Gymnasium Unterstrass Zürich
Promotion 158b

KLASSISCHE MECHANIK

Alex Gertsch
im Oktober 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalische Grössen und Einheiten **5**
- 1.1 Das SI-Einheitensystem . . . 5
- 1.2 Grössen- und Einheitenübersicht . . . 5
- 1.3 SI-Vorsätze (-Präfixe) und Zehnerpotenzen . . . 6
- 1.4 Konstanten und spezielle Werte . . . 6
- 1.5 Genauigkeit, signifikante Ziffern und Rundungsregeln . . . 6

2 Kinematik geradliniger Bewegungen **9**
- 2.1 Geradlinige Bewegung und Bewegung längs einer Trajektorie . . . 9
- 2.2 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus . . . 10
- 2.3 Die drei Bewegungsdiagramme zur Fahrt des VBZ-Busses . . . 11
- 2.4 Das Zeit-Ort-, Zeit-Weg- oder t-s-Diagramm . . . 12
- 2.5 Die Definition der Geschwindigkeit v . . . 12
- 2.6 Das Zeit-Geschwindigkeits- oder t-v-Diagramm . . . 13
- 2.7 Die Definition der Beschleunigung a . . . 13
- 2.8 Das Zeit-Beschleunigungs- oder t-a-Diagramm . . . 14
- 2.9 Flächen im t-v-Diagramm und im t-a-Diagramm . . . 15
- 2.10 Tipps zum Zeichnen der Diagramme . . . 16
- 2.11 Gleichförmige Bewegung und Durchschnittsgeschwindigkeit . . . 16
- 2.12 Gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit . . . 17
- 2.13 Gleichmässig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit . . . 18
- 2.14 Der freie Fall und die Fallbeschleunigung g . . . 19
- 2.15 Differentialrechnung – ein mathematischer Ausblick . . . 19

3 Dynamik geradliniger Bewegungen **20**
- 3.1 Was ist eine Kraft? . . . 20
- 3.2 Kraftvektoren, resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ und Kräftegleichgewichte . . . 21
- 3.3 Die Newton'schen Axiome . . . 23
- 3.4 Die Gewichtskraft $\vec{F}_{\text{G}}$ und der Ortsfaktor g . . . 25
- 3.5 Die Normalkraft $\vec{F}_{\text{N}}$ . . . 26
- 3.6 Reibungskräfte $\vec{F}_{\text{R}}$ . . . 26
- 3.7 Luftwiderstand $\vec{F}_{\text{L}}$ . . . 28
- 3.8 Die Federkraft $\vec{F}_{\text{F}}$ und das Federgesetz . . . 28
- 3.9 Weitere Kraftarten . . . 29
- 3.10 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus . . . 29
- 3.11 "Alle Körper fallen gleich schnell" . . . 31
- 3.12 Erläuterungen zum Wechselwirkungsprinzip . . . 31
- 3.13 Die Zerlegung der Gewichtskraft auf einer schiefen Ebene . . . 33

4 Kinematik und Dynamik bei Kreisbewegungen **35**
4.1 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus . . . 35
4.2 Die Kinematik der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK) . . . 35
4.3 Die Dynamik der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK) . . . 36
4.4 Die Kräfte bei der Kurvenfahrt des VBZ-Busses . . . 37
4.5 Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen . . . 39
4.6 Kraftangaben als Vielfache des Ortsfaktors . . . 39
4.7 Das Newton'sche Gravitationsgesetz . . . 41
4.8 Kreisbahnen von Himmelskörpern . . . 42

5 Arbeit, Energie und Leistung **44**
5.1 Arbeit, Energie und Leistung beim VBZ-Bus . . . 44
5.2 Die Definition der Arbeit W: "Arbeit ist Kraft mal Weg" . . . 44
5.3 "Der Arbeitsbetrag ist prozessunabhängig!" . . . 46
5.4 Exkurs: Kraftwandler . . . 46
5.5 "Energie ist gespeichertes Arbeitsvermögen" . . . 48
5.6 Hubarbeit W_{Hub} und potentielle Energie E_{pot} . . . 48
5.7 Beschleunigungsarbeit W_{B} und kinetische Energie E_{kin} . . . 49
5.8 Weitere Energieformen . . . 50
5.9 Der Energieerhaltungssatz – allgemein und speziell für die Mechanik . . . 51
5.10 Die Definition der Leistung P: "Leistung ist Energieumsatz pro Zeit" . . . 53
5.11 Das Maschinenschema und der Wirkungsgrad einer Maschine . . . 54
5.12 Energieproblematik und elektrischer Energieverbrauch im Alltag . . . 55

6 Druck und Auftrieb **56**
6.1 Die Dichte von Stoffen . . . 56
6.2 Auflagedruck bei Festkörpern . . . 58
6.3 Druck als innerer Zustand von Flüssigkeiten und Gasen . . . 59
6.4 Druck im Teilchenmodell . . . 59
6.5 Der Schweredruck von Flüssigkeiten . . . 60
6.6 Notizen zum Luftdruck . . . 61
6.7 Gesamtdruck, Druckgleichgewicht, Über- und Unterdruck . . . 61
6.8 Die Auftriebskraft $\vec{F}_{\text{A}}$ . . . 63
6.9 Steigen, Sinken und Schweben . . . 64
6.10 Schwimmende Körper . . . 64
6.11 Herleitung der Formel (36) für den Schweredruck in Flüssigkeiten . . . 65
6.12 Herleitung der Formel (38) für die Auftriebskraft . . . 66

A Formelsammlung **67**
A.1 Kinematik (Bewegungsgleichungen) . . . 67
A.2 Dynamik (Newtonsche Mechanik und Kräfte) . . . 67
A.3 Arbeit, Energie und Leistung . . . 68
A.4 Druck und Auftrieb . . . 68

1 Physikalische Grössen und Einheiten

1.1 Das SI-Einheitensystem

Zu jeder **physikalischen Grösse** gehören **Masseinheiten**, wobei wir uns beliebig viele ausdenken könnten. Strecken kann man in Metern, Foots, Inches, Meilen, Lichtjahren, etc. angeben, Geschwindigkeiten in Metern pro Sekunde, Kilometern pro Stunde, Knoten, Mach, etc.

Um der möglichen Einheitenverwirrung aus dem Weg zu gehen, halten wir uns an ein breit anerkanntes und bewährtes Set von Einheiten, nämlich an das **internationale Einheitensystem (SI)**[1]. In diesem System gibt es **sieben Basiseinheiten**: **Meter m** (Strecke), **Sekunde s** (Zeit), **Kilogramm kg** (Masse), **Ampere A** (Stromstärke), **Kelvin K** (Temperatur), **Mol mol** (Stoffmenge) und **Candela cd** (Lichtstärke). Diese Basiseinheiten werden vom SI genau definiert. D.h., das SI legt präzise fest, was unter der jeweiligen Basiseinheit zu verstehen ist.[2]

Alle **Grundeinheiten** zu anderen Grössen setzen sich aus den sieben Basiseinheiten zusammen. Für die Mechanik werden allerdings nur der Meter, die Sekunde und das Kilogramm benötigt.

Das SI vereinfacht das Rechnen: Setzt man bei einer Berechnung lauter SI-Grundeinheiten ein, so wird die berechnete Grösse in ihrer SI-Grundeinheit herauskommen!

1.2 Grössen- und Einheitenübersicht

Grösse/Dimension	Symbol	SI-Grundeinheit	Andere Einheiten
Strecke, Länge, Radius, etc.	l, s, r, etc.	**Meter m**	–
Fläche	A	Quadratmeter m^2	–
Volumen	V	Kubikmeter m^3	$1\,\mathrm{lit.} = 0.001\,\mathrm{m}^3$
Zeit	t	**Sekunde s**	$1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min} = 3600\,\mathrm{s}$ $1\,\mathrm{d} = 24\,\mathrm{h} = 86\,400\,\mathrm{s}$
Geschwindigkeit	v	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Beschleunigung, Ortsfaktor	a, g	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$	–
Masse	m	**Kilogramm kg**	$1\,\mathrm{t} = 1000\,\mathrm{kg}$
Kraft	F	Newton $\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	–
Arbeit, Energie	W, E	Joule $\mathrm{J} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$	$1\,\mathrm{kWh} = 3\,600\,000\,\mathrm{J}$ $1\,\mathrm{kcal} = 4182\,\mathrm{J}$
Leistung	P	Watt $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$	$1\,\mathrm{PS} = 735.5\,\mathrm{W}$
Dichte	ϱ	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
Druck	p	Pascal $\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$	$1\,\mathrm{bar} = 100\,000\,\mathrm{Pa}$

[1] SI = *système international* (frz.) = internationales und wissenschaftlich festgelegtes Masseinheitensystem.

