

Übungen zur Mechanik – Lösungen Serie 7

1. Hub-, Beschleunigungs- und Reibungsarbeit bei alltäglichen Vorgängen

(a) Wir erhalten für die Hubarbeit: $W_{\text{Hub}} = m \cdot g \cdot h = 4.0 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 12.5 \text{ m} = 491 \text{ J} = \underline{\underline{490 \text{ J}}}$.

Damit folgt für die Hubleistung: $P_{\text{Hub}} = \frac{W_{\text{Hub}}}{\Delta t} = \frac{491 \text{ J}}{15 \text{ s}} = 32.7 \text{ W} = \underline{\underline{33 \text{ W}}}$.

(b) Für die Beschleunigungsarbeit ergibt sich: $W_{\text{B}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{12 \text{ kg} \cdot \left(2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = \underline{\underline{24 \text{ J}}}$.

(c) Um aus dem Stand die doppelte Geschwindigkeit zu erreichen, ist wegen dem Geschwindigkeitsquadrat in der Formel die Beschleunigungsarbeit nicht die doppelte, sondern die vierfache Arbeit von (b) nötig.

Es muss somit nochmals dreimal so viel Beschleunigungsarbeit verrichtet werden: $W_{\text{B}} = \underline{\underline{72 \text{ J}}}$.

Bemerkung: Man sollte stets im Hinterkopf behalten, dass $W_{\text{B}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$ die Beschleunigungsarbeit liefert, welche benötigt wird, um die Masse m **aus dem Stand** auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen. Möchte ich die Beschleunigungsarbeit berechnen, welche benötigt wird, um die Masse von einer Geschwindigkeit v_1 auf eine Geschwindigkeit v_2 zu beschleunigen, so gilt wegen dem Geschwindigkeitsquadrat:

$$W_{\text{B}} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{2}$$

(d) Der Stein wird mit der Fallbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ schneller. Nach 3.3 s Fallzeit hat er eine Geschwindigkeit von $v = a \cdot t = g \cdot t = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3.3 \text{ s} = 32.37 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erreicht. Daraus ergibt sich für die an ihm verrichtete

Beschleunigungsarbeit: $W_{\text{B}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{0.37 \text{ kg} \cdot \left(32.37 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 193.8 \text{ J} = \underline{\underline{190 \text{ J}}}$.

(e) Für die Reibungsarbeit finden auf Ebener Unterlage finden wir:

$$W_{\text{R}} = F_{\text{R}} \cdot s = \mu_{\text{G}} \cdot F_{\text{N}} \cdot s = \mu_{\text{G}} \cdot F_{\text{G}} \cdot s = \mu \cdot m \cdot g \cdot s = 0.35 \cdot 37 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 1.7 \text{ m} = 216 \text{ J} = \underline{\underline{220 \text{ J}}}$$

(f) Die bewältigte Höhendifferenz beträgt gerade 1700 m. Somit ergibt sich für die Hubarbeit:

$$W_{\text{Hub}} = m \cdot g \cdot h = 18\,000 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 1700 \text{ m} = 300\,186\,000 \text{ J} = \underline{\underline{300 \text{ MJ}}}$$

Für die mittlere Hubleistung folgt: $P_{\text{Hub}} = \frac{W_{\text{Hub}}}{\Delta t} = \frac{300\,186\,000 \text{ J}}{65 \cdot 60 \text{ s}} = 76\,971 \text{ W} = \underline{\underline{77 \text{ kW}}}$.

(g) Reibungskraft auf ebener Unterlage: $F_{\text{R}} = \mu_{\text{G}} \cdot F_{\text{N}} = \mu_{\text{G}} \cdot F_{\text{G}} = \mu_{\text{G}} \cdot m \cdot g = 0.15 \cdot 1.6 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 2.354 \text{ N}$.

Daraus folgt für die Reibungsarbeit: $W_{\text{R}} = F_{\text{R}} \cdot s = 2.354 \text{ N} \cdot 200 \cdot 2 \cdot 0.2 \text{ m} = 188 \text{ J} = \underline{\underline{200 \text{ J}}}$.

Der Faktor 2 kommt vom Hin- und Herfahren.

Für die Reibungsleistung ergibt sich: $P_{\text{R}} = \frac{W_{\text{R}}}{\Delta t} = \frac{188 \text{ J}}{12 \cdot 60 \text{ s}} = 0.26 \text{ W} = \underline{\underline{0.3 \text{ W}}}$

(h) Beschleunigungsarbeit: $W_{\text{B}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{1890 \text{ kg} \cdot \left(55.56 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 2\,917\,133 \text{ J}$.

