# 5 Kinematik und Dynamik bei Kreisbewegungen

**⇒ Wie spielen die Kräfte bei Kreisbewegungen zusammen?**

## 5.1 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus

Auch die Kreisbewegung veranschaulichen wir uns am Beispiel des VBZ-Busses. Der Bus fahre mit konstanter Geschwindigkeit durch eine Kurve. Wir sprechen von einer **gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)**. Folgende Angaben gelten für die Kurvenfahrt des Busses:

- Die Masse des Busses beträgt immer noch $26.0\,\mathrm{t}$.
- Die Kurve besitze einen **Kurven-** oder **Bahnradius** von $63\,\mathrm{m}$.
- Die **(Bahn-)Geschwindigkeit** des Busses sei konstant und betrage $v = 12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

## 5.2 Die Kinematik der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)

Ein Körper, der gleichmässig eine Kreisbahn abfährt, beschreibt eine **gleichförmige Kreisbewegung (gfK)**. Seine Geschwindigkeit bezeichnet man in diesem Fall als **Bahngeschwindigkeit** und es gilt:

**Bahngeschwindigkeit bei der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)**

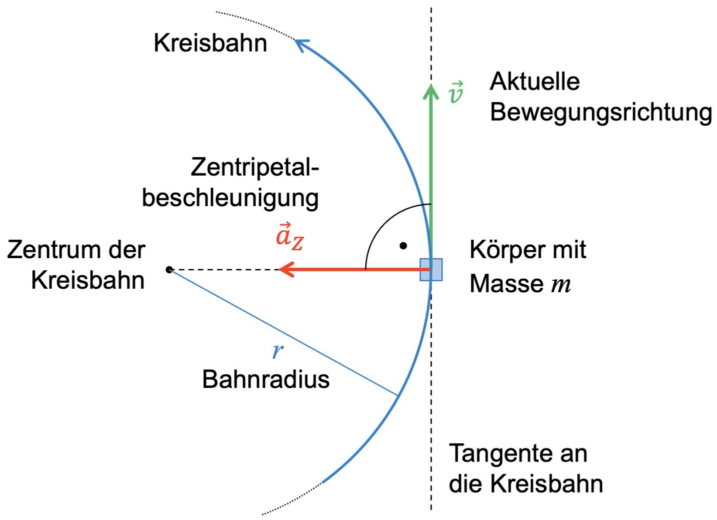
*Beschreibt ein Körper eine gleichförmige Kreisbewegung mit* **Bahnradius** $r$ *und* **Umlaufzeit** $T$*, so gilt für seine* **Bahngeschwindigkeit** $v$*:*

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 1 \text{ Kreisumfang pro 1 Umlaufszeit} \tag{22}$$

Würde der VBZ-Bus eine Runde in einem Kreisel fahren, so ergäbe sich für seine Umlaufszeit aus Gleichung (22):

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 63\,\mathrm{m}}{12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 32\,\mathrm{s}$$

Der Geschwindigkeitsbetrag $v$ bleibt bei einer gfK konstant. Zur Geschwindigkeit gehört aber auch eine **Richtung**. Sie muss vollständigerweise als **Vektor** (= **Pfeil**) dargestellt werden: $\vec{v}$. Bei einer Kreisbewegung liegt die momentane Bewegungsrichtung $\vec{v}$ stets auf einer Tangente an die Kreisbahn!



Der Körper muss nun eine Beschleunigung erfahren, welche **für die Veränderung der Bewegungsrichtung verantwortlich ist, den Geschwindigkeitsbetrag aber unverändert lässt**. Diese Art von Beschleunigung nennt man **Zentripetalbeschleunigung** $\vec{a}_Z$.

> **Die Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_Z$**
>
> *Beschreibt ein Körper eine gfK mit der Bahngeschwindigkeit $v$ und dem Bahnradius $r$, so muss er unter dem Einfluss einer* **Zentripetalbeschleunigung** *$\vec{a}_Z$ stehen. Diese steht stets senkrecht zur aktuellen Bewegungsrichtung $\vec{v}$ und zeigt ins Zentrum der Kreisbahn. Ihr Betrag ist gegeben durch:*
>
> $$a_Z = \frac{v^2}{r} \tag{23}$$

**Anmerkungen zur Zentripetalbeschleunigung**

- Gleichung (23) für den Betrag von $a_Z$ lässt sich herleiten, indem man sich überlegt, wie sich die Geschwindigkeitsrichtung bei einer Kreisbewegung momentan verändern muss. Bis jetzt steht uns die Mathematik (Vektorgeometrie, Differentialrechnung) für diese Herleitung allerdings nicht zur Verfügung, weshalb wir an dieser Stelle darauf verzichten und die Gleichung so "akzeptieren" wollen.
- Der Vorsatz **zentripetal** wurde durch Newton geprägt. Er bedeutet soviel wie "nach der Mitte (des Kreises) strebend" (*petere* = lat. Verb für "streben nach" oder "zielen").
- Im Beispiel des VBZ-Busses erhalten wir für den Zentripetalbeschleunigungsbetrag mit (23):

  $$a_Z = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{63\,\mathrm{m}} = 2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

  Zur nochmaligen Verdeutlichung: Der Bus wird durch diese Zentripetalbeschleunigung weder schneller, noch langsamer. Sie hält ihn lediglich auf seiner Kreisbahn!

## 5.3 Die Dynamik der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)

Das Aktionsprinzip (= 2. Newtonsches Axiom) erklärt uns den Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung: Die Zusammenfassung aller wirkenden Kräfte zu einer einzigen, resultierenden Kraft $F_{\mathrm{res}}$ zeigt stets in die Richtung der Beschleunigung $a$. Für die Beträge gilt nach wie vor:

$$F_{\mathrm{res}} = m \cdot a$$

Dies gilt auch für Kreisbewegungen! Ein Körper, der eine gfK beschreibt, muss eine resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ erfahren, welche in die Richtung der Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_Z$, also ins Zentrum der Kreisbahn zeigt. Für den Betrag dieser resultierenden Kraft folgt mit (14) und (23) sofort:

$$F_{\mathrm{res}} = m \cdot a_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Im Falle einer gfK bezeichnen wir die resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ neu als **Zentripetalkraft** $\vec{F}_Z$. Dies ist lediglich ein neuer Name! Es gibt daran nichts Neues zu verstehen.

**Zentripetalkraft $\vec{F}_Z$ = Bezeichnung für die resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ im Falle einer gfK**

**Das Aktionsprinzip bei der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)**

*Ein Körper beschreibt genau dann eine gfK, wenn die resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ senkrecht zu seiner aktuellen Bewegungsrichtung $\vec{v}$ steht. In diesem Fall bezeichnen wir $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ als* **Zentripetalkraft** $\vec{F}_{\mathrm{Z}}$.

*Bewegt sich ein Körper der Masse $m$ mit der Bahngeschwindigkeit $v$ auf einer Kreisbahn mit Radius $r$, so gilt für den Betrag von $\vec{F}_{\mathrm{Z}}$:*

$$F_{\mathrm{Z}} = m \cdot a_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r} \tag{24}$$

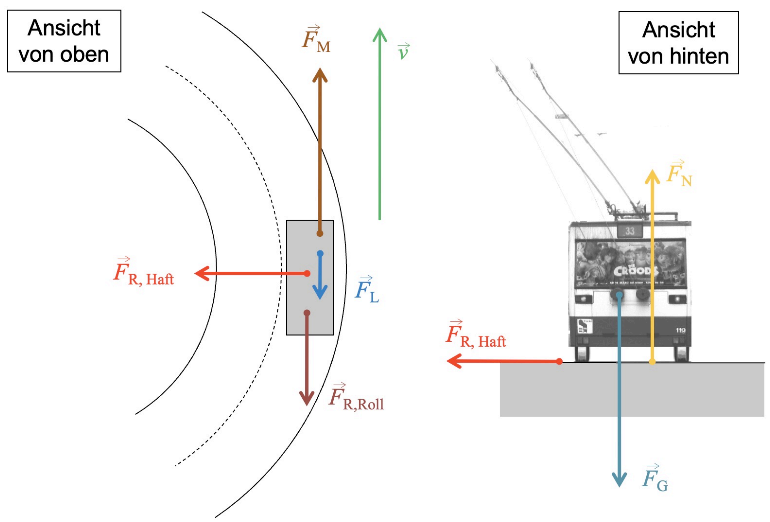
Der Körper mit Masse $m$ beschreibt eine gleichförmige Kreisbewegung mit Bahnradius $r$ und -geschwindigkeit $v$ $\Leftrightarrow$ Die auf den Körper wirkende resultierende Kraft $\vec{F}_{res}$ ist eine Zentripetalkraft $\vec{F}_{Z}$, d.h., sie steht senkrecht zur aktuellen Bewegungsrichtung $\vec{v}$ und beträgt:

$$F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

**Anmerkungen zur Zentripetalkraft**

- Die Formel für $F_{\mathrm{Z}}$ beinhaltet die wesentlichen physikalischen Aussagen:
  Um einen Körper auf einer Kreisbahn zu halten, braucht man **mehr Kraft**, ...
  - **je mehr Masse** $m$ der Körper besitzt ($F_{\mathrm{Z}} \sim m$),
  - **je enger die Kurve**, also je kleiner der **Bahnradius** $r$ ist ($F_{\mathrm{Z}} \sim \frac{1}{r}$),
  - vor allem aber **je grösser die Geschwindigkeit** $v$ des Körpers ist, denn sie fliesst quadratisch in die Zentripetalkraft ein ($F_{\mathrm{Z}} \sim v^2$)!
- Der im Alltag so oft gehörte Begriff **Zentrifugal**- oder **Fliehkraft** meint **nicht** das Gleiche wie die Zentripetalkraft! Wir kommen im Abschnitt 5.5 darauf zu sprechen.