[2] Das stimmt heute nicht mehr ganz so. Im SI werden seit 2018 nicht mehr die Basiseinheiten definiert, sondern stattdessen die Werte von sieben fundamentalen Naturkonstanten exakt festgelegt. Es ist für die Gymnasialstufe vom Verständnis her aber sinnvoll, zunächst immer noch mit dem Konzept der Basiseinheiten zu arbeiten.

1.3 SI-Vorsätze (-Präfixe) und Zehnerpotenzen

Auch sehr grosse und sehr kleine Werte muss man übersichtlich notieren können. Dafür hat das SI sogenannte **Vorsätze** oder **Präfixe** eingeführt. Hier die Übersicht:

Präfix = Vorsatz		**Vergrösserungs- / Verkleinerungsfaktor**	**Zehnerpotenz**	**Beispiel**
E	Exa	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}	1 EJ = 1 Exajoule
P	Peta	1 000 000 000 000 000	10^{15}	1 PJ = 1 Petajoule
T	**Tera**	1 000 000 000 000	10^{12}	1 TB = 1 Terabyte
G	**Giga**	1 000 000 000	10^{9}	1 GJ = 1 Gigajoule
M	**Mega**	1 000 000	10^{6}	1 MV = 1 Megavolt
k	**Kilo**	1 000	10^{3}	1 kN = 1 Kilonewton
d	**Dezi**	0.1	10^{-1}	1 dl = 1 Deziliter
c	**Zenti**	0.01	10^{-2}	1 cm = 1 Zentimeter
m	**Milli**	0.001	10^{-3}	1 mW = 1 Milliwatt
µ	**Mikro**	0.000 001	10^{-6}	1 µs = 1 Mikrosekunde
n	**Nano**	0.000 000 001	10^{-9}	1 nm = 1 Nanometer
p	Piko	0.000 000 000 001	10^{-12}	1 pg = 1 Pikogramm
f	Femto	0.000 000 000 000 001	10^{-15}	1 fm = 1 Femtometer
a	Atto	0.000 000 000 000 000 001	10^{-18}	1 am = 1 Attometer

Alle fett gedruckten Vorsätze (von **Tera** bis **Nano**) sollten uns stets geläufig sein!

1.4 Konstanten und spezielle Werte

In den Naturwissenschaften gibt es gewisse feste Werte, die entweder eine fundamentale Bedeutung haben, oder einfach sehr häufig vorkommen, oder als Referenzgrössen bei der Einschätzung eines Resultates nützlich sind. Ab sofort auswendig kennen sollten sie die folgenden dieser **Konstanten**:

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c \approx 300\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$
Schallgeschwindigkeit in Luft	$v_{\mathrm{Schall}} \approx 340\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Ortsfaktor resp. **Fallbeschleunigung** an der Erdoberfläche (Schweiz)	$g = 9.81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Ungefährer **Luftdruck**	$p_{\mathrm{Luft}} \approx 1.0\,\mathrm{bar}$
Dichte von Luft	$\varrho_{\mathrm{Luft}} \approx 1.3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

1.5 Genauigkeit, signifikante Ziffern und Rundungsregeln

In Messungen erhobene Werte sind immer **ungenau**. Einerseits weist jede Messvorrichtung eine Genauigkeitsgrenze auf, andererseits treten beim Messen unvermeidbar Fehler auf. Diese lassen sich zwar durch Sorgfalt und bessere Messvorrichtungen verkleinern, aber es bleibt eine Tatsache, dass sämtliche Messdaten zwangsläufig mit einer Unsicherheit behaftet sind. Immer gibt es einen Unterschied zwischen dem gemessenen und dem "korrekten", "tatsächlichen" oder "wahren" Wert. Dieser inhärenten Ungenauigkeit müssen wir in einer "exakten" Naturwissenschaft wie der Physik Rechnung tragen!

Auf Forschungsebene ergänzt man Zahlenwerte durch eine **Fehlerangabe** mittels eines ± (sprich: "plusminus"). Möchte ich z.B. die Masse eines kleinen Metallstücks bestimmen und misst meine Waage auf $0.1\,\mathrm{g}$ genau, so schreibt man für den Messwert:

$$m = (34.6 \pm 0.1)\,\mathrm{g}$$

Es gibt genaue Regeln, wie mit solchen Angaben inkl. Fehler umzugehen ist, wenn daraus eine andere Grösse zu berechnen ist. Diese Regeln sind mathematisch etwas anspruchsvoller und für ein schnelles Rechnen ungeeignet, sodass wir eine vereinfachte Variante benutzen wollen: die Methode der **signifikanten Ziffern (s.Z.)**. Für eine ungefähre Genauigkeitsangabe genügt sie bestens.

> **Mit den signifikanten Ziffern einer Zahl meinen wir grundsätzlich alle ihre Ziffern!** (Es geht also **nicht** um die Nachkommastellen.)
>
> **Ausnahmen:** Vorangehende Nullen zählen niemals als signifikante Ziffern, nachfolgende Nullen nur dann, wenn die Zahl ein Dezimalkomma enthält.

Beispiele: $245.30\,\mathrm{N} \rightarrow 5$ s.Z. $\qquad 2600\,\mathrm{m} \rightarrow 2$ s.Z. $\qquad 0.003\,148\,\mathrm{kg} \rightarrow 4$ s.Z.

Unter Verwendung signifikanter Ziffern schreiben wir für die Masse unserer Münze von oben nun einfach $34.6\,\mathrm{g}$. Die letzte angegebene Ziffer wird automatisch als die Stelle interpretiert, auf der der Fehler resp. die Unsicherheit liegt.

Abmachung: Im Zweifelsfall kennzeichnen wir die letzte signifikante Ziffer explizit durch Unterstreichung. Soll z.B. die erste Null in $2600\,\mathrm{m}$ ebenfalls signifikant sein, so schreiben wir einfach $26\underline{0}0\,\mathrm{m}$. Und $2600\,\mathrm{m}$ hätte folglich 4 signifikante Ziffern.

Wissenschaftliche Schreibweise: Auf der sicheren Seite ist man mit der **wissenschaftlichen Schreibweise** unter Verwendung von Zehnerpotenzen: $2.60 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$ hat unmissverständlich 3 s.Z.. Der Nachteil dieser Schreibweise liegt darin, dass man zweimal überlegen muss, wie gross diese Angabe denn nun tatsächlich ist. Eine passende Wahl der Einheit schafft Abhilfe. Am besten geben wir diese Länge eben mit $2.60\,\mathrm{km}$ an.

Rechnen mit signifikanten Ziffern: Es ist unsinnig, wenn das Resultat einer Rechnung genauer ist als die Angaben, welche eingesetzt wurden. Daher gelten die folgenden Regeln:

- **Grundsätzlich gilt:**
  - **Endresultate werden auf so viele s.Z. wie die ungenaueste Angabe gerundet.**
  - **Bei Zwischenresultaten wird mindestens 1 s.Z. mehr angegeben.**
- **Weiter befolgen wir bei einer Addition oder Subtraktion: Die Dezimalstelle, auf der die Unsicherheit des Resultates liegt, ist vorgegeben durch den Summanden, der seine Unsicherheit auf der grössten Dezimalstelle hat.**

Beispiel 1: Während der Zeitspanne $t = 25.5\,\mathrm{s}$ fährt ein Auto gemäss Tachoanzeige mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Wie weit kommt es dabei? Zunächst sollten die $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ umgerechnet werden. Die Angabe $v = 52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ beinhaltet 2 s.Z.. Unser Zwischenresultat – die Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ – notieren wir deswegen mit mindestens 3 s.Z.:

$$v = 52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 52 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 14.44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Es folgt für die zurückgelegte Strecke

$$s = v \cdot t = 14.44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 25.5\,\mathrm{s} = 368.33\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{370\,\mathrm{m}}}$$

Wir runden auf 2 s.Z., weil die ungenauere Anfangsangabe ($52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$) nur 2 s.Z. aufweist.