Somit beträgt die Beschleunigungsleistung: $P_{\text{B}} = \frac{W_{\text{B}}}{\Delta t} = \frac{2\,917\,133 \text{ J}}{7.30 \text{ s}} = 399\,607 \text{ W} = 543.3 \text{ PS} = \underline{\underline{543 \text{ PS}}}$.

2. Arbeit am Space Shuttle

(a) Für Hub- und Beschleunigungsarbeit ergibt sich einzeln:

$$W_{\text{Hub}} = m \cdot g \cdot h = 105\,000 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 450\,000 \text{ m} = 464\,000\,000\,000 \text{ J} = 464 \text{ GJ}$$

$$W_{\text{B}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{105\,000 \text{ kg} \cdot \left(7800 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 3\,194\,000\,000\,000 \text{ J} = 3194 \text{ GJ}$$

Zusammen erhält man:

$$W_{\text{total}} = W_{\text{Hub}} + W_{\text{B}} = 464 \text{ GJ} + 3194 \text{ GJ} = 3658 \text{ GJ} = \underline{\underline{3.7 \text{ TJ}}} \quad (\text{Terajoule!})$$

(b) Die am Orbiter verrichtete Leistung beträgt: $P_{\text{total}} = \frac{W_{\text{total}}}{\Delta t} = \frac{3658 \text{ GJ}}{8.0 \cdot 60 \text{ s}} = 7.621 \text{ GW} = \underline{\underline{7.6 \text{ GW}}}$.

(c) Erstens nimmt der Ortsfaktor g während dem Aufstieg ein wenig ab, da sich das Shuttle merklich von der Erdoberfläche entfernt. D.h., die Berechnung der Hubarbeit gerät etwas zu gross. Zweitens stehen die $7.8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ für die Bahngeschwindigkeit des Space Shuttles in seiner schliesslichen Erdumlaufbahn. Das Shuttle startet allerdings bereits mit ca. $500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, die von der Erdrotation herrühren. D.h., auch die Beschleunigungsarbeit wurde etwas zu gross berechnet.

3. Joule, Watt, Kilowattstunden – und Franken!

- (a) Für ein Gerät mit einem Leistungsbezug von $P = 1000 \text{ W} = 1 \text{ kW}$ ergeben sich stündliche Kosten von:

$$\Delta E = P \cdot \Delta t = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = 1 \text{ kWh} \hat{=} 20 \text{ Rp.}$$

Das ist genau die Idee der **Kilowattstunde!**

Für die vier Geräte betragen die stündlichen Kosten somit:

Fernseher: 1.7 Rp., Computer: 0.30 Rp., Backofen: 36 Rp., Waschmaschine: 50 Rp.

- (b) Als Leistung ergibt sich: $P_{\text{Standby}} = \frac{69\,000 \text{ J}}{24 \cdot 3600 \text{ s}} = 0.799 \text{ W} = \underline{0.80 \text{ W}}$.

Die monatliche Energiemenge beträgt ($1 \text{ kWh} = 3\,600\,000 \text{ J}$): $\Delta E = 30 \cdot 69 \text{ kJ} = 2070 \text{ kJ} = 0.575 \text{ kWh}$.

Alternativ: $\Delta E = 0.799 \text{ W} \cdot 30 \cdot 24 \text{ h} = 575 \text{ Wh} = 0.575 \text{ kWh}$.

Der monatliche Betrieb kostet demzufolge: $0.575 \text{ kWh} \cdot 20 \frac{\text{Rp.}}{\text{kWh}} = 11.5 \text{ Rp.} = \underline{12 \text{ Rp.}}$

- (c) Für die Betriebsdauer erhalten wir: $\Delta t = \frac{\Delta E}{P} = \frac{2 \cdot 15\,000 \text{ J}}{0.7 \text{ W}} = 42\,857 \text{ s} = 11.9 \text{ h} = \underline{10 \text{ h}}$.

- (d) $2 \cdot 15\,000 \text{ J} = 30\,000 \text{ J} = \frac{1}{120} \text{ kWh} \hat{=} \frac{1}{120} \cdot 20 \text{ Rp.} = \underline{\frac{1}{6} \text{ Rp.}}$

Preisverhältnis "Batterie vs. Steckdose": $400 \text{ Rp.} : \frac{1}{6} \text{ Rp.} = 2400 : 1 !!$

Die elektrische Energie aus der Batterie ist also extrem teuer im Vergleich zu derjenigen aus der Steckdose!

