \underline{99\ \Omega}$$

Derselbe Wert ergibt sich übrigens direkt aus Spannung und Gesamtstromstärke:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{230\text{ V}}{2.31\text{ A}} = 99.6\ \Omega = \underline{100\ \Omega}$$

Dass die beiden Werte nicht genau übereinstimmen, ist nur eine Folge der Zwischenresultatrundungen.

(c) Wenn Ariane n Widerstände von je $100\ \Omega$ parallel schaltet, so folgt für den Gesamtwiderstand:

$$\frac{1}{R} = \underbrace{\frac{1}{100\ \Omega} + \dots + \frac{1}{100\ \Omega}}_{n\text{-mal}} = \frac{n}{100\ \Omega} \Rightarrow R = \frac{100\ \Omega}{n}$$

Soll der Ersatzwiderstand $R = 17\ \Omega$ betragen, so folgt für die Anzahl parallel zu schaltender Widerstände:

$$n = \frac{100\ \Omega}{17\ \Omega} = 5.88 \approx 6$$

Die beste Annäherung wird also mit 6 Widerständen erreicht. Damit beträgt der realisierte Ersatzwiderstandswert:

$$R = \frac{100\ \Omega}{6} = 16.67\ \Omega$$

Damit dürfte Ariane hoffentlich einigermaßen zufrieden sein.

(d) Für die Parallelschaltung der 8 Widerstände folgt:

$$R_{\text{total}} = \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right)^{-1} \Omega = 2^{-1} \Omega = \underline{\underline{0.5\ \Omega}}$$

Da für jeden einzelnen der Widerstände das Ohmsche Gesetz $U_i = R_i \cdot I_i$, wobei alle Spannungen U_i gleich gross sind, müssen die Stromstärken gerade im umgekehrten Verhältnis zueinander stehen wie die Widerstände. Es gilt also:

$$\underline{\underline{I_1 : I_2 : I_4 : I_8 : I_{16} : I_{32} : I_{64} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64}}}$$

2. Berechnungen in etwas grösseren Widerstandsschaltungen

Für die Schaltungen ergeben sich die folgenden Werte zu den einzelnen Widerständen:

Widerstand Nr. i	1	2	3	4
Schaltung A: $R_{\text{total}} = 830\ \Omega$, $I_{\text{total}} = 36\ \text{mA}$				
Spannung U_i (V)	3.6	6.5	7.9	11.9
Stromstärke I_i (mA)	36	36	36	36
Schaltung B: $R_{\text{total}} = 186\ \Omega$, $I_{\text{total}} = 162\ \text{mA}$				
Spannung U_i (V)	10.7	19.3	12.0	18.0
Stromstärke I_i (mA)	107	107	55	55
Schaltung C: $R_{\text{total}} = 43\ \Omega$, $I_{\text{total}} = 694\ \text{mA}$				
Spannung U_i (V)	30.0	30.0	30.0	30.0
Stromstärke I_i (mA)	300	167	136	91
Schaltung D: $R_{\text{total}} = 176\ \Omega$, $I_{\text{total}} = 170\ \text{mA}$				
Spannung U_i (V)	17.0	13.0	13.0	13.0
Stromstärke I_i (mA)	170	72	59	39
Schaltung E: $R_{\text{total}} = 196\ \Omega$, $I_{\text{total}} = 153\ \text{mA}$				
Spannung U_i (V)	9.8	9.8	20.2	20.2
Stromstärke I_i (mA)	98	55	92	61
Schaltung F: $R_{\text{total}} = 529\ \Omega$, $I_{\text{total}} = 57\ \text{mA}$				
Spannung U_i (V)	5.7	5.6	5.6	18.7
Stromstärke I_i (mA)	57	31	26	57

3. Felix und seine beiden Widerstände

Es gilt: $R_1 + R_2 = 100$ und $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5}$. Dabei wissen wir, dass die Widerstände in Ω angegeben sind und demzufolge am Ende der Rechnung auch in dieser Einheit herauskommen.