Beispiel 2: Ich habe die Masse eines grossen Steins mit einer Waage auf $14.65\,\mathrm{kg}$ bestimmt. Die Masse eines zweiten, deutlich kleineren Steins habe ich auf einer anderen (feineren) Waage gemessen: $386.7\,\mathrm{g}$. Wie gross ist die Masse beider Steine zusammen? Hier die Addition:

$$\begin{array}{rr} & 14.6\underline{5}\ \ \mathrm{kg} \\ + & 0.3867\ \mathrm{kg} \\ \hline & 15.0\underline{3}67\ \mathrm{kg} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{15.04\,\mathrm{kg}}}$$

Die Unsicherheit des Resultates liegt auf der Dezimalstelle, wo die erste Massenangabe ihre letzte s.Z. aufweist. Auf diese Dezimalstelle, also auf die zweite nach dem Komma, muss gerundet werden. Das Resultat entspricht der Anzeige der ersten Waage, wenn wir beide Steine gleichzeitig auflegen.

Beispiel 3: Wir berechnen die Gesamtoberfläche einer Holzplatte aus ihren Massen $l = 140.0\,\mathrm{cm}$, $b = 65.0\,\mathrm{cm}$ und $h = 3.7\,\mathrm{cm}$. Jeweils zwei gegenüberliegende Seiten der Platte sind gleich gross. Für diese doppelten Flächen erhalten wir:

Ober- und Unterseite:	$2 \cdot l \cdot b = 2 \cdot 140.0\,\mathrm{cm} \cdot 65.0\,\mathrm{cm} = 18\underline{2}00\,\mathrm{cm}^2$
Doppelte Längsseitenfläche:	$2 \cdot l \cdot h = 2 \cdot 140.0\,\mathrm{cm} \cdot 3.7\,\mathrm{cm} = 1\underline{0}36\,\mathrm{cm}^2$
Doppelte Kopfseitenfläche:	$2 \cdot l \cdot h = 2 \cdot 65.0\,\mathrm{cm} \cdot 3.7\,\mathrm{cm} = 4\underline{8}1\,\mathrm{cm}^2$

Dabei habe ich jeweils die Ziffer unterstrichen, auf der die Unsicherheit des Resultates liegt. Gibt man beispielsweise die Summe der beiden Kopfseitenflächen als eigenes Resultat an, so würde sie $480\,\mathrm{cm}^2$ betragen, denn die Höhe ($h = 3.7\,\mathrm{cm}$) hat im Gegensatz zur Breite ($b = 65.0\,\mathrm{cm}$) nur 2 s.Z., sodass dieses Resultat eben auf 2 s.Z. gerundet werden müsste.

Nun möchten wir aber die Summe dieser drei Zwischenresultate bilden. Dabei taucht die Unsicherheit bei den ersten beiden Werten bereits auf der Hunderterstelle auf, sodass wir das Schlussresultat auf diese Dezimalstelle zu runden haben:

$$\begin{array}{rr} & 18\underline{2}00\ \mathrm{cm}^2 \\ + & 1\underline{0}36\ \mathrm{cm}^2 \\ + & 4\underline{8}1\ \mathrm{cm}^2 \\ \hline & 19\underline{7}17\ \mathrm{cm}^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{19\,700\,\mathrm{cm}^2}}$$

Wir bemerken: Obwohl alle Messungen auf Millimeter genau erhoben wurden, können wir die Gesamtoberfläche unserer Holzplatte nur auf $100\,\mathrm{cm}^2$, also auf $1\,\mathrm{dm}^2$ genau angeben! Das ist doch erstaunlich und zeigt, wie wichtig die Mitführung der Genauigkeit ist. Ansonsten ergeben sich scheinbare Genauigkeiten, die schlichtweg falsch sind! Aufgrund der Messgenauigkeit resp. -ungenauigkeit kann diese Plattenoberfläche eben nicht genauer angegeben werden!

Exakte Angaben: Manche Angaben sind **exakt**, also als Wert mit unendlich vielen signifikanten Ziffern aufzufassen. Hier ein paar Beispiele, die zeigen sollen, was damit gemeint ist:

- **Zählangaben:** Z.B. sind in einem Tram genau 48 Menschen, an einem normalen Würfel gibt es exakt 6 Seitenflächen und eine Woche beinhaltet genau 7 Tage.
- **Mathematische Angaben:** In der Mathematik sind in der Regel alle Zahlen exakt gemeint, so z.B. die 3 und die 7 im Bruch $\frac{3}{7}$ sowie der Bruch selber. Dasselbe gilt z.B. auch für $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$, etc. Ausserdem gibt es wichtige mathematische Zahlenkonstanten, die wir ebenfalls exakt behandeln. Dazu gehören z.B. π ($\approx 3.141\,593$) und e ($\approx 2.718\,282$).
- **Einheitenumrechnungen:** Umrechnungsangaben sind stets exakt gemeint. $1\,\mathrm{km}$ beinhaltet per Definition exakt $1000\,\mathrm{m}$. Diese Zahl 1000 ist unendlich genau!

2 Kinematik geradliniger Bewegungen

⇒ Mathematische Beschreibung der Bewegung längs einer vorgegebenen Bahn

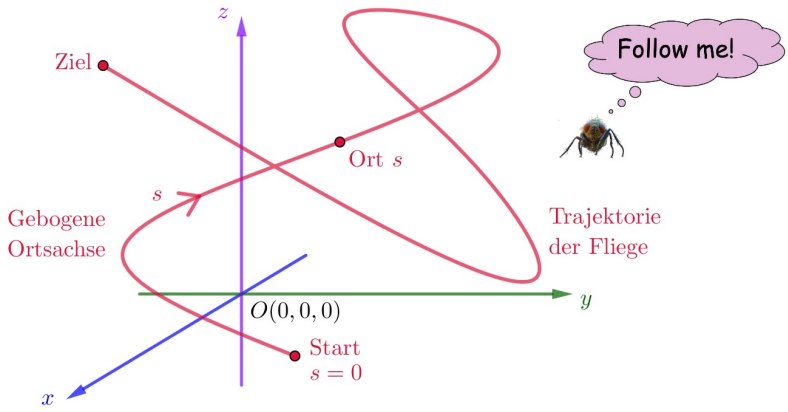
Als **Kinematik** bezeichnen wir den Teilbereich der Mechanik, der sich damit beschäftigt Bewegungsabläufe in Mathematik zu fassen. Erst in der sogenannten **Dynamik** wird gefragt, weshalb eine Bewegung gerade so abläuft, wie sie das tut. Die Kurzantwort wird lauten: "Kräfte steuern Bewegungen". Im Moment reden wir aber eben noch nicht über Kräfte, sondern wollen erst Bewegungen mittels mathematischer **Funktionen** beschreiben.

2.1 Geradlinige Bewegung und Bewegung längs einer Trajektorie

Stellen wir uns zunächst eine möglichst einfache Bewegung im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ vor, z.B. einen Zug, der auf einem schnurgeraden Streckenabschnitt unterwegs ist. Wir wollen zulassen, dass der Zug schneller oder langsamer wird, aber seine Bewegung verlaufe strikt längs einer Gerade. In diesem Fall sprechen wir von einer **geradlinigen Bewegung**.

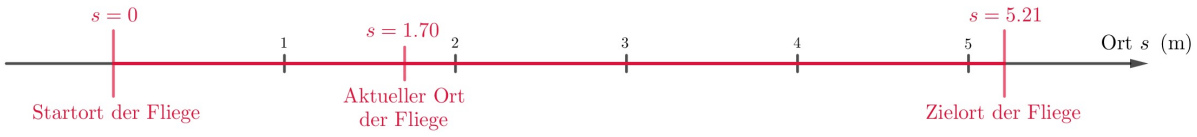
Wenn wir unser kartesisches Koordinatensystem nun so legen, dass die x-Achse genau längs der Bewegungsgerade liegt und folglich y- und z-Achse senkrecht dazu stehen, dann behält der Zug während seiner Bewegung ständig dieselbe y- und dieselbe z-Koordinate. Nur die x-Koordinate verändert sich und ist interessant. Die anderen beiden können wir getrost ausblenden. Somit brauchen wir zur Beschreibung des Ortes nur noch eine einzige Raumdimension und nicht mehr alle drei. Das macht die Sache deutlich einfacher!