- (e) $\Delta E = P \cdot \Delta t = 1400 \text{ W} \cdot 4.0 \text{ min} = 1.4 \text{ kW} \cdot \frac{1}{15} \text{ h} \approx 0.1 \text{ kWh} \approx \underline{2 \text{ Rp.}}$

4. Der Morgensport des Herrn Schlaumeier

Herr Schlaumeier ist ein Schlaumeier! Mit den Zahlen rechnet er zwar korrekt, allerdings wendet er die Arbeitsdefinition völlig falsch an, sodass seine Aussage physikalischer Unsinn ist!

Eine Voraussetzung dafür, dass "Arbeit = Kraft mal Weg" gilt, dass also $W = F \cdot s$ angewendet werden darf, ist, dass die Kraft parallel zur Wegstrecke wirken muss. Eine Kraft senkrecht zur Wegstrecke kann weder Arbeit verrichten, noch Arbeit erfordern!

In Herrn Schlaumeiers Erläuterung nennt er die Gewichtskraft als die Kraft, gegen die er gearbeitet hat. Diese steht aber stets senkrecht zur Wegstrecke, denn mit dem Einkaufswagen ist er im Laden stets nur horizontal unterwegs gewesen. Hätte er den Wagen um 1 km angehoben, so wäre seine Aussage korrekt und das Frühstück in diesem Sinne tatsächlich sehr verdient!

5. Bewegungen beim Auto – genauer unter die Lupe genommen

In den folgenden Kurzerläuterungen bedeutet z.B. " $F_N \perp v$ ", dass F_N senkrecht zur Bewegungsrichtung v steht. " $\uparrow\uparrow$ " steht für eine parallele und " $\uparrow\downarrow$ " für eine antiparallele Ausrichtung zweier Richtungen.

Die Kräfteskizzen finden sich auf der zweiten Seite unten. Den Luftwiderstand F_L habe ich vernachlässigt. Er würde stets in die genau gleiche Richtung wie die Reibungskraft F_R wirken.

- (a) *Gleichmässiges geradeaus Fahren auf horizontaler Strecke*

vertikal: $F_N = F_G$, horizontal: $F_M = F_R$

$F_N \perp v$ und $F_G \perp v \Rightarrow$ durch F_N und F_G wird keine Arbeit umgesetzt

$F_M \uparrow\uparrow v \Rightarrow F_M$ verrichtet Beschleunigungsarbeit am Auto

$F_R \uparrow\downarrow v \Rightarrow$ das Auto verrichtet Reibungsarbeit gegen F_R

Bei gleichmässiger Fahrt ist die aufgenommene Beschleunigungsarbeit immer gerade gleich der abgegebenen Reibungsarbeit.

- (b) *Ausrollen auf horizontaler Strecke*

vertikal: $F_N = F_G$, horizontal: $F_{\text{res}} = F_R$

$F_N \perp v$ und $F_G \perp v \Rightarrow$ durch F_N und F_G wird keine Arbeit umgesetzt

$F_R \uparrow\downarrow v \Rightarrow$ das Auto verrichtet Reibungsarbeit gegen F_R

Das Auto gibt (Reibungs-)Arbeit ab und verliert dadurch an Bewegungsenergie. Es rollt aus.

- (c) *Anfahren am Berg, d.h. auf ansteigender Strecke*

senkrecht zur schiefen Ebene: $F_N = F_{G,\perp}$, parallel dazu: $F_{\text{res}} = F_M - F_{G,\parallel} - F_R$

$F_N \perp v$ und $F_{G,\perp} \perp v \Rightarrow$ durch F_N und $F_{G,\perp}$ wird keine Arbeit umgesetzt

$F_M \uparrow\uparrow v \Rightarrow F_M$ verrichtet Beschleunigungsarbeit am Auto

$F_R \uparrow\downarrow v \Rightarrow$ das Auto verrichtet Reibungsarbeit gegen F_R und F_L

$F_{G,\parallel} \uparrow\downarrow v \Rightarrow$ das Auto verrichtet Hubarbeit an sich selbst gegen $F_{G,\parallel}$

Die Beschleunigungsarbeit des Motors am Auto überkompensiert die Arbeitsabgabe gegen die Reibungskraft und die Hubarbeit, so dass das Auto trotzdem noch schneller wird.