## 5.4 Die Kräfte bei der Kurvenfahrt des VBZ-Busses




Kraftgleichungen (Analyse)

Vertikale Richtung

Ruhe $\Longrightarrow$ $F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}}$

Horizontal, parallel zu $v$:

gfB $\Longrightarrow$ $F_{\mathrm{M}} = F_{\mathrm{R,Roll}} + F_{\mathrm{L}}$

Horizontal, senkrecht zu $v$:

gfK $\Longrightarrow$ $F_{\mathrm{Z}} = F_{\mathrm{R,Haft}}$

Die auf den Bus wirkenden Kräfte lassen sich in den drei Richtungen des Raumes betrachten:

- **aufwärts ↔ abwärts:** Der Bus ist in vertikaler Richtung in Ruhe und es ist folgt:

$$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G}$$

- **vorwärts ↔ rückwärts:** Der Bus fährt mit konstanter Geschwindigkeit in Vorwärtsrichtung. Laut dem Trägheitsprinzip gilt daher:

$$F_\mathrm{M} = F_\mathrm{R,Roll} + F_\mathrm{L}$$

  Der Motor zieht in Vorwärtsrichtung, um Rollreibung und Luftwiderstand zu kompensieren.

- **rechts ↔ links:** Nehmen wir an, der Bus befinde sich in einer Linkskurve. Dann muss er zwangsläufig aus irgendeinem Grund eine Kraft nach links erfahren, denn als resultierende Kraft muss eine Zentripetalkraft nach links, also ins Zentrum der Kreisbahn entstehen.

  Welche Kraft hält den Bus in der Kurve? Es ist die **seitliche Haftreibung zwischen Pneus und Strasse**. Die Reifen rollen ja nur in Vorwärtsrichtung, seitlich haften sie! Es gilt also:

$$F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{R,Haft}$$

Verfügt der Bus tatsächlich über die benötigte seitliche Haftung? Berechnen wir dazu einmal die aktuelle Zentripetalkraft nach Gleichung (24):

$$F_\mathrm{Z} = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{26\,000\,\mathrm{kg} \cdot \left(12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{63\,\mathrm{m}} = 64\,500\,\mathrm{N}$$

Die Haftreibungszahl zwischen einer trockenen Strasse und Autopneus beträgt z.B. etwa $\mu_\mathrm{H} = 0.85$. Dann folgt für die Haftreibungskraft $F_\mathrm{R,Haft}$ gemäss Gleichung (18) auf Seite 28:

$$F_\mathrm{R,Haft} \leq \mu_\mathrm{H} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{H} \cdot F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{H} \cdot m \cdot g = 0.85 \cdot 26\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 217\,000\,\mathrm{N}$$

Die maximal mögliche Haftreibung reicht also bei Weitem, um den Bus in der Kurve zu halten – schliesslich handelt es sich ja um ein öffentliches Verkehrsmittel, bei dessen Fahrt es niemals in die Nähe der physikalischen Grenzen gehen sollte.

Umgekehrt lässt sich nun aber berechnen, wie schnell der Bus denn bei diesen Bedingungen maximal sein dürfte, um sich gerade noch in der Kurve zu halten:

$$F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{R,Haft,max} = 217\,000\,\mathrm{N}$$

$$F_\mathrm{Z} = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{F_\mathrm{Z} \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{217\,000\,\mathrm{N} \cdot 63\,\mathrm{m}}{26\,000\,\mathrm{kg}}} = 22.93\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 83\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Vielleicht hätten wir eine deutlich grössere maximale Geschwindigkeit erwartet, weil der Unterschied zwischen aktueller Zentripetal- und maximal möglicher Haftreibungskraft oben so gross war:

$$F_\mathrm{Z} = 64\,500\,\mathrm{N} \ll 217\,000\,\mathrm{N} = F_\mathrm{R,Haft,max}$$

Hier widerspiegelt sich der quadratische Einfluss der Geschwindigkeit $v$ in der Zentripetalkraft-Gleichung $F_\mathrm{Z} = \frac{m \cdot v^2}{2}$.

**Nebenbei:** Die Rechnung ist so nicht ganz korrekt, denn die Motorenkraft, die zur Aufrechterhaltung der Geschwindigkeit benötigt wird, ist eigentlich auch eine Komponente der Haftreibungskraft. Das hat zur Folge, dass die maximal mögliche seitliche Haftreibung etwas geringer ist als oben berechnet.

## 5.5 Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen

Will man das Aktionsprinzip (= 2. Newtonsches Axiom) anwenden, so darf das System, in welchem die Kräfte und Bewegungen beschrieben werden, selber nicht beschleunigt sein. Solche nichtbeschleunigten Bezugssysteme heissen **Inertialsysteme**.

Dies trifft für die Strasse in guter Näherung zu, für den Bus hingegen nicht. Deshalb treten innerhalb des Busses scheinbar Kräfte auf, die es von der Strasse aus gesehen gar nicht gibt. Wir sprechen von **Schein-** oder **Trägheitskräften**. Hier seien zwei typische Beispiele ausgeführt:

### "In den Sitz gedrückt werden"

Beschleunigt der Bus von der Strasse aus gesehen, so hat man innerhalb des Busses den Eindruck eine Kraft nach hinten zu erfahren. Dies ist eine Scheinkraft! Sie entsteht, weil unsere Körper aufgrund ihrer Masse träge sind und von sich aus in Ruhe bleiben würden. Der Innenraum des Busses ist hingegen kein Inertialsystem. Er beschleunigt vorwärts. So entsteht für die Menschen im Bus der Eindruck einer nach hinten wirkenden Kraft, gegen die sie sich stemmen müssen.

### Die Zentrifugal- oder Fliehkraft

Macht der Bus eine Linkskurve, so würde sich unser Körper im Bus aufgrund seiner Trägheit aus Sicht der Strasse weiter geradeaus bewegen. Der Bus beschleunigt aber (zentripetal) nach links, und so entsteht innerhalb des Busses der subjektive Eindruck, eine Kraft nach rechts resp. in der Kurve "nach aussen" zu erfahren. Genau diese Kraft – die es aus der Sicht der Strasse gar nicht gibt – wird **Zentrifugal**- oder **Fliehkraft** genannt. Es ist eine Kraft, die nur innerhalb das Busses "existiert" – eben eine Scheinkraft.

## 5.6 Kraftangaben als Vielfache des Ortsfaktors

Grundsätzlich lässt sich jede beliebige auf einen Körper wirkende Kraft $F$ als Vielfaches der Gewichtskraft $F_\mathrm{G}$ ausdrücken, welche der Körper an der Erdoberfläche erfährt:

$$F = x \cdot F_\mathrm{G} \quad \text{resp.} \quad x = \frac{F}{F_\mathrm{G}} \qquad \text{“\textit{Wie oft steckt } } F_\mathrm{G} \text{ \textit{in} } F \text{ \textit{drin?}”}$$

Ist z.B. $x = 5$, also $F = 5 \cdot F_\mathrm{G}$ oder $\frac{F}{F_\mathrm{G}} = 5$, so sagt man, auf den Körper wirken $5\,g$. Man gibt den Vergleich also in **Vielfachen des Ortsfaktors** $g$ an der Erdoberfläche an.

Solche vergleichenden Angaben haben sich besonders für Situationen mit starken Beschleunigungen eingebürgert, wie die folgenden Beispiele zeigen sollen.

### Beschleunigung im Formel-1-Auto

Die Beschleunigung eines Formel-1-Autos beträgt von $0$ auf $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ knapp $a = 17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Der Fahrer (z.B. $72\,\mathrm{kg}$) erfährt diese Beschleunigung, weil seine Rückenlehne ihn mit der entsprechenden Normalkraft nach vorne schiebt. Aus einer Kräfteskizze wird klar, dass diese Normalkraft der Rückenlehne gerade gleich der resultierenden Kraft sein muss. Mit dem Aktionsprinzip (14) folgt:

$$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{res} = m \cdot a = 72\,\mathrm{kg} \cdot 17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1224\,\mathrm{N}$$

Für den Vergleich mit $F_\mathrm{G}$ ist es aber gar nicht notwendig, den Wert der Normalkraft zu kennen. Das gesuchte Vielfache ergibt sich direkt aus dem Vergleich von Beschleunigungswert und Ortsfaktor:

$$F_\mathrm{N} = x \cdot F_\mathrm{G} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F_\mathrm{N}}{F_\mathrm{G}} = \frac{F_\mathrm{res}}{F_\mathrm{G}} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{a}{g} = \frac{17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1.73$$

Der Fahrer wird beim Start also etwa mit $1.7\,g$ in den Sessel gedrückt resp. von diesem beschleunigt.

**Beschleunigungen beim Wäscheschleudern**

Wie stark wird die Wäsche beim Schleudern gegen die Trommelwand gedrückt?

**Vorüberlegungen:** Beim Schleudern drehe sich die Wäschetrommel mit 600 Umdrehungen pro Minute. Dann dauert die einzelne Umdrehung $T = 0.100\,\mathrm{s}$.

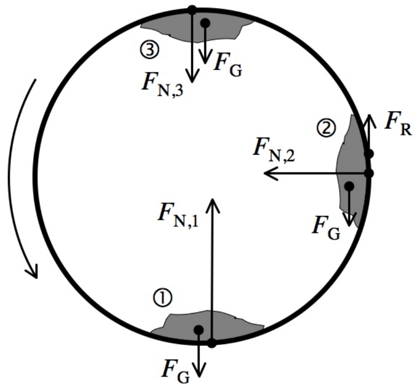
Die Trommel besitze einen Radius von $r = 24.0\,\mathrm{cm}$. Aus (22) folgt für die Bahngeschwindigkeit:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 0.240\,\mathrm{m}}{0.100\,\mathrm{s}} = 15.71\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Für die Zentripetalbeschleunigung erhalten wir aus (23):

$$a_Z = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(15.08\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0.240\,\mathrm{m}} = 947.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

**Kräftesituation:** Wir betrachten einen Wäscheklumpen in drei Momenten der Drehung:




**Folgerungen:** In jedem der drei Momente erfährt der Wäscheklumpen total die gleich grosse Zentripetalkraft $F_Z$ (= resultierende Kraft) in Richtung Trommelmitte, denn es handelt sich ja um eine gfK mit fixem Radius und fixer Geschwindigkeit.