Allerdings bilden solche echt geradlinigen Bewegungen in der Realität die Ausnahme. Die allermeisten Bewegungen beinhalten nun mal Kurven. Stellen wir uns z.B. eine Fliege vor, die in unserem Schulzimmer herumsaust. Sie startet irgendwo und landet an einem anderen Ort, nachdem sie einen komplizierten und durchaus kurvenreichen Flug hinter sich hat:



Die Flugbahn der Fliege bezeichnen wir als **Trajektorie** (sprich: "Trajektori-e"). Längs dieser Flugbahn können wir messen, wie weit die Fliege bereits geflogen ist. Wir legen eine gebogene, aber als Objekt eben eindimensionale **Ortsachse** auf die Trajektorie und legen ihren Nullpunkt der Einfachheit halber in den Startort der Fliege.

Auf diese Weise blenden wir die Kurven der Flugbahn aus. Sie sind aus der Ortsangabe s nicht mehr ersichtlich. So vereinfachen wir die komplizierte, dreidimensionale Bewegung zu einer quasi geradlinigen, also eindimensionalen Bewegung:



Ist diese Vereinfachung zu einer Ortsachse längs der Trajektorie nicht zu einschränkend? Im ersten Moment lautet die Antwort: Nein, für unsere nächsten Schritte ist diese Einschränkung genau richtig. Wir wollen uns nämlich damit beschäftigen, wie wir das schneller und das langsamer Werden von Objekten mathematisch beschreiben, und dabei geht es nicht um die Kurven, sondern eben nur um die Bewegung längs der Trajektorie.

Natürlich werden wir uns später für Kurven interessieren, dann müssen wir die gesamte Dreidimensionalität wieder berücksichtigen.

2.2 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus

Zur konkreten Veranschaulichung erläutere ich in diesem Skript viele Überlegungen direkt am Beispiel eines **VBZ-Busses** in Zürich:



Längs seiner Trajektorie betrachten wir die Bewegung des Busses von der Haltestelle X zur Haltestelle Y. Sie setzt sich (idealisiert) aus drei Teilen (= **Bewegungsabschnitte**) zusammen:

1. **Losfahren = Gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit (gmbBoA)**

   Der Bus beschleunigt. Nach $7.0\,\mathrm{s}$ hat er seine Fahrtgeschwindigkeit von $45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ erreicht.

2. **Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit = Gleichförmige Bewegung (gfB)**

   Der Bus fährt während den folgenden $10\,\mathrm{s}$ mit seiner erreichten Geschwindigkeit weiter. Für die späteren Betrachtungen empfiehlt sich eine Umrechnung von $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$:

   $$45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 45 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{45}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \left(= 13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

   Anmerkung zur Rundung (vgl. Abschnitt 1.5): Die $12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sind ein ungerundetes **Zwischenresultat**, das wir in diesem Skript für diverse Rechnungen weiter verwenden werden. Die $45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ enthalten ja nur zwei signifikante Ziffern. Ein Zwischenresultat besitzt immer mindestens eine signifikante Ziffer mehr als die ungenaueste Angabe (= Angabe mit den wenigsten s.Z.). Wäre die Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ das Endresultat, so müssten wir sie auf zwei signifikante Ziffern, also eben auf $13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ runden.

   In den $10\,\mathrm{s}$ gleichförmiger Fahrt legt der Bus somit $125\,\mathrm{m}$ zurück (auch ein ungerundetes Resultat).

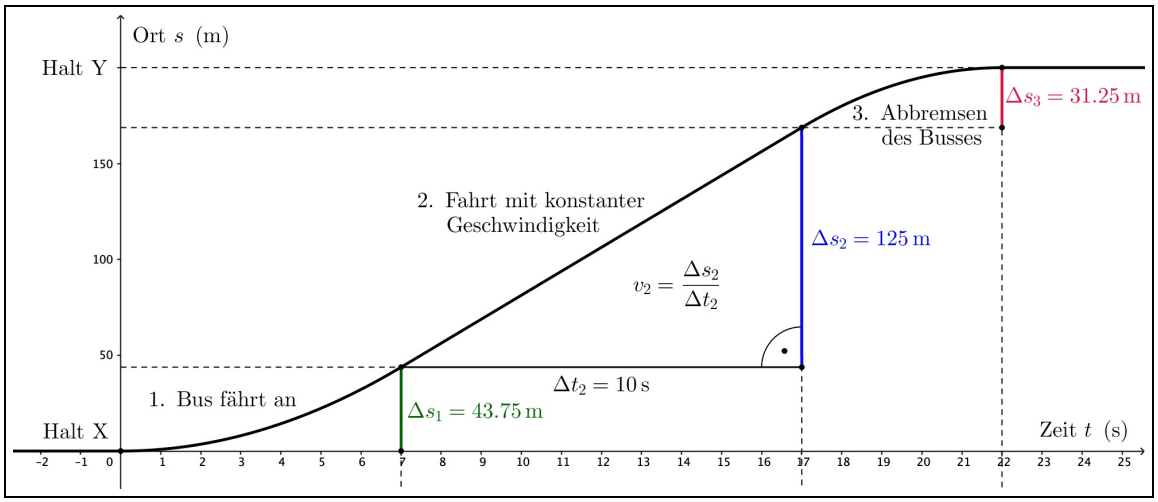
3. **Abbremsen = Gleichmässig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit (gmbBmA)**

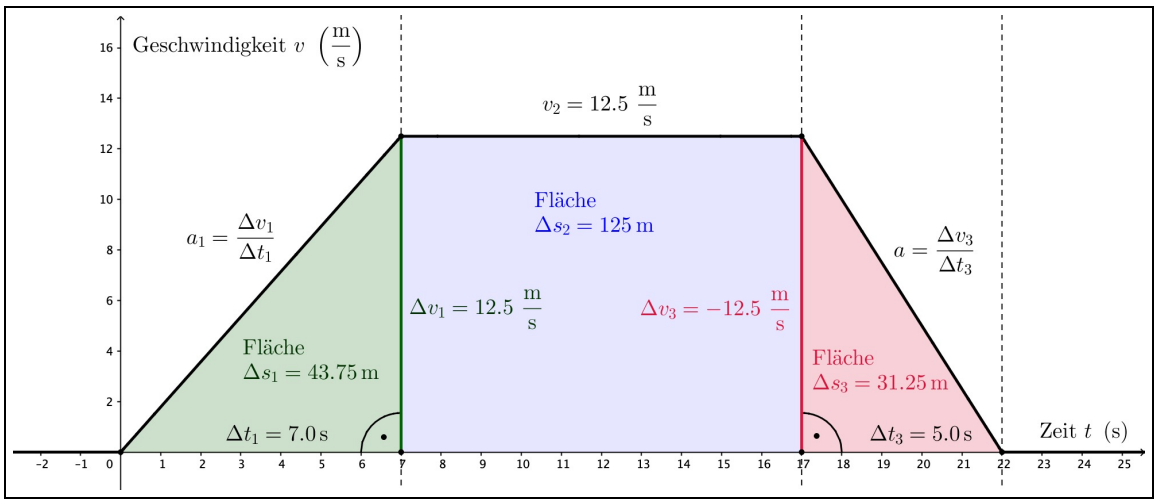
   Der Bus bremst ab. Dafür benötigt er eine Zeit von $5.0\,\mathrm{s}$. Seine Geschwindigkeit ist am Ende auf 0 gesunken.