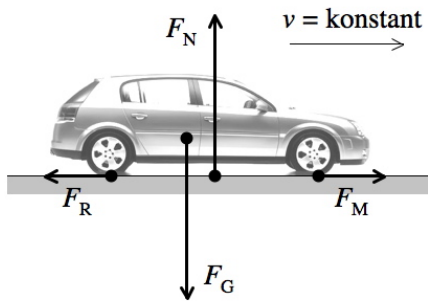
(d) *Abbremsen bei der Abwärtsfahrt*

senkrecht zur schiefen Ebene: $F_N = F_{G,\perp}$, parallel dazu: $F_{\text{res}} = F_R - F_{G,\parallel}$
 $F_N \perp v$ und $F_{G,\perp} \perp v \Rightarrow$ durch F_N und $F_{G,\perp}$ wird keine Arbeit umgesetzt
 $F_{G,\parallel} \uparrow \uparrow v \Rightarrow F_{G,\parallel}$ verrichtet Beschleunigungsarbeit am Auto
 $F_R \uparrow \downarrow v \Rightarrow$ das Auto verrichtet Reibungsarbeit gegen F_R

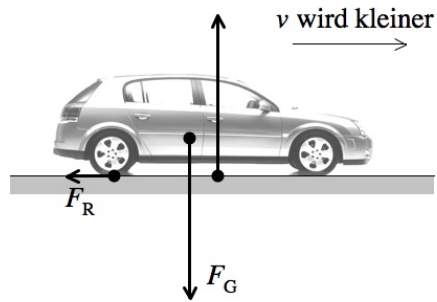
Die Beschleunigungsarbeit der Parallel-Komponente der Gewichtskraft wird durch die Arbeitsabgabe aufgrund der Reibungskräfte überkompensiert. Das Auto wird langsamer.

Anmerkung: Die Reibungskraft F_R besteht in dieser Situation aus einem Anteil Rollreibung und einem Anteil Haftreibung, welcher durch die Betätigung des Bremspedals entsteht.

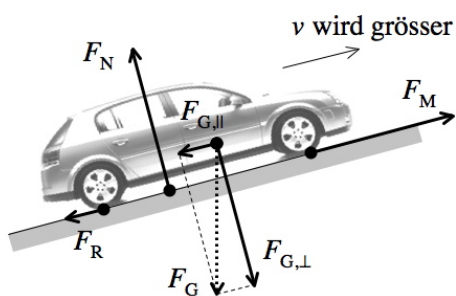
Gleichmässiges geradeaus Fahren auf horizontaler Strecke



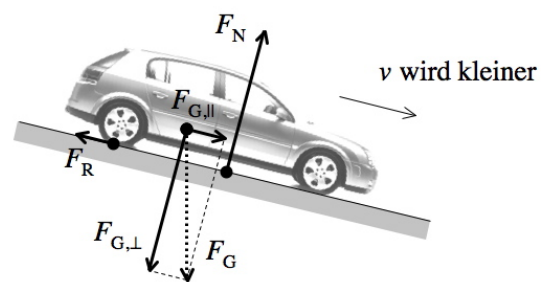
Ausrollen auf horizontaler Strecke



Anfahren am Berg, d.h. auf ansteigender Strasse



Abbremsen auf der Abwärtsfahrt



6. *Etwas Theoretisches zum Schluss*

- (a) Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck: $\sin \alpha = \frac{h}{s}$, $\cos \alpha = \frac{d}{s}$ und $\tan \alpha = \frac{h}{d}$.
- (b) Auf der schiefen Ebene muss die Schubkraft bei gleichförmiger Aufwärtsbewegung einerseits die Gleitreibung F_R und andererseits die schräg abwärts zeigende Parallel-Komponente der Gewichtskraft, also die Hangabtriebskraft $F_{G,\parallel}$ kompensieren. Insgesamt lässt sich schreiben:

$$F_S = F_R + F_{G,\parallel} = \mu_G \cdot F_N + F_G \cdot \sin \alpha = \mu_G \cdot F_{G,\perp} + F_G \cdot \sin \alpha$$

$$= \mu_G \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot (\mu_G \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)$$

Dabei haben wir benutzt, dass die Kiste senkrecht zur schiefen Ebene in Ruhe ist, dass also ein Gleichgewicht zwischen Normalkraft und der Senkrecht-Komponente der Gewichtskraft besteht: $F_N = F_{G,\perp} = m \cdot g \cdot \cos \alpha$.

- (c) "Arbeit ist Kraft mal Weg." Somit ist die an der Kiste verrichtete Schubarbeit W_S gegeben durch:

$$W_S = F_S \cdot s = m \cdot g \cdot (\mu_G \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot s$$

- (d) Wir zerlegen diesen Ausdruck in zwei Teile und erhalten:

$$W_S = m \cdot g \cdot \mu_G \cdot \underbrace{s \cdot \cos \alpha}_{=d} + m \cdot g \cdot \underbrace{s \cdot \sin \alpha}_{=h} = \underbrace{m \cdot g \cdot \mu_G \cdot d}_{=W_{R,\text{horizontal}}} + \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{=W_{\text{Hub}}}$$

Tatsächlich ist die Schubarbeit gleich der Summe aus einer horizontalen Reibungsarbeit und einer vertikalen Hubarbeit.