Allerdings setzt sich $F_Z$ in den drei Momenten unterschiedlich zusammen. Daraus schliessen wir auf unterschiedliche Normalkräfte, welche die Wäsche erfährt. Diese lassen sich jeweils in Vielfachen des Ortsfaktors angeben:

- **Situation 1:** Die Normalkraft muss zusätzlich die Gewichtskraft kompensieren:

  $$F_Z = F_{N,1} - F_G \quad \Rightarrow \quad F_{N,1} = F_Z + F_G$$

  $$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{F_{N,1}}{F_G} = \frac{F_Z + F_G}{F_G} = \frac{m \cdot a_Z + m \cdot g}{m \cdot g} = \frac{a_Z}{g} + 1 = \frac{947.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 96.59 + 1 = 97.6$$

  Die Wäsche wird mit $97.6\,g$ gegen die Wand gedrückt!

- **Situation 2:** Die Normalkraft ist gerade gleich der Zentripetalkraft, denn die Gewichtskraft wird durch die Reibungskraft kompensiert. Es folgt:

  $$F_{N,2} = F_Z \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{F_{N,2}}{F_G} = \frac{a_Z}{g} = \frac{947.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 96.59 = 96.6$$

  Die Wäsche wird neu mit $96.6\,g$ gegen die Wand gedrückt!

- **Situation 3:** Normalkraft und Gewichtskraft erzeugen gemeinsam die Zentripetalkraft:

  $$F_Z = F_{N,3} + F_G \quad \Rightarrow \quad F_{N,3} = F_Z - F_G \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{F_{N,3}}{F_G} = 96.59 - 1 = 95.6$$

  Die Wäsche wird "nur noch" mit $95.6\,g$ gegen die Wand gedrückt!

## 5.7 Das Newton'sche Gravitationsgesetz

**Das Newtonsche Gravitationsgesetz**

*Als* **Gravitation** *(oder Schwer-/Gewichtskraft) $\vec{F}_\mathrm{G}$ bezeichnen wir die anziehende Kraft, welche zwei Körper aufgrund ihrer Massen aufeinander ausüben.*

*Für zwei Punktmassen $m_1$ und $m_2$ im Abstand $r$ gilt für den Betrag dieser anziehenden Kraft das sogenannte* **(Newton'sche) Gravitationsgesetz***:*

$$F_\mathrm{G} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{25}$$

*Dabei bezeichnet $G$ die* **universelle Graviationskonstante***. Universell bedeutet: $G$ hat im ganzen Universum den gleichen Wert, nämlich:*

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

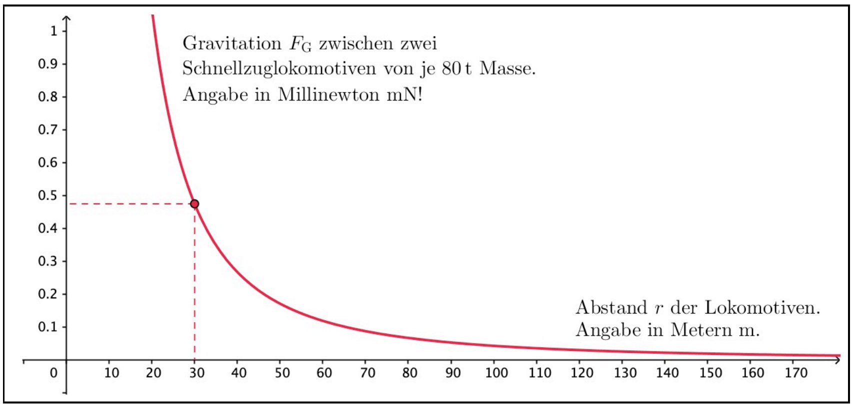
### Anmerkungen zum Gravitationsgesetz

- Im Gravitationsgesetz werden sogenannte **Punktmassen** in die Rechnung eingesetzt. Damit ist ein theoretisches Konstrukt gemeint. Man lässt die Massen der sich anziehenden Körper auf Punkte zusammenschrumpfen, um einen sinnvollen Abstand zwischen ihnen zu definieren.

  Bei überall gleich dichten Kugeln sitzt die Punktmasse genau im Mittelpunkt. Das gilt in guter Näherung für Metallkugeln, aber eben auch für Sterne, Planeten und Monde. Um anders geformte Körper brauchen wir uns kaum Gedanken zu machen, denn die Gravitation ist eine so schwache Kraft, dass sie nur bei riesigen Massen wirklich spürbar und relevant wird.

- Die Gravitation ist proportional zu **beiden** beteiligten Massen.

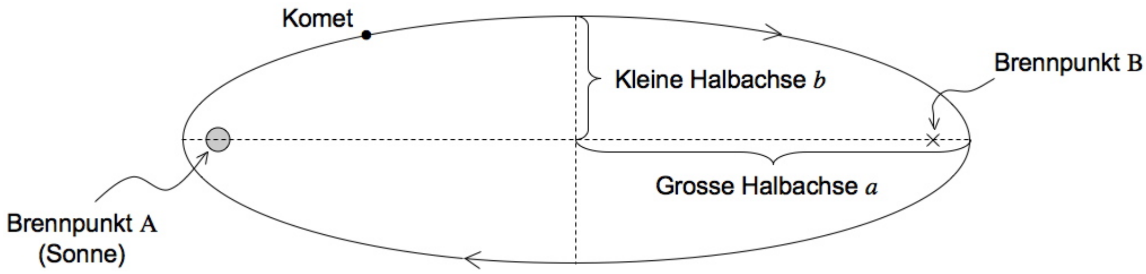
- Entscheidend am Gravitationsgesetz (25) ist das Abstandsquadrat $r^2$ im Nenner: Die Gravitation nimmt mit zunehmendem Abstand $r$ relativ rasch ab, weist aber trotzdem eine **unendliche Reichweite** auf. Das folgende Diagramm zeigt dieses quadratische Abfallverhalten graphisch und illustriert zudem, wie klein die Gravitation in Alltagssituationen ist.




  Die beiden Schnellzuglokomotiven mit doch ansehnlichen 80 Tonnen Masse ziehen sich mit gerademal einem knappen halben Millinewton an, wenn ihre Schwerpunkte einen Abstand von 30 Metern aufweisen – und näher können sie sich auf demselben Gleis kaum kommen! In 60 Metern Entfernung beträgt die Kraft nur noch ein Viertel. So funktioniert ein quadratisches Abfallverhalten: Bei Verdoppelung der Distanz viertelt sich der Wert, denn $2^2 = 4$.

## 5.8 Kreisbahnen von Himmelskörpern

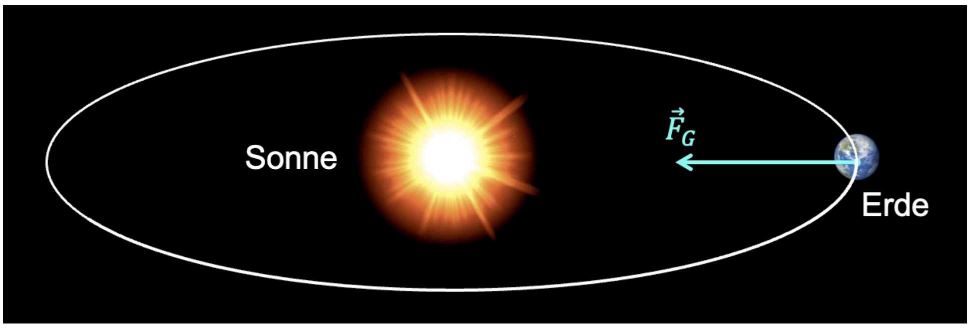
Aus der Newtonschen Mechanik folgt, dass sich leichtere Himmelskörper auf **elliptischen Bahnen** um viel massigere **Zentralkörper** bewegen. Dies gilt also z.B. für Satelliten/Monde um Planeten oder Planeten/Kometen um Sonnen (Sterne).




Es ist mathematisch recht anspruchsvoll, die Newtonsche Mechanik allgemein für ellipitsche Bahnen zu beschreiben. Viele Satelliten, Monde und Planeten – nicht hingegen Kometen – bewegen sich allerdings auf nahezu kreisförmigen Bahnen um den Zentralkörper (Kreis = Spezialfall einer Ellipse mit gleich grossen Halbachsen). Deshalb lassen sich deren Umlaufbewegungen bereits mit den uns bekannten Gleichungen zur gfK gut beschreiben.

### Die "Himmelsgleichung" = Gleichung für Massen, die gravitativ um einen viel massigeren Zentralkörper kreisen

Himmelskörper bewegen sich alleine im nahezu perfekten Vakuum des Weltraums. Sie erfahren deshalb keinerlei Reibungs- oder Kontaktkräfte. D.h., die einzige auf einen Himmelskörper wirkende Kraft ist die Gravitation in Richtung des Zentralkörpers. Hier das Beispiel der um die Sonne kreisenden Erde:




Diese alleinige Kraft $\vec{F}_\mathrm{G}$ muss laut Newton gleich der resultierenden Kraft $\vec{F}_\mathrm{res}$, und das bedeutet im Falle einer Kreisbewegung eben gleich der Zentripetalkraft $\vec{F}_\mathrm{Z}$ sein. Wir folgern:

$$\textbf{"Himmelsgleichung" (Masse kreist um Zentralkörper):} \qquad \vec{F}_\mathrm{Z} = \vec{F}_\mathrm{G} \tag{26}$$

Durch Gleichsetzen der Kraftbeträge folgt aus (24) und (25):

$$F_\mathrm{Z} = \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = F_\mathrm{G} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M}{r} \tag{27}$$

Dabei schreibt man für die Masse des Zentralkörpers gerne ein grosses $M$ und für jene des kreisenden Körpers ein kleines $m$.

Wie wir sehen, kürzt sich bei gravitativen Kreisbewegungen um Zentralkörper die Masse $m$ des kreisenden Körpers weg. Das ist immer so. Für die Umlaufszeiten oder Geschwindigkeiten von Satelliten ist die Satellitenmasse also stets bedeutungslos.