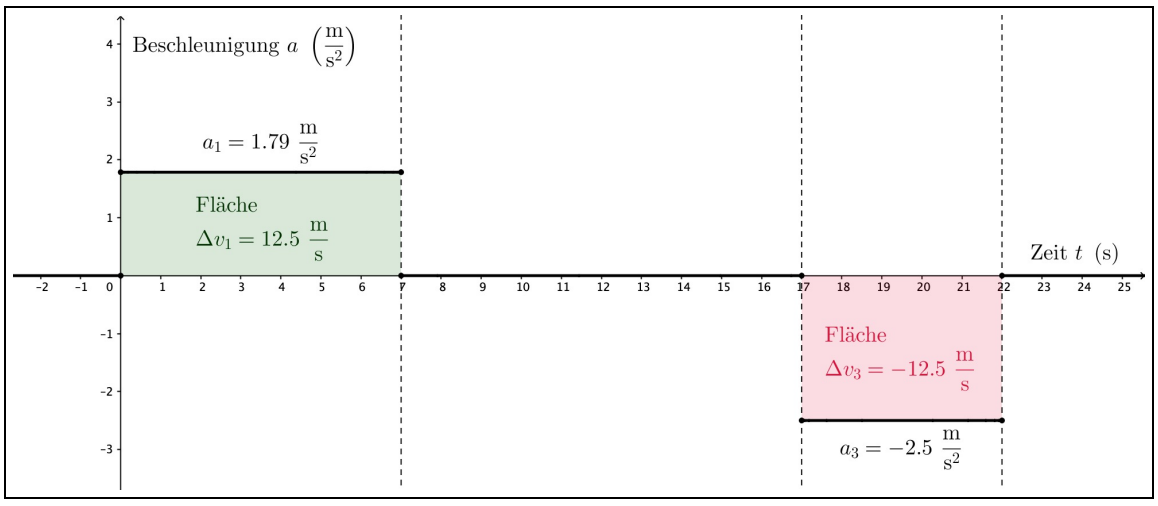
2.3 Die drei Bewegungsdiagramme zur Fahrt des VBZ-Busses

Es ist empfehlenswert stets die hier gezeigte Diagramm-Reihenfolge zu wählen:

- **Oben: Zeit-Weg-**, **Zeit-Ort-** oder einfach ***t*-*s*-Diagramm**.
- **Mitte: Zeit-Geschwindigkeits-** oder einfach ***t*-*v*-Diagramm**.
- **Unten: Zeit-Beschleunigungs-** oder einfach ***t*-*a*-Diagramm**.







2.4 Das Zeit-Ort-, Zeit-Weg- oder t-s-Diagramm

(vgl. Diagramme auf Seite 11)

Die Zeitachse: Auf der liegenden Achse wird die Zeit aufgetragen (z.B. in Sekunden). Den **zeitlichen Nullpunkt** legen wir mit der Abfahrt des Busses von der Haltestelle X zusammen.

Die Ortsachse: Auf der stehenden Achse sind die Orte längs der Strasse aufgetragen. Den **örtlichen Nullpunkt** setzen wir auf die Haltestelle X. Damit kann man auf der Ortsachse die zurückgelegte Wegstrecke ablesen. Die Ortsachse wird zur Wegachse → **Zeit-Weg-Diagramm**.

Die Ortsfunktion $s(t)$: In der Kinematik wird der Aufenthaltsort s als Grösse angesehen, die vom aktuellen Zeitpunkt t abhängt. Wir sprechen von der **Ortsfunktion** $s(t)$ (sprich: "s von t"). Dies ist eine **Funktion** oder **Abbildung** ganz im Sinne der Mathematik: Jeder reellen Zahl t, die für einen Zeitpunkt steht, wird genau eine reelle Zahl s, die für einen Ort steht, zugeordnet. Die Funktionsdeklaration sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{rccc} \text{Ortsfunktion} \quad s: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & s(t) \end{array}$$

Auf der oberen Zeile wird gesagt, dass eine reelle Zahl auf eine andere reelle Zahl abgebildet wird. Auf der unteren Zeile steht dann die konkrete Abbildung. Der Stelle $t \in \mathbb{R}$ ordnet die Funktion den Funktionswert $s(t) \in \mathbb{R}$ zu.

Das t-s-Diagramm zeigt den **Graphen** der Ortsfunktion. Zu jedem Zeitpunkt t auf der Zeitachse gehört genau ein Aufenthaltsort s auf der Ortsachse. Man fährt vom Zeitpunkt t auf der Zeitachse senkrecht bis zum Graphen nach oben, und anschliessend waagrecht nach links hinüber zur Ortsachse, wo der zugehörige Ort $s(t)$ ablesbar ist.

2.5 Die Definition der Geschwindigkeit v

Je steiler der Graph im t-s-Diagramm ist, desto schneller ist der Bus unterwegs (vgl. Seite 11).

Im 1. Bewegungsabschnitt nimmt die Steigung zu: der Bus wird schneller. Im 2. Abschnitt bleibt die Steigung gleich: der Bus fährt gleichbleibend schnell. Im 3. Abschnitt flacht der Graph ab: der Bus wird langsamer. Diese Beobachtungen motivieren die folgende Definition:

Definition der (Momentan-)Geschwindigkeit v

Die momentane **Geschwindigkeit** *v ist gegeben durch die aktuelle Steigung im t-s-Diagramm. Auf Bewegungsabschnitten mit konstanter Geschwindigkeit lässt sie sich mittels eines Steigungsdreiecks bestimmen:*

$$v := \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

"Geschwindigkeit = Strecke pro Zeitspanne"

- Im zweiten Bewegungsabschnitt des Busses gilt demzufolge ganz nachvollziehbar:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{125\,\text{m}}{10\,\text{s}} = 12.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \left(= 13\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

- **Konsequenz: Geschwindigkeiten können negativ sein!**

  Würde der Bus rückwärts fahren, so ergäbe sich im t-s-Diagramm eine negative Steigung. Geschwindigkeiten können demnach auch negative Werte annehmen. Das ist anders als in unserer Alltagsvorstellung von Geschwindigkeit!

2.6 Das Zeit-Geschwindigkeits- oder t-v-Diagramm

(vgl. Diagramme auf Seite 11)

Die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$: Auch die Geschwindigkeit v wird als Funktion der Zeit t aufgefasst. Jedem Zeitpunkt t wird eine momentane Geschwindigkeit $v(t)$ zugeordnet. Das t-v-Diagramm zeigt den Graphen dieser Funktion.

"Geschwindigkeitveränderungen verlaufen gleichmässig": Solange der Bus im 2. Bewegungsabschnitt mit konstanter Geschwindigkeit unterwegs ist, ergibt sich im t-v-Diagramm eine Horizontale. Das ist klar, denn die Zeit schreitet voran, aber der Geschwindigkeitswert bleibt gleich.

Hingegen wissen wir eigentlich nicht so genau, wie die Geschwindigkeit während dem Losfahren zu- und während dem Abbremsen abnimmt. Deshalb wollen wir uns die Sache momentan etwas vereinfachen, indem wir bei Geschwindigkeitsveränderungen immer von der folgenden Annahme ausgehen:

> **Annahme zu Geschwindigkeitsänderungen**
>
> *Geschwindigkeitsänderungen laufen stets gleichmässig ab, sodass sich das t-v-Diagramm zu einem Vorgang stets aus lauter geraden Abschnitten zusammensetzt. Wir gehen momentan also stets von sogenannt* **gleichmässig beschleunigten Bewegungen (gmbB)** *aus.*

Diese Annahme hat für die anderen Diagramme zur Folge, dass...

- ... im t-s-Diagramm nur gerade oder aber parabelförmige Kurven vorkommen.
- ... das t-a-Diagramm stets eine Treppenfunktion, bestehend aus lauter Horizontalen, ist.

In der Realität können natürlich beliebige Verläufe von Geschwindigkeitsänderungen vorkommen. Unsere Einschränkung ist trotzdem sinnvoll, weil wir damit erstens die Grundideen der Klassischen Mechanik bereits gut verstehen können, und zweitens, weil erstaunlich viele Beschleunigungsvorgänge tatsächlich mehr oder weniger gleichmässig ablaufen.

2.7 Die Definition der Beschleunigung a

Je steiler der Graph im t-v-Diagramm ist, desto schneller verändert sich die Geschwindigkeit des Busses (vgl. Seite 11).