Umformung der ersten Gleichung: $R_2 = 100 - R_1$. Einsetzen in die zweite Gleichung und ausrechnen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5} & | R_2 = 100 - R_1 \\ \Rightarrow & \frac{1}{R_1} - \frac{1}{100 - R_1} = \frac{1}{5} & | \cdot 5R_1(100 - R_1) \\ \Leftrightarrow & R_1^2 - 100 \cdot R_1 + 500 \cdot R_1 = 0 & | \text{Mitternachtsformel} \\ \Leftrightarrow & R_{1/2} = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 1 \cdot 500}}{2 \cdot 1} & | \text{ausrechnen} \\ & = 94.7 \text{ oder } 5.28 \quad (\text{in } \Omega) \end{aligned}$$

R_1 und R_2 treten im anfänglichen Problem völlig symmetrisch auf. D.h., wir haben hier gerade ihre beiden Werte erhalten. Es gibt nichts mehr zurückeinzusetzen: $R_1 = \underline{\underline{94.7 \Omega}}$ und $R_2 = \underline{\underline{5.28 \Omega}}$ (oder umgekehrt).

4. Verkabelung der Geräte im Haushalt

Unsere Geräte sind für eine Netzspannung von 230 V ausgelegt. Eine höhere oder eine niedrigere Spannung führt automatisch dazu, dass ein Gerät zu viel oder zu wenig Leistung abbekommt. Dies wird durch den Widerstand des Gerätes gesteuert: $P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$.

Bei Mehrfachsteckern und Steckdosenleisten müssen die Geräte folglich parallel angeschlossen sein, denn nur so liegt über ihnen allen die Netzspannung an.

5. Helligkeitswettbewerb in einer Lämpchenschaltung

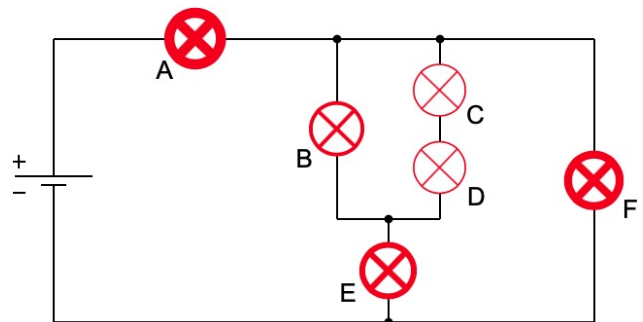
Es geht darum, die Verteilung des Gesamtstroms in die Teilströme richtig zu erkennen. Klar ist, dass der ganze Strom durch Lämpchen A fließt. Dieses ist sicher das hellste.

Danach teilt sich der Strom auf zwei Wege auf:

Ein Teil des Stroms fließt durch Kombination aus den Lämpchen B, C, D und E, der andere Teil durch das Lämpchen F. Da die Kombination aus B, C, D und E sicher einen grösseren Widerstand als das Lämpchen F aufweist (das Lämpchen E ist in Serie zum Rest geschaltet), wird mehr Strom durch das Lämpchen F fließen als durch den anderen Weg. F ist somit am zweit hellsten.

Da Lämpchen E in Serie zur Kombination aus B, C, und D geschaltet ist, wird E vom ganzen Strom durch diesen Weg passiert. Es muss das dritt hellste Lämpchen sein.

Lämpchen B ist das viert hellste Lämpchen, da dieser Weg nur halb soviel elektrischen Widerstand aufweist wie der Weg über die beiden Lämpchen C und D. Letztere leuchten beide gleich schwach, da sie in Serie geschaltet sind und somit durch beide Lämpchen der gleiche Strom fließt.