### Bahnradius und Umlaufszeit

Ist alleine die Gravitation für eine kreisförmige Umlaufbahn verantwortlich, so gehört zu jedem Bahnradius $r$ eine ganz bestimmte Umlaufszeit $T$. Die mathematische Beziehung ergibt sich direkt aus Gleichung (27), wenn auf der linken Seite die Gleichung (22) für die Bahngeschwindigkeit $v$ bei einer gfK eingesetzt wird:

$$
\begin{aligned}
& & v^2 &= \frac{G\cdot M}{r} & &\mid v = \frac{2\pi r}{T} \\
&\Leftrightarrow & \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} &= \frac{G\cdot M}{r} & &\mid : (4\pi^2 r^2) \\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{T^2} &= \frac{G\cdot M}{4\pi^2\, r^3} & &\mid (\ldots)^{-1} \\
&\Leftrightarrow & T^2 &= \frac{4\pi^2 r^3}{G\cdot M} & &\mid \sqrt{\ldots} \\
&\Rightarrow & T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G\cdot M}} & &
\end{aligned}
$$

Soll ein Satellit auf einer bestimmten Höhe ausgesetzt werden, so ist dadurch also bereits vorgegeben, wie lange seine Umlaufzeit zu dauern hat. Das gilt z.B. auch für das Space Shuttle. Arbeitet es mit abgestelltem Antrieb auf einer Höhe von 450 km über der Erdoberfläche, so ergibt sich für die Dauer einer Erdumrundung:[6]

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G\cdot M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(6\,820\,000\,\mathrm{m})^3}{6.674\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot 5.97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}} = 5607\,\mathrm{s} = 93\,\mathrm{min}$$

### Geostationäre Satelliten

Umgekehrt kann man nun fragen, auf welcher Höhe ein Satellit positioniert werden muss, wenn man eine bestimmte Umlaufszeit vorgeben möchte. Aus obiger Gleichung ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} &= \frac{G\cdot M}{r} & &\mid \cdot \frac{r\cdot T^2}{4\pi^2} \\
&\Leftrightarrow & r^3 &= \frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2} & &\mid \sqrt[3]{\ldots} \\
&\Rightarrow & r &= \sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}} & &
\end{aligned}
$$

Speziell nützlich für die Wetterbeobachtung sind **geostationäre Satelliten**. Diese stehen stets über demselben Ort auf dem Äquator. Dies ist möglich, weil ihre Flughöhe so gross ist, dass die Umlaufszeit gerade einen Tag beträgt. Berechnen wir den zugehörigen Bahnradius:[7]

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot 5.97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\cdot(86\,400\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2}} = 42.2\cdot 10^6\,\mathrm{m} = 42\,200\,\mathrm{km}$$

Für die Höhe über Erdboden folgt: $h = r - R = 42\,200\,\mathrm{km} - 6370\,\mathrm{km} = 35\,800\,\mathrm{km}$. Geostationäre Satelliten sind im Vergleich zu anderen Satelliten sehr weit von der Erde entfernt!

[6] Erdradius $R = 6370\,\mathrm{km} \Rightarrow$ Bahnradius $r = 6370\,\mathrm{km} + 450\,\mathrm{km} = 6820\,\mathrm{km}$, Erdmasse $M = 5.97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$

[7] $T = 1\,\mathrm{Tag} = 24\cdot 3600\,\mathrm{s} = 86\,400\,\mathrm{s}$

# 6 Arbeit, Energie und Leistung

**⇒ Energetische Betrachtungen – allgemein und speziell für die Mechanik**

## 6.1 Arbeit, Energie und Leistung beim VBZ-Bus

Die Kapitel 3 und 4 liefern sämtliche Daten, um zur Fahrt des Busses nun auch energetische Betrachtungen anzustellen. Diese werden hier als Beispiele dienen.

## 6.2 Die Definition der Arbeit $W$: "Arbeit ist Kraft mal Weg"

Vorgänge resp. Abläufe sind in der Regel mit einem Arbeitsaufwand verbunden. Die Physik möchte den für einen Vorgang benötigten Arbeitsaufwand als Zahl mit Einheit angeben können. Dazu definiert sie die Arbeit – resp. gedacht eben: den **Aufwand** für eine Arbeit – wie folgt:

**Die Definition der Arbeit $W$ (= Goldene Regel der Mechanik)**

*Auf einen Körper wirke eine konstante Kraft $\vec{F}$. Wird der Körper um die Strecke $s$ in die Richtung von $\vec{F}$ bewegt (egal wie und warum), so wird aufgrund dieser Kraft die* **Arbeit** *$W$ am Körper verrichtet. Diese ist definiert durch:*

$$W = F \cdot s \tag{28}$$

*"Arbeit = Kraft mal Weg."*

**Anmerkungen zur Arbeitsdefinition**

- Das Symbol $W$ hat seinen Ursprung im englischen Wort *work*.
- **Idee der Arbeitsdefinition:** Bei (mechanischen) Vorgängen geht es um die **Verschiebung** von Objekten. Zwei Faktoren machen eine solche Verschiebung aufwändig:

  i. Es muss mehr Arbeit verrichtet werden, wenn die dafür benötigte Kraft gross ist → $F$.

  ii. Je weiter die Verschiebung geht, desto mehr Arbeit muss verrichtet werden → $s$.

  Die Kombination beider Aspekte lautet: "Arbeit ist Kraft mal Weg." Diese Aussage bezeichnet man auch als die **Goldene Regel der Mechanik**.
- **Die Verschiebung des Körpers um die Strecke $s$ muss in Richtung der Kraft $\vec{F}$ erfolgen.** Nur genau dann gilt die Arbeitsdefinition in dieser Form.
- **Der Kraftbetrag $F$ muss über die Strecke hinweg konstant sein (oder es muss sich um einen Mittelwert handeln), damit man sie in diese Definition einsetzen darf.** Was sollte man denn sonst für den Wert von $F$ einsetzen?
- Die Arbeit $W$ erhält eine eigene SI-Grundeinheit, das **Joule** J. Aus der Arbeitsdefinition folgt für die Zusammensetzung des Joules aus SI-Grundeinheiten:

$$[\,W\,] = [\,F\,] \cdot [\,s\,] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} =: \mathrm{Joule} = \mathrm{J}$$

**Beispielrechnungen und -überlegungen am VBZ-Bus**

Ungerundete Bewegungs- und Kraftdaten aus den Kapiteln 3 und 4:

| | | |
|---|---|---|
| Allgemein: | Busmasse: | $m = 26\,000\,\mathrm{kg}$ |
| | Normalkraft: | $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} = m \cdot g = 255\,060\,\mathrm{N}$ |
| | Rollreibungszahl: | $\mu_\mathrm{R} = 0.0075$ |
| | Rollreibungskraft: | $F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{N} = 1913\,\mathrm{N}$ |
| 1. Bewegungsabschnitt: | Resultierende Kraft: | $F_\mathrm{res,1} = m \cdot a_1 = 46\,429\,\mathrm{N} \quad \left(a_1 = 1.786\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$ |
| | Motorenkraft: | $F_\mathrm{M,1} = F_\mathrm{res,1} + F_\mathrm{R} = 48\,342\,\mathrm{N}$ |
| 2. Bewegungsabschnitt: | Motorenkraft: | $F_\mathrm{M,2} = F_\mathrm{R} = 1913\,\mathrm{N}$ |
| 3. Bewegungsabschnitt: | Resultierende Kraft: | $F_\mathrm{res,3} = m \cdot a_3 = 65\,000\,\mathrm{N} \quad \left((-)\,2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$ |
| | Bremskraft: | $F_\mathrm{Brems,3} = F_\mathrm{res,3} - F_\mathrm{R} = 63\,087\,\mathrm{N}$ |

- Die Reibungskraft wirkt stets entgegen der Bewegungsrichtung des Busses. Das bedeutet, dass der Bus aufgrund dieser Kraft selber Arbeit abgeben muss. Wir sprechen von **Reibungsarbeit** $W_\mathrm{R}$. Diese lässt sich leicht berechnen, insgesamt und auf den drei Teilstrecken:

| | |
|---|---|
| 1. Bewegungsabschnitt: | $W_\mathrm{R,1} = F_\mathrm{R} \cdot s_1 = 1913\,\mathrm{N} \cdot 43.75\,\mathrm{m} = 83\,694\,\mathrm{J} = 84\,\mathrm{kJ}$ |
| 2. Bewegungsabschnitt: | $W_\mathrm{R,2} = F_\mathrm{R} \cdot s_2 = 1913\,\mathrm{N} \cdot 125\,\mathrm{m} = 239\,125\,\mathrm{J} = 240\,\mathrm{kJ}$ |
| 3. Bewegungsabschnitt: | $W_\mathrm{R,3} = F_\mathrm{R} \cdot s_3 = 1913\,\mathrm{N} \cdot 31.25\,\mathrm{m} = 59\,781\,\mathrm{J} = 6\underline{0}\,\mathrm{kJ}$ |
| Gesamtreibungsarbeit: | $W_\mathrm{R,total} = W_\mathrm{R,1} + W_\mathrm{R,2} + W_\mathrm{R,3} = 382\,600\,\mathrm{J} = 380\,\mathrm{kJ}$ |

- Solange der Buschauffeur aufs Gaspedal drückt, verrichtet der Motor Arbeit am Bus, denn die Motorenkraft zieht in Bewegungsrichtung $\rightarrow W_\mathrm{M}$:

  **2. Bewegungsabschnitt:** Auf diesem Bewegungsabschnitt verrichtet der Motor am Bus insgesamt die Arbeit, die dieser in Form von Reibungsarbeit wieder abgibt:

$$W_\mathrm{M,2} = W_\mathrm{R,2} = 239\,125\,\mathrm{J} = 240\,\mathrm{kJ}$$

  **1. Bewegungsabschnitt:** Der Motor muss einerseits den Bus beschleunigen und andererseits die Reibung kompensieren. Unter Verwendung der Arbeitsdefinition werden **Beschleunigungsarbeit** $W_\mathrm{B,1}$ und Kompensation der Reibungsarbeit $W_\mathrm{R,1}$ gut erkennbar:

$$\begin{aligned} W_\mathrm{M,1} = F_\mathrm{M,1} \cdot s_1 = (F_\mathrm{res,1} + F_\mathrm{R}) \cdot s_1 &= \underbrace{F_\mathrm{res,1} \cdot s_1}_{=W_\mathrm{B,1}} + \underbrace{F_\mathrm{R} \cdot s_1}_{=W_\mathrm{R,1}} \\ &= 2031.3\,\mathrm{kJ} + 83.7\,\mathrm{kJ} = 2115\,\mathrm{kJ} \approx 2.1\,\mathrm{MJ} \end{aligned}$$

  Das Anfahren ist deutlich aufwändiger als die gleichförmige Fortsetzung der Fahrt.