Im 1. Bewegungsabschnitt ist der Geschwindigkeitsgraph steigend: die Geschwindigkeit nimmt zu. Im 2. Abschnitt verläuft er horizontal: der Bus bleibt gleich schnell. Im 3. Abschnitt fällt der Geschwindigkeitsgraph: der Bus bremst ab. Diese Beobachtungen motivieren die folgende Definition:

> **Definition der Beschleunigung a**
>
> *Die* **Beschleunigung** a *ist gegeben durch die aktuelle Steigung im t-v-Diagramm. Auf Bewegungsabschnitten mit gleichmässiger Geschwindigkeitsänderung lässt sie sich mit Hilfe eines Steigungsdreiecks bestimmen:*
>
> $$a := \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2}$$
>
> *"Beschleunigung = Geschwindigkeitsänderung pro Zeitspanne"*

- Positive Beschleunigungen gehören zu zunehmenden Geschwindigkeitswerten: "der vorwärts fahrende Bus wird schneller" **oder:** "der rückwärts fahrende Bus wird langsamer".
- Negative Beschleunigungen gehören zu abnehmenden Geschwindigkeitswerten: "der vorwärts fahrende Bus wird langsamer" **oder:** "der rückwärts fahrende Bus wird schneller".
- Die Beschleunigungen im 1. und im 3. Bewegungsabschnitt betragen (Zwischenresultate):

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{7.0\,\mathrm{s}} = 1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{und} \qquad a_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5.0\,\mathrm{s}} = -2.50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

  Im 2. Bewegungsabschnitt gibt es keine Beschleunigung resp. $a = 0$.
- Was beschreibt eine Beschleunigung genau?

> **Anschauliche Bedeutung der Beschleunigung**
>
> *Die Beschleunigung beschreibt, wie rasch sich die Geschwindigkeit eines Körpers verändert. Die Einheit $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ sollte man sich stets aufgeteilt denken:*
>
> $$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}}$$
>
> *"Meter pro Quadratsekunde = (Meter pro Sekunde) pro Sekunde"*
>
> *$a = 1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ meint z.B., dass der Bus pro Sekunde um $1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ schneller wird.*

- **Vorsicht bei Umrechnungen von Beschleunigungseinheiten!**

$$\text{Beispiel:} \quad 1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{(3600\,\mathrm{s})^2} = \frac{1}{12\,960}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

  Achtung! Nur bei der Umrechnung von $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gilt der Faktor "3.6": $1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$!

2.8 Das Zeit-Beschleunigungs- oder t-a-Diagramm

(vgl. Diagramme auf Seite 11)

Die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ und ihr Graph: Wie schon Ort und Geschwindigkeit, so wird auch die Beschleunigung a als Funktion der Zeit aufgefasst. Jedem Zeitpunkt t wird die aktuell vorhandene Beschleunigung $a(t)$ zugeordnet. Das t-a-Diagramm zeigt den Graphen dieser Funktion.

Treppenfunktion: Gehen wir davon aus, dass Geschwindigkeitsänderungen stets gleichmässig ablaufen, so ist der Beschleunigungsgraph eine aus lauter Horizontalen bestehende **Treppenfunktion**.

Die gestrichelten Verbindungslinien zwischen den Treppenstufen sind allerdings "unphysikalisch". Bei realen Vorgängen würde sich, selbst bei enorm rascher Veränderung der Beschleunigung ein stetiger Übergang ergeben, weil Kräfte nicht in Nullzeit ein- oder ausgeschaltet werden können.

2.9 Flächen im t-v-Diagramm und im t-a-Diagramm

(vgl. Diagramme auf Seite 11)

Im Rahmen unserer Übungsaufgaben finden wir heraus, dass den Flächen in t-v- und t-a-Diagramm interessante Bedeutungen zugeschrieben werden können:

Wegstrecken im t-v-Diagramm

In jedem Bewegungsabschnitt entspricht die **Fläche zwischen Zeitachse und Geschwindigkeitsgraph** *dem während diesem Abschnitt* **zurückgelegten Weg** Δs.

Kurz: "Die Fläche im t-v-Diagramm ist gleich der zurückgelegten Strecke."

Geschwindigkeitsänderungen im t-a-Diagramm

In jedem Bewegungsabschnitt entspricht die **Fläche zwischen Zeitachse und Beschleunigungsgraph** *der während diesem Abschnitt erfolgten* **Geschwindigkeitsänderung** Δv.

Kurz: "Die Fläche im t-a-Diagramm ist gleich der Geschwindigkeitsänderung."

Warum diese Zusammenhänge so gelten, wird so richtig erst in der 4. Klasse in der Mathematik im Thema **Integralrechnung** geklärt, auch wenn wir uns die Sache in den Übungsaufgaben schon ziemlich plausibel machen. Ein paar Anmerkungen noch:

- In beiden Diagrammen haben Flächen oberhalb der Zeitachse positive, solche unterhalb negative Werte.
- Mit der ersten Aussage werden Wegstrecken auch bei sich verändernden Geschwindigkeiten berechenbar. Mit der Zweiten können Geschwindigkeitsänderungen bei sich verändernden Beschleunigungen bestimmt werden. Dies verleiht den Diagrammen eine gewisse Wichtigkeit.
- Für unseren Bus finden wir im t-v-Diagramm die folgenden Strecken:

  1. Bewegungsabschnitt: $\Delta s_1 = \frac{1}{2} \cdot 12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 7.0\,\text{s} = 43.75\,\text{m}$

  2. Bewegungsabschnitt: $\Delta s_2 = 12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\,\text{s} = 125\,\text{m}$

  3. Bewegungsabschnitt: $\Delta s_3 = \frac{1}{2} \cdot 12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5.0\,\text{s} = 31.25\,\text{m}$

  Gesamtstrecke: $s_{\text{total}} = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 = 200\,\text{m}$ (Endresultat)

  Da es sich im 1. und im 3. Bewegungsabschnitt um Dreiecksflächen unter dem Geschwindigkeitsgraphen handelt, kommt je ein Faktor $\frac{1}{2}$ in der Streckenberechnung vor.

- Analog ergibt sich für die Geschwindigkeitsänderungen im t-a-Diagramm:

  1. Bewegungsabschnitt: $\Delta v_1 = 1.79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 7.0\,\text{s} = 12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

  3. Bewegungsabschnitt: $\Delta v_3 = -2.50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5.0\,\text{s} = -12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

  Die beiden Flächen im t-a-Diagramm sind also genau gleich gross, was widerspiegelt, dass der Bus am Ende der gesamten Bewegung wieder stillsteht. Seine Geschwindigkeit nimmt im 3. Abschnitt um gleich viel ab, wie sie im 1. Abschnitt zugenommen hat.

2.10 Tipps zum Zeichnen der Diagramme

- Zuerst sollte der Bewegungsablauf in **Bewegungsabschnitte** unterteilt werden. Diese Unterteilung strukturiert das weitere Denken. Im t-s-Diagramm muss man dafür von Auge abschätzen, wo die Übergange zwischen geraden und gekrümmten Abschnitten liegen. In den beiden anderen Diagrammtypen ist die Unterteilung in der Regel direkt sichtbar.
- Der Graph im t-s-Diagramm ist **stetig** und **glatt**. Er lässt sich an einem Stück zeichnen und es gibt keine Ecken. (Letzteres wäre unphysikalisch, da solche Ecken mit Geschwindigkeitssprüngen und unendlich grossen Kräften einhergehen müssten.)
- Der Graph im t-v-Diagramm ist **stetig** und besteht aus lauter geraden Abschnitten. Er lässt sich an einem Stück zeichnen und weist Ecken auf ($\hat{=}$ Beschleunigung ändert sich schlagartig).
- Der Graph im t-a-Diagramm ist eine nicht stetige **Treppenfunktion** aus Horizontalen.
- Wo die Geschwindigkeit ansteigt, d.h., wo die Beschleunigung grösser ist als 0, beschreibt der Graph im t-s-Diagramm eine **Linkskurve**. Wo die Geschwindigkeit abnimmt, wo also die Beschleunigung kleiner ist als 0, zeigt er eine **Rechtskurve**.