6. Kochplatten-Elektrik

- (a) Am meisten Strom fliesst insgesamt, wenn der Gesamtwiderstand am geringsten ist. Dies ist bei der Parallelschaltung der Fall, weil der Widerstand einer Parallelschaltung kleiner ist als jeder einzelne in ihr enthaltene Widerstand. Umgekehrt hat die Serieschaltung sicher den grössten Gesamtwiderstand. Dann fliesst am wenigsten Strom. Dazwischen liegen die beiden Schaltungen mit den einzelnen Widerständen alleine, wobei bei R_1 alleine mehr Strom fliesst ($R_1 < R_2$). Für die Reihenfolge der Heizleistungen folgt also:

$$P_{\text{parallel}} > P_1 > P_2 > P_{\text{seriell}}$$

Für die kombinierten Schaltungen ergibt sich:

$$R_{\text{parallel}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = 42.8 \, \Omega \quad \text{und} \quad R_{\text{seriell}} = R_1 + R_2 = 180 \, \Omega$$

Somit erhalten wir für die vier Heizstufen die Leistungen:

$$P_{\text{parallel}} = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R_{\text{parallel}}} = \frac{U^2}{R_{\text{parallel}}} = \frac{(230 \, \text{V})^2}{42.8 \, \Omega} = \underline{\underline{1236 \, \text{W}}}$$
$$P_1 = \frac{(230 \, \text{V})^2}{70 \, \Omega} = \underline{\underline{756 \, \text{W}}} \quad P_2 = \frac{(230 \, \text{V})^2}{110 \, \Omega} = \underline{\underline{481 \, \text{W}}} \quad P_{\text{seriell}} = \frac{(230 \, \text{V})^2}{180 \, \Omega} = \underline{\underline{294 \, \text{W}}}$$

- (b) **Heizstufe 1:** Nur der $416 \, \Omega$ -Widerstand ist angehängt.

$$\Rightarrow P_{\text{el},1} = \frac{U^2}{R_1} = \frac{(230 \, \text{V})^2}{416 \, \Omega} = \underline{\underline{127 \, \text{W}}}$$

Heizstufe 2: Serieschaltung des $169 \, \Omega$ - und des $86 \, \Omega$ -Widerstands.

$$\Rightarrow R_2 = 169 \, \Omega + 86 \, \Omega = 255 \, \Omega \Rightarrow P_{\text{el},2} = \frac{U^2}{R_2} = \frac{(230 \, \text{V})^2}{255 \, \Omega} = \underline{\underline{207 \, \text{W}}}$$

Heizstufe 3: Nur der $169 \, \Omega$ -Widerstand ist angehängt.

$$\Rightarrow P_{\text{el},3} = \frac{U^2}{R_3} = \frac{(230 \, \text{V})^2}{169 \, \Omega} = \underline{\underline{313 \, \text{W}}}$$

Heizstufe 4: Nur der $86 \, \Omega$ -Widerstand ist angehängt.

$$\Rightarrow P_{\text{el},4} = \frac{U^2}{R_4} = \frac{(230 \, \text{V})^2}{86 \, \Omega} = \underline{\underline{615 \, \text{W}}}$$

Heizstufe 5: Parallelschaltung des $169 \, \Omega$ - und des $86 \, \Omega$ -Widerstands.

$$\Rightarrow R_5 = \left(\frac{1}{169 \, \Omega} + \frac{1}{86 \, \Omega} \right)^{-1} = 57 \, \Omega \Rightarrow P_{\text{el},5} = \frac{U^2}{R_5} = \frac{(230 \, \text{V})^2}{57 \, \Omega} = \underline{\underline{928 \, \text{W}}}$$

Heizstufe 6: Parallelschaltung aller drei Widerstände.

$$\Rightarrow R_6 = \left(\frac{1}{169 \, \Omega} + \frac{1}{86 \, \Omega} + \frac{1}{416 \, \Omega} \right)^{-1} = 50 \, \Omega \Rightarrow P_{\text{el},6} = \frac{U^2}{R_6} = \frac{(230 \, \text{V})^2}{50 \, \Omega} = \underline{\underline{1060 \, \text{W}}}$$