- Während dem Abbremsen (3. Bewegungsabschnitt) gibt der Bus nur noch Arbeit ab. Dies geschieht aufgrund zweier Kräfte. Einerseits wirkt immer noch die Rollreibung. Andererseits gibt es eine zusätzliche Haftreibung zwischen Pneus und Strasse, welche von der Verlangsamung der Räder aufgrund der Bremsen herrührt. Für diese abgegebene Bremsarbeit $W_\mathrm{Brems,3}$ gilt:

$$W_\mathrm{Brems,3} = F_\mathrm{Brems,3} \cdot s_3 = 63.087\,\mathrm{kN} \cdot 31.25\,\mathrm{m} = 1972\,\mathrm{kJ} = 2.0\,\mathrm{MJ}$$

## 6.3 "Der Arbeitsbetrag ist prozessunabhängig!"

Die an einem Körper verrichtete Arbeit verändert automatisch dessen **Zustand**.

Was damit gemeint ist, verstehen wir besser am konkreten Beispiel: Die Beschleunigungsarbeit im 1. Bewegungsabschnitt bringt den VBZ-Bus von Geschwindigkeit $0$ (= erster Bewegungszustand) auf $12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (= zweiter Bewegungszustand).

Für die Beschleunigungsarbeit $W_\mathrm{B}$ darf es allerdings nicht darauf ankommen, wie diese Beschleunigung abläuft. Wenn wir alle Störeffekte, insbesondere alle Arten von Reibung, ausblenden, sollte für das Erreichen der Endgeschwindigkeit stets derselbe Aufwand, also der gleiche Arbeitsbetrag benötigt werden. Das ist eine wesentliche Anforderung an eine sinnvolle Arbeitsdefinition!

Beim VBZ-Bus darf es also keine Rolle spielen, mit welcher Beschleunigung er seine Endgeschwindigkeit von $12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ erreicht, die Beschleunigungsarbeit $W_\mathrm{B}$ muss stets denselben Wert aufweisen.

Tatsächlich genügt die Arbeitsdefinition $W = F \cdot s$ dieser Anforderung, was am Beispiel des VBZ-Busses auch ganz plausibel wird: Entweder beschleunigt der Bus mit grosser Kraft $F$, also auch mit grosser Beschleunigung, dann braucht er aber nur eine kurze Beschleunigungsstrecke $s$. Oder der Bus beschleunigt langsam, also mit geringer Kraft $F$, was aber eine längere Beschleunigungsstrecke $s$ zur Folge hat.

Dass unsere Arbeitsdefinition vom tatsächlichen Prozessablauf unabhängige Arbeitsbeträge liefert, ist enorm wichtig, denn dies wird es uns ermöglichen **Energie** als das in einem Zustand gespeicherte Arbeitsvermögen zu definieren (vgl. Abschnitt 6.5). Dieser enorm fruchtbare und weitreichende Gedanke ist wohl der eigentlich Grund, weshalb die Arbeitsdefinition (28) als **Goldene Regel der Mechanik** bezeichnet wird.

## 6.4 Exkurs: Kraftwandler

Wie eben im Abschnitt 6.3 erläutert, ist der Arbeitsaufwand für eine bestimmte Zustandsänderung unabhängig vom Prozess, mit dem diese Zustandsänderung erreicht wird. Das bedeutet aber, dass es für uns "beim Arbeiten" resp. bei der Konstruktion von Maschinen gewisse Freiheiten gibt. Ganz explizit ausgedeutscht: Wir können selber entscheiden, mit wie viel Kraft $F$ ein Prozess verrichtet wird, solange es uns gleich ist, welche Wegstrecke $s$ dafür zurückgelegt werden muss. Die für den Prozess benötigte Arbeit $W = F \cdot s$ bleibt dadurch unverändert!

Technische Hilfsmittel erlauben uns also die für einen Vorgang benötigte Kraft selber einzustellen. Solche Hilfsmittel nennen wir **Kraftwandler**. Hier ein paar ganz typische Beispiele (Bilder dazu finden sich auf der nächsten Seite):

**Normaler Flaschenzug:** Ein Gewicht wird am selben Seil $n$-fach aufgehängt. Dadurch reduziert sich die Zugkraft im Seil um den Faktor $n$: $F_\mathrm{Z} = \frac{F_\mathrm{G}}{n}$. Gleichzeitig ist die Seilstrecke $s$, die man aus dem Flaschenzug herausziehen muss, um das Gewicht um eine bestimmte Höhe $h$ anzuheben, $n$-mal so gross: $s = n \cdot h$! Es gilt also für das Anheben des Gewichts:

$$\text{Arbeit mit Flaschenzug} = F_\mathrm{Z} \cdot s = \frac{F_\mathrm{G}}{n} \cdot n \cdot h = F_\mathrm{G} \cdot h = \text{Arbeit mit nur einem Seil}$$

**Hebel:** Hebel sind wohl die klassischsten Kraftwandler: eine kleine Kraft $F_1$ kann über einen längeren **Hebelarm** $r_1$ (= Abstand zur Drehachse) in eine grössere Kraft $F_2$ bei kürzerem Hebelarm $r_2$ umgewandelt werden. Es gilt das sogenannte **Hebelgesetz**, das in direkter Verwandtschaft mit unserer Arbeitsdefinition steht:

$$\textbf{Hebelgesetz:} \qquad F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

Nach diesem Prinzip arbeiten z.B. Zangen, Nussknacker, Brecheisen, Schraubenschlüssel, Türfallen, etc. Wenn man bedenkt, wo das Hebelprinzip überall zur Anwendung kommt, wäre eine Welt ohne Hebel für uns vermutlich wesentlich mühsamer...

**Zahnräder/Getriebe:** Bei der Übersetzung von einem kleineren auf ein grösseres Zahnrad gewinnt der Mechanismus an Kraft. Allerdings muss sich das kleinere Zahnrad schneller drehen als das grosse. Umgekehrt lässt sich so auf Kosten der Kraft eine grosse Geschwindigkeit erzeugen.

Zahnräder spielen in Getrieben eine grosse Rolle. Z.B. entwickeln Verbrennungsmotoren in Autos bei bestimmten Drehzahlen besonders viel Kraft. Dann sollte man darauf achten, dass das Auto normalerweise mit dieser Drehzahl fährt und das Zahnradgetriebe hinter dem Motor die entsprechende Übersetzung auf die gewünschte Fahrtgeschwindigkeit bewerkstelligen lassen.

Natürlich gilt Analoges beim Fahrradfahren: Es ist nicht möglich mit beliebig viel Kraft in die Pedale zu treten. Daher schalten wir einen Gang runter, wenn es bergauf geht...

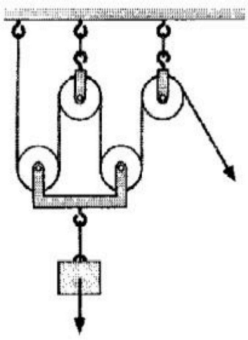
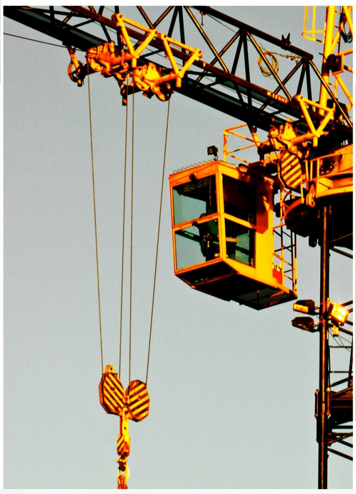
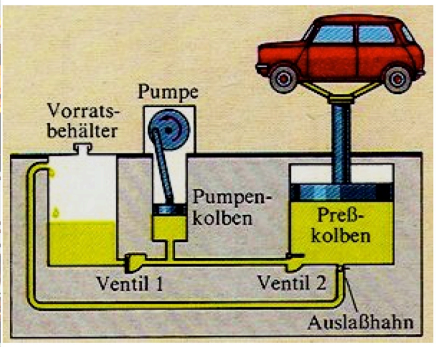
**Rampe:** Das Hochziehen eines Gewichts über eine Rampe verringert die Zugkraft $F_Z$. Die Gewichtskraft $F_G$, die Sie beim gleichförmigen vertikalen Hochziehen des Gewichts kompensieren müssten, wird auf die Parallelkomponente $F_{G,\|} = F_G \cdot \sin\alpha$ reduziert. Hingegen ist der Weg über die Rampe länger: $s = \frac{h}{\sin\alpha}$, sodass immer noch der gleiche Arbeitsaufwand anfällt:

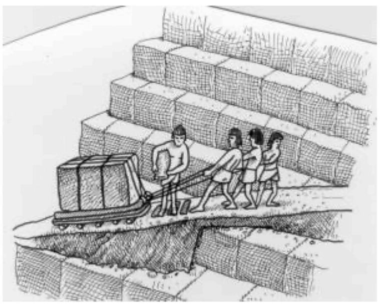
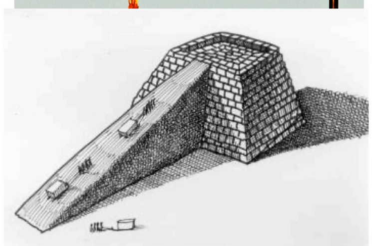
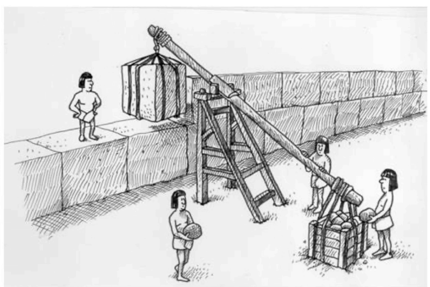
$$\text{Zugarbeit über Rampe} = F_Z \cdot s = F_{G,\|} \cdot s = F_G \cdot \sin\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = F_G \cdot h$$

**Hydraulische Hebebühnen:** In hydraulischen Hebevorrichtungen übernimmt der Druck in der Flüssigkeit die Rolle eines Kraftwandlers. Wie das genau geht, erfahren wir im Kapitel 7.