2.11 Gleichförmige Bewegung und Durchschnittsgeschwindigkeit

Gleichung zur gleichförmigen Bewegung (gfB)

$v = \text{konstant}$ *resp.* $a = 0$

Ist ein Körper mit der konstanten Geschwindigkeit v unterwegs, so gilt:

$$s = v \cdot t \tag{3}$$

"Strecke = Geschwindigkeit mal Zeit"

Definition der Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$

Wir blenden aus, wie die Bewegung eines Körpers im Detail aussieht. Benötigt er für eine Strecke s die Zeit t, so beträgt seine **Durchschnittsgeschwindigkeit** *$\bar{v}$ auf dieser Strecke:*

$$\overline{v} := \frac{s}{t} \tag{4}$$

- Im Beispiel unseres Busses gilt:

1. Abschnitt: $\overline{v}_1 = \dfrac{12.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 6.25\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad s_1 = \overline{v}_1 \cdot t_1 = 6.25\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 7.0\,\text{s} = 43.75\,\text{m}$

2. Abschnitt: $\overline{v}_2 = v_2 = 12.5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad s_2 = \overline{v}_2 \cdot t_2 = 12.5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \underline{10}\,\text{s} = 125\,\text{m}$

3. Abschnitt: $\overline{v}_3 = \dfrac{12.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 6.25\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad s_3 = \overline{v}_3 \cdot t_3 = 6.25\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5.0\,\text{s} = 31.3\,\text{m}$

Gesamte Fahrt: $\bar{v}_{\text{total}} = \dfrac{200\,\text{m}}{22\,\text{s}} = 9.09\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Wir bemerken: $\overline{v}_{\text{total}} = 9.09\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \neq \frac{6.25+12.5+6.25}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 8.33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (!!!). Die Durchschnittsgeschwindigkeit der gesamten Fahrt ist in der Regel nicht gleich dem arithmetischen Mittel der Durchschnittgeschwindigkeiten auf den einzelnen Abschnitten!

- Bei der Berechnung einer Durchschnittsgeschwindigkeit geht man also von einer gfB aus, obwohl der Körper innerhalb der Bewegung beschleunigen und/oder abbremsen kann.
- Bei gleichmässiger Beschleunigung lässt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit sehr leicht berechnen. Sie ist das arithmetische Mittel aus der **Anfangsgeschwindigkeit** v_0 und der **Endgeschwindigkeit** v:

$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

Ist die Anfangs- oder die Endgeschwindigkeit gleich Null, so gilt einfach:

$$\overline{v} = \frac{v}{2} \qquad \text{resp.} \qquad \overline{v} = \frac{v_0}{2} \tag{5}$$

Dies ist bei der Bewegung des Busses auf dem 1. und dem 3. Bewegungsabschnitt der Fall.

2.12 Gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit

Gleichungen zur gleichmässig beschleunigten Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit (gmbBoA)

$a = \text{konstant} \neq 0$ *und* $v_0 = 0$

Startet ein Körper seine Bewegung aus dem Stand ($v_0 = 0$)*, so gilt:*

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \tag{6}$$

$$v = a \cdot t \tag{7}$$

$$s = \frac{v^2}{2a} \tag{8}$$

$$s = \frac{v}{2} \cdot t \tag{9}$$

Dabei ist t die Zeit, s die Strecke, a die Beschleunigung und v die Endgeschwindigkeit.

- **Herleitungen**

Der Geschwindigkeitsgraph $v(t)$ ist eine Ursprungsgerade (vgl. t-v-Diagramm auf Seite 11). Dazu gehört eine lineare Funktion ohne y-Achsenabschnitt: $v = a \cdot t$. Die Steigung ist entspricht genau der Beschleunigung a, weil diese ja so definiert wurde. Damit ist Gleichung (7) erklärt.

Gleichung (9) bedient sich der Durchschnittsgeschwindigkeit bei verschwindender Anfangsgeschwindigkeit (siehe Gleichung (5)). Es gilt:

$$s = \overline{v} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot t$$

Die Kombination von (7) und (9) liefert (6):

$$s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{a \cdot t}{2} \cdot t = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Unter Verwendung einer Umstellung von (7) erhält man aus (9) schliesslich auch (8):

$$v = a \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v}{a} \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{a} = \frac{v^2}{2a}$$

- (8) wird häufig als die **zeitunabhängige Gleichung** bezeichnet, da t in ihr nicht vorkommt. Sie verknüpft die zurückgelegte Strecke und die Endgeschwindigkeit direkt miteinander.

  Ein Rechenbeispiel zu dieser zeitunabhängigen Gleichung beim VBZ-Bus:

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{(12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2 \cdot 1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 43.65\,\mathrm{m}$$

  Wegen der Rundung des Beschleunigungswertes (Zwischenresultat $a = 1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) ergibt sich nicht ganz genau der gleiche Wert wie auf Seite 16 ($s = 43.75\,\mathrm{m}$).

- Gleichung (6) ist die Ortsfunktion $s(t)$ bei einer gmbBoA. Da die Zeit quadratisch auftritt, ist ihr Graph im t-s-Diagramm eine **Parabel** (vgl. t-s-Diagramm auf Seite 11).

2.13 Gleichmässig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit

Gleichungen zur gleichmässig beschleunigten Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit (gmbBmA)

$a = \text{konstant} \neq 0 \quad \textit{und} \quad v_0 \neq 0$

Beschleunigt sich die Bewegung eines Körpers gleichmässig ausgehend von einer Startgeschwindigkeit v_0, so gelten die folgenden Beziehungen:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \tag{10}$$

$$v = v_0 + a \cdot t \tag{11}$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \tag{12}$$

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t \tag{13}$$

Dabei ist t die Zeit, s die Strecke, a die Beschleunigung, v_0 die Start- und v die Endgeschwindigkeit.

- **Herleitungen**

  Die Herleitungen dieser Gleichungen verlaufen analog zu denjenigen der gmbBoA (Seite 17).

  Zum Geschwindigkeitsgraphen gehört jetzt allerdings eine lineare Geschwindigkeitsfunktion **mit** y-Achsenabschnitt: $v = v_0 + a \cdot t$. Der Graph beginnt über $t = 0$ bei der Startgeschwindigkeit v_0, die dann eben gerade dem y-Achsenabschnitt entsprechen muss. (Die Steigung ist nach wie vor durch die Beschleunigung a gegeben.) Damit ist Gleichung (11) erklärt.

  Wie Gleichung (9), so bedient sich auch Gleichung (13) der Durchschnittsgeschwindigkeit. Nun ist allerdings die Anfangsgeschwindigkeit nicht mehr gleich 0. Aus der Kombination von (11) und (13) folgt (10):

$$s = \overline{v} \cdot t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t = \frac{2v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

  Aus (11) und (13) lässt sich (12) gewinnen (binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$):

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a} \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t = \frac{v + v_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

2.14 Der freie Fall und die Fallbeschleunigung g

Definition "Freier Fall" := Vertikale Bewegung, bei welcher ausschliesslich die Gewichtskraft auf den Körper wirkt ($F_{\text{res}} = F_{\text{G}}$).

Real fallende Objekte beschreiben in guter Näherung einen freien Fall, solange der Luftwiderstand gering ist (→ kleine Geschwindigkeit, kleine Angriffsfläche, geringe Luftdichte).

Merke: Beim freien Fall an der Erdoberfläche wird die stets gleiche **Fallbeschleunigung** $a = g$ gemessen. Sie beträgt:

$$g = 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

In der Dynamik werden wir verstehen, dass die Fallbeschleunigung g gleich dem **Ortsfaktor** ist, was dazu führt, dass wir g auch mit anderen Einheiten schreiben können: $9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}$ ("Newton pro Kilogramm", vgl. Abschnitt 3.11).

2.15 Differentialrechnung – ein mathematischer Ausblick

In der Kinematik definieren wir die Momentangeschwindigkeit v in Gleichung (1) als Steigung des Graphen der Ortsfunktion $s(t)$ und die Beschleunigung a in Gleichung (2) als Steigung des Graphen der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$. Das funktioniert mit Ihren bisherigen mathematischen Kenntnissen allerdings nur, solange wir es mit geraden Abschnitten zu tun haben. Nur dann lässt sich nämlich ein Steigungsdreieck an den Graphen legen und die beiden Gleichungen ergeben einen Sinn.

Wie steht es aber mit kurvenartigen Verläufen? Wie lässt sich beispielsweise die Geschwindigkeit des VBZ-Busses zum Zeitpunkt $t = 3.0\,\text{s}$ im t-s-Diagramm auf Seite 11 bestimmen?