## 6.5 "Energie ist gespeichertes Arbeitsvermögen"

Die an einem Körper verrichtete Arbeit $W$ geht nicht einfach verloren. Sie ist im Zustand des Körpers gespeichert und unter Umständen wieder abrufbar. Eine solche gespeicherte Arbeit bezeichnen wir als **Energie**:

> **Die physikalische Definition der Energie $E$**
>
> *Die Energie eines Zustandes ist das in diesem Zustand gespeicherte Arbeitsvermögen. Dabei ist der Ausdruck "gespeichert" im doppelten Sinn zu verstehen:*
>
> 1. *Bezogen auf die Vergangenheit:*
>    *Es war Arbeit nötig, um diesen Zustand zu erreichen.*
> 2. *Bezogen auf die Zukunft:*
>    *Die im Zustand vorhandene Energie kann als Arbeit abgegeben werden.*

Energie ist gespeichertes Arbeitsvermögen. Darin stecken sowohl **Nutzen**, als auch **Gefahr**. Den energiereichen Zustand eines Systems erkennen wir genau daran, dass er eben nützlich, aber genauso gefährlich sein kann. Denke z.B. an einen Kanister Brennsprit, an einen Stausee, oder an eine Steckdose. Gefahr und Nutzen gehen Hand in Hand!

### Beispielüberlegung am VBZ-Bus

Die im 1. Bewegungsabschnitt am Bus verrichtete Beschleunigungsarbeit $W_{B,1}$ speichert der Bus in Form von **kinetischer Energie** $E_{kin,2}$ (= Bewegungsenergie). Diese Energie bleibt im 2. Bewegungsabschnitt erhalten, da sich der Bus gleichförmig bewegt. Im letzten Abschnitt der Fahrt gibt der Bus diese Energie wieder ab, und zwar in Form von Reibungs- und Bremsarbeit $W_{R,3}$ und $W_{Brems,3}$. Man bemerke also (vgl. Werte auf Seite 47):

$$E_{kin,2} = W_{B,1} = W_{Brems,3} + W_{R,3} \qquad \text{in Zahlenwerten:} \quad 2031.3\,\text{kJ} \approx 1972\,\text{kJ} + 59.8\,\text{kJ}$$

## 6.6 Hubarbeit $W_{Hub}$ und potentielle Energie $E_{pot}$

Beim Anheben eines Körpers wird **Hubarbeit** $W_{Hub}$ an ihm verrichtet. Diese Arbeit erfolgt gegen die Gewichtskraft $F_G$. Die Höhendifferenz $h$ entspricht der zurückgelegten Strecke. Aus der Arbeitsdefinition (28) und der Gleichung (17) für die Gewichtskraft folgt:

$$W_{Hub} = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

Hubarbeit speichert der Körper in Form von **Höhenenergie**, die auch als **Energie der Lage** oder **potentielle Energie** $E_{pot}$ bezeichnet wird.

> **Berechnung einer potentiellen Energie $E_{pot}$**
>
> *Befindet sich ein Körper der Masse $m$ auf der Höhe $h$ über einem vorher definierten Nullniveau (NN), so besitzt er bezogen auf dieses Nullniveau eine potentielle Energie $E_{pot}$ von:*
>
> $$E_{pot} = m \cdot g \cdot h \qquad (29)$$
>
> *Die potentielle Energie ist die gespeicherte Hubarbeit $W_{Hub}$, die benötigt wurde, um den Körper vom Nullniveau auf die Höhe $h$ anzuheben.*

### Anmerkungen zur Hubarbeit $W_{\mathrm{Hub}}$ und zur potentiellen Energie $E_{\mathrm{pot}}$

- Bei der Angabe einer potentiellen Energie muss zwingend ein **Nullniveau (NN)** angegeben werden. Ansonsten weiss man gar nicht, worauf sich die Energieangabe bezieht. Ohne Deklaration des Nullniveaus bleibt die Angabe einer potentiellen Energie bedeutungslos. Häufig legt aber bereits die Situation ein "natürliches" Nullniveau fest.

  Z.B. ist das Nullniveau der potentiellen Energie bei einem Wasserkraftwerk in den Bergen sinnvollerweise gegeben durch die Höhenlage der Turbinen.

- 1 Newton, also die SI-Einheit der Kraft, entspricht gerade etwa der Gewichtskraft einer Tafel Schokolade (vgl. Seite 27). Auch beim Joule, also bei der SI-Einheit von Arbeit und Energie, gibt es das einfache "Schokoladentafel-Beispiel" zur Verdeutlichung.

  Das Anheben einer Schokoladentafel ($m \approx 100\,\mathrm{g}$) um einen Meter benötigt eine Hubarbeit von gerade etwa 1 Joule:

$$W_{\mathrm{Hub}} = m \cdot g \cdot h = 0.1\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 1\,\mathrm{m} = 0.981\,\mathrm{J} \approx 1\,\mathrm{J}$$

## 6.7 Beschleunigungsarbeit $W_{\mathrm{B}}$ und kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}}$

Beim der Beschleunigung eines Körpers wird **Beschleunigungsarbeit** $W_{\mathrm{B}}$ an ihm verrichtet. Diese Arbeit ist gekoppelt an die für die Beschleunigung benötigte resultierende Kraft $F_{\mathrm{res}}$. Die in der Arbeitsdefintion auftretende Strecke ist die Strecke $s$, über welche hinweg das schneller Werden stattfindet.

Zur Herleitung der Beschleunigungsarbeit $W_{\mathrm{B}}$ betrachten wir eine gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit (gmbBoA). Aus der Arbeitsdefinition (28), dem Aktionsprinzip (14) und der Bewegungsgleichung (8) von Seite 19 folgt:

$$W_{\mathrm{B}} = F_{\mathrm{res}} \cdot s = m \cdot a \cdot s = m \cdot a \cdot \frac{v^2}{2a} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Beschleunigungsarbeit speichert der Körper in Form von **Bewegungsenergie**, die auch als **kinetische Energie** $E_{\mathrm{kin}}$ bezeichnet wird.

> **Berechnung einer kinetischen Energie $E_{\mathrm{kin}}$**
>
> *Besitzt ein Körper der Masse $m$ die Geschwindigkeit $v$, so trägt er eine kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}}$ von:*
>
> $$E_{\mathrm{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2} \tag{30}$$
>
> *Die kinetische Energie ist die gespeicherte Beschleunigungsarbeit $W_{\mathrm{B}}$, die benötigt wurde, um den Körper aus dem Stand auf die Geschwindigkeit $v$ zu bringen.*

Am Beispiel des VBZ-Busses sei gezeigt, wie sich die Beschleunigungsarbeit resp. die kinetische Energie in einem konrekten Fall berechnen lässt. Die im 1. Bewegungsabschnitt verrichtete Beschleunigungsarbeit $W_{\mathrm{B},1}$ bleibt als kinetische Energie $E_{\mathrm{kin},2}$ während dem 2. Abschnitt gespeichert:

$$E_{\mathrm{kin},2} = W_{\mathrm{B},1} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{26\,000\,\mathrm{kg} \cdot \left(12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 2\,031\,000\,\mathrm{J} = 2031\,\mathrm{kJ}$$

Denselben Wert haben wir bereits auf Seite 47 erhalten ($2031.3\,\mathrm{kJ}$). Die kleine Abweichung ist auf die Rundung des dort verwendeten Betrags für die resultierende Kraft zurückzuführen.

## 6.8 Weitere Energieformen

Neben potentieller und kinetischer Energie gibt es zahlreiche weitere **Energieformen**. D.h., es bestehen diverse weitere Möglichkeiten, wie im Zustand eines Körpers oder eines Systems von Körpern Arbeit gespeichert sein kann. Hier eine Auswahl:

- **Rotationsenergie $E_{\text{rot}}$**

  Dreht sich ein Körper um eine Achse, so ist auch in dieser Art der Bewegung Energie enthalten. Es handelt sich um eine spezielle Form der kinetischen Energie.

  Ein typisches Beispiel sind Schwungräder in Motoren und Schleifmaschinen. Die in der Drehbewegung enthaltene Energie wird bei Bedarf dazu eingesetzt, die Drehbewegung aufrecht zu erhalten. Das Schwungrad sorgt so für ein gleichmässiges Drehen. Auch in der Kreisbewegung von Planeten um die Sonne ist Rotationsenergie enthalten.

- **Elastische Energie $E_{\text{F}}$**

  Dehnbare Gegenstände, z.B. eine Spiralfeder, enthalten in ihrem angespannten Zustand elastische Energie. Man sagt auch **Federenergie** (daher das F im Index).

  Ein gespannter Pfeilbogen ist ein schönes Beispiel für elastische Energie.

$E_{\text{pot}}$, $E_{\text{kin}}$, $E_{\text{rot}}$ und $E_{\text{F}}$ werden auch als **mechanische Energieformen** bezeichnet.

- **Innere Energie $E_{\text{in}}$**

  Alle Stoffe können Energie in sich aufnehmen. Sinngemäss sagen wir dieser Energieform innere Energie. Wir bemerken sie vor allem anhand der Temperatur eines Körpers. (Diese innere Energie ist übrigens nichts anderes als die kinetische und die potentielle Energie der Atomen oder Molekülen, aus denen sich der Körper zusammensetzt.)

  Niemand wird die Gefahren bestreiten, die in einer heissen Herdplatte oder in siedendem Wasser stecken.

- **Elektrische Energie $E_{\text{el}}$**

  Unter elektrischen Ladungen herrschen anziehende und abstossende Kräfte. Wie bei der potentiellen Energie, die auf der Anziehung von Massen beruht, gibt es eine elektrische Energie, die je nach gegenseitiger Lage der Ladungen grösser oder kleiner ist. Aufgrund von elektrischer Energie bewegen sich Ladungen, wird also Strom hervorgerufen.

  Wir verwenden diese elektrische Energie, wenn wir ein Gerät an die Steckdose anschliessen. Dem Elektrizitätswerk bezahlen wir die gelieferte Menge an elektrischer Energie. Der Blitz ist das Paradebeispiel für das Freiwerden von elektrischer Energie. Der Zustand vor der Entladung der aufgeladenen Wolken ist offensichtlich sehr gefährlich.

- **Strahlungsenergie $E_{\text{S}}$**

  Licht und andere Sorten von Strahlung tragen Energie. Dies merken Sie z.B. an einem schönen Tag. Trotz geschlossener Augen nehmen Sie die Richtung wahr, aus welcher die Strahlung kommt. Beim Auftreffen auf Ihre Haut wird ein Teil der Strahlungsenergie in innere Energie umgewandelt. Sie spüren eine Erwärmung. Die Strahlungsenergie der Sonne möchten wir in Zukunft technisch besser ausnutzen, da sie uns gratis zur Verfügung steht ($\rightarrow$ Fotovoltaik (Solarzellen), Sonnenkollektoren, Solarkraftwerke).

  Sehr energiereiche Strahlung ist für uns Menschen gefährlich. Denken Sie z.B. an ultraviolette Strahlung (UV $\Rightarrow$ Sonnenbrand), an Röntgenstrahlung oder auch an radioaktive Strahlung (hohe Dosen $\Rightarrow$ Krebs oder sogar direkte Verbrennungen).

- **Chemische Energie $E_{\text{chem}}$**

  Viele chemische Reaktionen laufen spontan ab, weil dabei chemische Energie freigesetzt wird. D.h., die an der Reaktion beteiligten Atome besitzen vor der Reaktion mehr Energie als nachher. Diese überzählige Energie wird bei der Reaktion frei. Man nennt sie auch Bindungsenergie. Möchte man die entstandene Verbindung wieder auftrennen, so muss man ihr die Bindungsenergie wieder zuführen.

  Typische Beispiele für die Freisetzung von chemischer Energie sind Verbrennungsvorgänge (Verbindung mit Sauerstoffatomen). Z.B. verbrennen wir Heizöl zur Beschaffung von Wärme (innere Energie) oder Benzin in einem Motor, damit ein Auto fährt, also mit kinetischer Energie versorgt wird.Ganz offensichtlich werden die mit der chemischen Energie verbundenen Gefahren bei sehr heftigen Reaktionen wie beispielsweise Explosionen von Treibstoffen.

## 6.9 Der Energieerhaltungssatz – allgemein und speziell für die Mechanik

Die Gleichungen (29) und (30) zeigen, wie sich potentielle und kinetische Energien in einer konkreten Situation berechnen lassen. Im Prinzip kann man zu allen Energieformen eine solche Berechnungsgleichung aufstellen.

Die **Gesamtenergie** $E_{\text{tot}}$ eines Systems lässt sich somit in jedem beliebigen Zustand genau bestimmen. Sie ist die Summe über alle im System vorkommenden einzelnen Energieformen:

$$E_{\text{tot}} = \text{Summe über alle vorhandenen Energieformen}$$

Wichtig dabei ist die genaue Abgrenzung des **Systems**: Welche Körper gehören zum betrachteten System und welche nicht? Erst wenn das klar ist, kann man die im System auftretenden Energieformen studieren.

Ist das System so beschaffen, dass es mit Körpern ausserhalb des Systems keine Energie austauscht, so bezeichnen wir es als **abgeschlossenes System**. D.h., wenn am System keine Arbeit verrichtet wird und das System selber auch keine Arbeit abgibt, so ist es abgeschlossen.

**Der allgemeine Energieerhaltungssatz (Mayer, Joule, Helmholtz)**

*In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie erhalten:*

$$E_{\text{tot}} = \text{konstant}$$

*Alternative Formulierung: Die Summe über die Energien aller an einem Vorgang beteiligten Körper (= bezüglich diesem Vorgang abgeschlossenes System) bleibt konstant. Egal, welcher Vorgang abläuft, die Gesamtenergie bleibt dadurch unverändert! Sie hat vor, während und nach dem Vorgang den genau gleichen Wert.*

*Energie kann weder erzeugt, noch vernichtet, sondern lediglich von einer Energieform in eine andere Energieform umgewandelt werden!*

Bisher wurde kein Vorgang beobachtet, welcher dem Prinzip der Energieerhaltung widersprechen würde. Es ist offenbar eines der fundamentalsten Naturgesetze.

Da auch das Universum als Ganzes sinnvollerweise als abgeschlossenes System betrachtet werden muss, ist die Gesamtenergie des Universums konstant, und zwar seit jeher, also seit dem Urknall.

Der Energieerhaltungssatz lässt sich wie folgt auf mechanische Abläufe einschränken:

**Der Energieerhaltungssatz der Mechanik**

*Bei reibungsfreien Vorgängen bleibt die Summe über die mechanischen Energieformen ($E_{pot}$, $E_{kin}$, $E_{rot}$, $E_F$) aller beteiligten Körper konstant.*

**Anmerkungen zur Energieerhaltung in der Mechanik**

- Zur Erinnerung: Mechanische Energieformen sind $E_{pot}$, $E_{kin}$, $E_{rot}$ und $E_F$.
- Der freie Fall ist ein Beispiel für einen reibungsfreien Prozess. Bei vernachlässigbar kleinem Luftwiderstand ist die Energieerhaltung gewährleistet. Betrachten wir einen Ball mit der Masse $m$, der aus einer Höhe von $2.0\,\mathrm{m}$ fallen gelassen wird:

**Zustand 1:** Beim Loslassen besitzt der Ball noch keine kinetische Energie, da er noch keine Geschwindigkeit hat. Hingegen verfügt er dank seiner Höhe $h_1 = 2.0\,\mathrm{m}$ über die potentielle Energie $E_{pot,1}$ (Boden = Nullniveau).

**Fallvorgang:** Während dem Fallen verliert der Ball sukzessive an potentieller Energie, da seine Höhe geringer wird. Gleichzeitig steigt seine kinetische Energie an, da er schneller wird. Die potentielle Energie wandelt sich in kinetische Energie um.

**Zustand 2:** Genau dann, wenn der Ball am Boden ankommt, ist seine potentielle Energie vollständig in kinetische Energie $E_{kin,2}$ umgewandelt worden. Er besitzt keine Höhe mehr. Hingegen hat er nun die Geschwindigkeit $v_2$ erreicht.

**Anwendung der Energieerhaltung:** Die Umwandlung von potentieller in kinetische Energie vollständig ist, solange der Fallvorgang reibungsfrei war. Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
& E_{kin,2} = E_{pot,1} && |\,\text{Formeln einsetzen}\\
\Rightarrow\quad & \frac{m\cdot v_2^2}{2} = m\cdot g\cdot h_1 && |\cdot\frac{2}{m}\ \text{und}\ \sqrt{\ldots}\\
\Rightarrow\quad & v_2 = \sqrt{2\cdot g\cdot h_1} && |\,\text{Werte einsetzen}\\
& \phantom{v_2} = \sqrt{2\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\cdot 2.0\,\mathrm{m}} = 6.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

Die formale Lösung $v_2 = \sqrt{2\cdot g\cdot h_1}$ entspricht übrigens genau der Gleichung (8) von Seite 19. Der Fallvorgang ist eine gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit (gmbBoA). Die zurückgelegte Strecke entspricht der Anfangshöhe ($s = h_1$) und der Fallvorgang läuft mit der Fallbeschleunigung $g$ ab ($a = g$).

Beim Aufprall schliesslich ist die mechanische Energieerhaltung zuende. Je nach Art des Balles und des Bodens geht mehr oder weniger mechanische Energie verloren.

Bei einem Gummiball könnten z.B. pro Aufprall 20 % der mechanischen Energie verloren gehen. Der Energieverlust trägt zu den inneren Energien des Bodens und des Balles bei (⇒ minimale Erwärmung). Ganz deutlich sichtbar wird dieser Energieverlust nach dem Bodenkontakt. Der Ball erreicht dann nur noch 80 % seiner anfänglichen Höhe.

Interessant sind die Vorgänge während dem Bodenkontakt. Der Ball wird auf kürzester Strecke abgebremst, bevor er wieder in Aufwärtsrichtung beschleunigt wird. Die verbleibende mechanische Energie steckt für einen kurzen Moment komplett in der elastischen Energie des Balls, denn dieser wird während dem Bodenkontakt zusammengedrückt.

- Beim VBZ-Bus lässt sich eher zeigen, wie die mechanische Energie im nicht-reibungsfreien Fall verloren geht. Die vom Motor verrichtete Arbeit $W_{\text{Motor}}$ wird zwar zwischenzeitlich zur kinetischen Energie des Busses. Am Ende ist diese Arbeit allerdings komplett in innere Energie $E_{\text{in}}$ der Strasse, der Pneus, der Reifen und der Umgebung übergegangen. Schuld daran ist die Reibung. Sie führt stets zur Erhöhung der inneren Energie.

  Definiert man als System hingegen den Bus, die Strasse und die nähere Umgebung zusammen, so ist dieses System bezüglich der Bewegung des Busses tatsächlich in guter Näherung (und über einen nicht allzu langen Zeitraum) abgeschlossen. Es gilt die Energieerhaltung. Die chemische Energie $E_{\text{chem}}$, welche vor der Bewegung in Form des Benzins vorhanden war, ist nach der Bewegung komplett in innere Energie $E_{\text{in}}$ übergegangen. Dazwischen waren auch andere Energieformen, wie kinetische und Rotationsenergie, beteiligt.

## 6.10 Die Definition der Leistung $P$: "Leistung ist Energieumsatz pro Zeit"

In Prozessen wird Energie umgesetzt. Arbeit muss verrichtet werden oder es wird Arbeit frei, Energie wird von einem Körper auf einen anderen übertragen oder von einer Form in eine andere umgewandelt, etc. Alle Vorgänge sind mit **Energieumsätzen** $\Delta E$ verbunden.

Die **Leistung** $P$ (engl. *power*) gibt nun an, wie rasch der Energieumsatz abläuft.

**Die Definition der Leistung $P$**

*Ist $\Delta E$ der Energieumsatz während der Zeitspanne $\Delta t$, so definieren wir die* **Leistung** *$P$ durch:*

$$P := \frac{\Delta E}{\Delta t} \tag{31}$$

*"Leistung = Energieumsatz pro Zeitspanne."*

### Anmerkungen zur Definition der Leistung

- Zur Leistung gehört eine eigene SI-Einheit, das **Watt**:

  $$[P] = \frac{[E]}{[t]} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3} =: \mathrm{Watt} = \mathrm{W}$$

  Die Zusammensetzung des Watts aus SI-Basiseinheiten ist in der Anwendung nicht besonders wichtig ($\mathrm{W} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$), dafür umso mehr der Zusammenhang mit der Energieeinheit Joule:

  $$\mathrm{J} = \mathrm{W}\cdot\mathrm{s}$$ *"Ein Joule ist eine Wattsekunde."*

- Mit der Leistungseinheit Watt wird eine weitere, sehr gebräuchliche und grosse Energieeinheit eingeführt, die **Kilowattstunde (kWh)**. Es gilt:

  $$\text{Kilowattstunde} = \mathrm{kWh} = \mathrm{k}\cdot\mathrm{W}\cdot\mathrm{h} = 1000\cdot\mathrm{W}\cdot 3600\,\mathrm{s} = 3\,600\,000\,\mathrm{J} = 3.6\,\mathrm{MJ}$$

  **Merke dir:** Es sind **immer Kilowattstunden (kWh)**, niemals Kilowatt pro Stunde (kW/h). Diese Einheit gibt es nicht. Sie ist einfach falsch.

- Je nachdem, welche Art von Energie umgesetzt wird, spricht man z.B. von elektrischer Leistung $P_{\text{el}}$, von Strahlungsleistung $P_{\text{S}}$, von Beschleunigungsleistung $P_{\text{B}}$, etc.

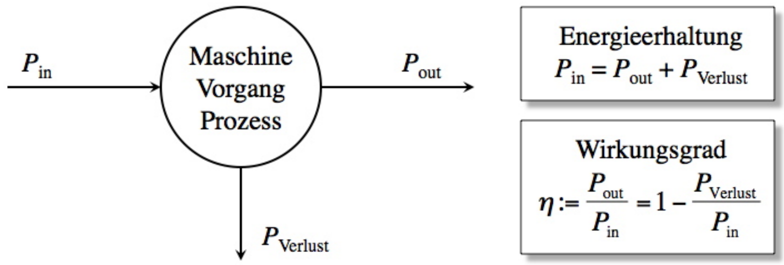
- Beim VBZ-Bus können wir z.B. die Beschleunigungsleistung im Bewegungsabschnitt 1 berechnen (Daten vgl. Seiten 12 und 51):

  $$P_{\text{B}} = \frac{\Delta E_{\text{kin},1}}{\Delta t_1} = \frac{W_{\text{B},1}}{\Delta t_1} = \frac{2\,031\,000\,\mathrm{J}}{7.0\,\mathrm{s}} = 290\,000\,\mathrm{W} = 290\,\mathrm{kW}$$

## 6.11 Das Maschinenschema und der Wirkungsgrad einer Maschine

Jeder Prozess / jeder Vorgang / jede Maschine wandelt Energie einer ersten Form in Energie einer zweiten Form um. D.h., es wird eine erste Art von Leistung eingespiesen ($\rightarrow P_{\text{in}}$) und es entsteht eine ausgehende Art von Leistung ($\rightarrow P_{\text{out}}$).

In der Regel wird allerdings nicht nur die "beabsichtigte" Art von Energie ausgegeben, sondern es entstehen **Verluste**. Man spricht von einer Verlustleistung $P_{\text{Verlust}}$. Dies wird durch das **Maschinenschema** des Prozesses, des Vorgangs oder der Maschine verdeutlicht:




Der **Wirkungsgrad** $\eta$ (gr. *eta*) gibt an, wie gut eine Maschine, ein Prozess oder ein Vorgang darin ist, eine erste Energieform in eine bestimmte andere umzuwandeln:

**Die Definition des Wirkungsgrades $\eta$**

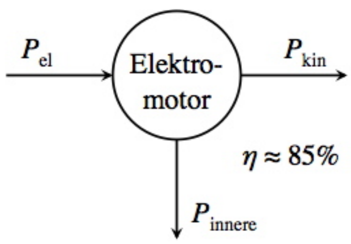
*Wird bei einem laufenden Prozess die Leistung $P_{\text{out}}$ abgegeben, währenddem die Leistung $P_{\text{in}}$ zugeführt wird, so ist der* ***Wirkungsgrad $\eta$*** *des Prozesses gegeben durch:*

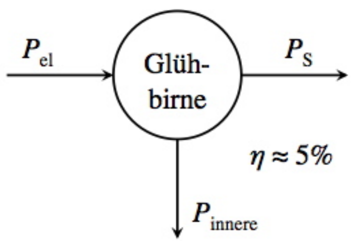
$$\eta := \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \tag{32}$$

*"Wirkungsgrad = abgegebene Leistung pro zugeführte Leistung."*

### Anmerkungen zum Wirkungsgrad

- Je höher der Wirkungsgrad, desto besser vermag die Maschine aus der ihr zugeführten Leistung die beabsichtigte Leistung zu erzeugen.
- Hier zwei Beispiele – ein eher gutes und ein eher schlechtes elektrisches Gerät:




  Die Verlustleistung hat sehr häufig mit der Abgabe von Wärme (innere Energie) zu tun. Es kommt allerdings darauf an, was man denn als Output-Energieform beabsichtigt hat. Bei einem Wasserkocher ist z.B. die ans Wasser abgegebene Wärme beabsichtigt. Nur die Erwärmung des Kochers selber und der Umgebung sind nicht gewollt.

- Im 1. Bewegungsabschnitt des VBZ-Busses ist die beabsichtigte Leistung die Beschleunigung. Bezieht der Bus während diesem Bewegungsabschnitt eine elektrische Leistung von $390\,\text{kW}$ von der Fahrleitung, so beträgt sein Wirkungsgrad in diesem Moment:

$$\eta = \frac{P_{\text{kin}}}{P_{\text{el}}} = \frac{290\,\text{kW}}{390\,\text{kW}} = 0.74 = 74\,\%$$

## 6.12 Energieproblematik und elektrischer Energieverbrauch im Alltag

Die Energieerhaltung besagt, dass Energie weder erzeugt, noch vernichtet werden kann. Daraus könnte man fälschlicherweise folgern, dass stets genügend Energie vorhanden ist und wir uns keine Sorgen um unsere Energieversorgung zu machen brauchen. Das ist so allerdings nicht richtig. Der Grund dafür liegt in den Eigenschaften der inneren Energie:

- **In der Regel ist innere Energie das energetische Endprodukt aller Prozesse.**

  Hat z.B. der VBZ-Bus seine Fahrt beendet, so ist praktisch die gesamte elektrische Energie in innere Energie übergegangen. (Allenfalls hat der Bus während der Fahrt seine Batterie aufgeladen oder er hat etwas an Höhe gewonnen, dann wäre ein Teil der Energie in Form von elektrischer resp. potentieller Energie vorhanden geblieben.)

- **Innere Energie ist nicht für die Umwandlung in andere Energieformen geeignet. Sie kann nur sehr bedingt zum Betrieb von Maschinen verwendet werden.**

  Soll innere Energie dazu genutzt werden eine Maschine anzutreiben, so sind dafür grosse Temperaturunterschiede nötig. Diese sind aber nicht einfach so vorhanden. Im Gegenteil: Die innere Energie verteilt sich von selbst über alle Körper gleichmässig. Deshalb können Sie sich z.B. an einer Heizung wärmen. Die Heizung besitzt eine höhere Temperatur als Sie, weshalb sie beim Kontakt Wärme und damit innere Energie an Sie abgibt – und zwar im Prinzip so lange, bis Sie dieselbe Temperatur wie die Heizung haben.

Das Wort **Energieverbrauch** muss also so verstanden werden, dass hochwertige Energieformen beim Gebrauch von Maschinen in innere Energie umgewandelt werden. In dieser Form ist die Energie nicht mehr weiter verwertbar. Daraus ergeben sich zwei Folgerungen für das **Sparen von Energie**:

- **Effizienz = grösstmögliche Ausnutzung der Energie**

  Wir sollten überall versuchen möglichst effiziente Maschinen (mit hohen Wirkungsgraden) zu verwenden. So kann Energie eingespart werden.

- **Suffizienz = genügsame Nutzung der Energiereserven**

  Wir sollten uns überlegen, ob wir wirklich so viel Energie benötigen, wie das heute der Fall ist. Einschränkungen wären an vielen Orten denkbar und sinnvoll.

Insbesondere aus ökologischen Gründen möchte die Schweiz möglichst rasch die **2000 Watt-Gesellschaft** realisieren. Das hiesse, die Schweiz würde insgesamt so viel Energie verbrauchen, dass heruntergerechnet auf einen einzelnen Menschen eine andauernde Bezugsleistung von $2000\,\mathrm{W}$ herauskäme. Im Jahr 2022 hat die Schweiz ungefähr eine pflegen wir eine $3600\,\mathrm{W}$-Gesellschaft gepflegt. Da sollte also unbedingt noch etwas passieren!

### Persönliches Energierechnen punkto Verbrauch an elektrischer Energie

Auf den meisten elektrischen Geräten wird angegeben, welche elektrische Leistung $P_{\mathrm{el}}$ sie im Betrieb vom Elektrizitätswerk beziehen. Wird das Gerät über eine Zeitspanne $\Delta t$ verwendet, so beträgt der Energieverbrauch: $\Delta E = P_{\mathrm{el}} \cdot \Delta t$.

Das Elektrizitätwerk rechnet die bezogene elektrische Energie in der Energieeinheit **Kilowattstunde** $\mathrm{kWh}$ ab. Das Rechnen damit ist sehr einfach! Der **Normaltarif** in der Schweiz beträgt zurzeit knapp 20 Rappen pro $\mathrm{kWh}$.

**Beispiel:** Ich lasse den CTouch-Bildschirm $(360\,\mathrm{W})$ während einer Lektion $(45\,\mathrm{min} = \frac{3}{4}\,\mathrm{h})$ eingeschaltet:

$$\Delta E = P_{\mathrm{el}} \cdot \Delta t = 360\,\mathrm{W} \cdot \frac{3}{4}\,\mathrm{h} = 270\,\mathrm{Wh} = 0.27\,\mathrm{kWh}$$

Die Schule muss dem Elektrizitätswerk dafür etwa 5.4 Rappen bezahlen $(20 \cdot 0.27 = 5.4)$.