Klar, wenn wir davon ausgehen, dass die Geschwindigkeitsveränderung gleichmässig abläuft, dann können wir mit Gleichung (7) rasch eine Antwort geben, aber es müsste doch eine allgemeinere Möglichkeit geben die Steigung eines Graphen in einem bestimmten Punkt anzugeben.

Tatsächlich werden Sie diese mathematische "Technik" in der 3. Klasse lernen. Sie heisst **Differentialrechnung** und erlaubt die Berechnung der Steigung in einem beliebigen Punkt auf einem Funktionsgraphen. Im Prinzip wird dabei die Steigung einer Tangente berechnet, die man im betrachteten Punkt an die Kurve legt.

Es wäre schön, wenn Sie sich in der 3. Klasse noch daran erinnern könnten, dass Sie beim Zeichnen eines t-v-Diagramms aus einem vorgegebenen t-s-Diagramm im Prinzip bereits in der 1. Klasse Differentialrechnung betrieben haben. Die Berechnung der Steigungsfunktion werden Sie dann als **Ableitung** bezeichnen. Die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ ist die Ableitung der Ortsfunktion $s(t)$ und die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ ist die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ oder die zweite Ableitung der Ortsfunktion $s(t)$.

3 Dynamik geradliniger Bewegungen

⇒ Der Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung

3.1 Was ist eine Kraft?

In der Physik sprechen wir immer dann von einer **Kraft**, wenn ein Körper **gestossen** oder an ihm **gezogen** wird. Um eine Kraft zu beschreiben sind mehrere Angaben notwendig:

Vollständige Beschreibung einer Kraft $\vec{F}$

Wirkt auf einen Körper die **Kraft** $\vec{F}$*, so müssen zu deren vollständiger Beschreibung drei Angaben gemacht werden:*

- **Kraftrichtung:** **In welche Richtung** *zieht oder stösst die Kraft?*
- **Kraftbetrag:** **Wie stark** *wird gestossen resp. gezogen?*
- **Ansatzpunkt:** **Wo** *setzt die Kraft am Körper an?*

Anmerkungen zur Kraftbeschreibung

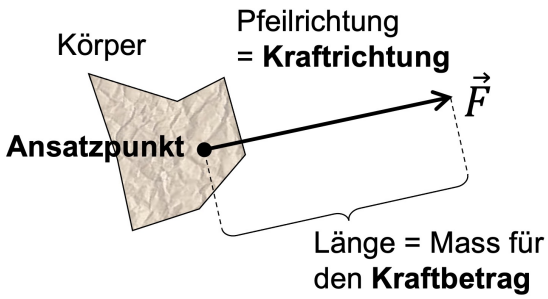
- **"Stossen" resp. "Ziehen" meint hier nicht die Bewegung des Körpers, sondern lediglich das "an ihm" Ziehen oder Stossen.**

  Die Bewegung – oder besser: der Bewegungsablauf – ist dann allenfalls ein Resultat dieses Stossens. Drücken Sie z.B. mit einer Hand gegen eine Wand, so üben Sie zwar eine Kraft auf die Wand aus, bewegen wird sich diese deswegen aber noch lange nicht.

  Erst das Zusammenspiel aller auf einen Körper wirkenden Kräfte bestimmt über die Auswirkung, die dieser Körper erfährt! Genau dieses Zusammenspiel und die dadurch hervorgerufene Bewegungswirkung ist das Thema der Newton'schen Mechanik resp. der Dynamik. Dieses Kapitel enthält die zentralen Aussagen hierzu.

- Kraft**beträge** – "Wie stark ist die Kraft?" – lassen sich durch **Kraftmessgeräte** (Federwaagen, Kraftplatten, Kraftsensoren) erfassen. Die **SI-Grundeinheit**, in der man Kräfte angibt, ist das **Newton** N. Mehr dazu später in Abschnitt 3.3.

- Kräfte lassen sich in Skizzen bestens durch einen **Pfeil** darstellen:



- Wie oder wodurch ein Körper "gestossen" resp. "gezogen" wird, dafür gibt es viele verschiedene Möglichkeiten. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von verschiedenen **Kraftarten**.

  Jede Kraftart ist auf eine bestimmte Ursache zurückzuführen, die in der Regel bereits aus dem Namen der Kraft hervorgeht. Die Abschnitte 3.4 bis 3.9 listen einige für die Mechanik sehr typische Kraftarten auf und geben wichtige Erläuterungen dazu.

3.2 Kraftvektoren, resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ und Kräftegleichgewichte

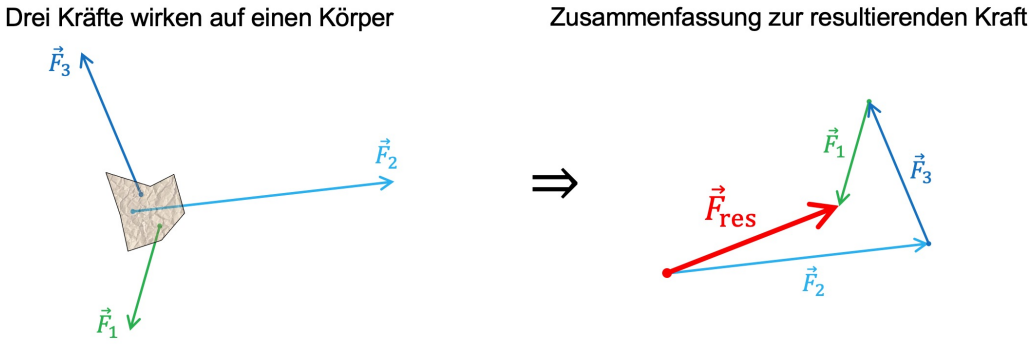
Die Kraft ist ein Beispiel für eine Grösse, die neben dem Betrag auch eine **Richtung** im dreidimensionalen Raum beinhaltet. Dasselbe gilt für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Solche "Grössen mit Richtung" bezeichnen wir als **Vektoren**.[3] Zur Kennzeichnung von Vektoren verwenden wir das oberhalb des Symbols stehende **Vektorpfeilchen**. So schreiben wir Kräfte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Skizzen mit $\vec{F}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$ an.

Lassen wir das Vektorpfeilchen weg, so meinen wir nur den **Betrag** der jeweiligen Grösse. F alleine steht also für einen Kraftbetrag – "Wie stark wird gezogen/gestossen?".

Die Konstruktion der resultierenden Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ durch Vektoraddition

Auf einen Körper sollen beispielsweise irgendwelche drei Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ wirken. Welche Kraft erfährt der Körper in dieser Situation insgesamt? Hier die geometrische Antwort:



In Worten: Die Kraftvektoren werden **in beliebiger Reihenfolge** (!) zu einer **Pfeilkette** aneinander gehängt. Der Vektor, der vom Anfangs- zum Endpunkt der Pfeilkette führt, steht für die Zusammenfassung der Kräfte zu einer einzigen Kraft. Dieses Aneinanderhängen der Vektoren nennt man **Vektor-** oder **Pfeiladdition** und im Falle unserer Kräfte bezeichnen wir ihr Ergebnis als die **resultierende Kraft** $\vec{F}_{\text{res}}$, die unser Körper erfährt.

> **Definition der resultierenden Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$**
>
> *Unter der* **resultierenden Kraft** $\vec{F}_{\text{res}}$ *verstehen wir die Zusammenfassung aller auf einen Körper wirkenden Kräfte zu einer einzigen Kraft.*
>
> *Diese Zusammenfassung erfolgt via* **Pfeil-** *oder* **Vektoraddition**, *bei der man alle einzelnen Kraftvektoren aneinander hängt.* $\vec{F}_{\text{res}}$ *ist dann der* **Vektor vom Anfangs- bis zum Endpunkt dieser Pfeilkette**.

Offenbar wird das Aneinanderhängen der Pfeile als eine Art **Addition** verstanden. Tatsächlich werden Sie in der **Vektorgeometrie**, also in der Mathematik, die sich mit der Beschreibung von Objekten im dreidimensionalen Raum auseinandersetzt, für die oben gezeigte Situation schreiben:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Ohne Vektorpfeilchen wäre diese Gleichung falsch, denn der Pfeil für die resultierende Kraft F_{res} ist deutlich kürzer als die aufaddierten Längen der Pfeile für die drei einzelnen Kräfte F_1, F_2 und F_3:

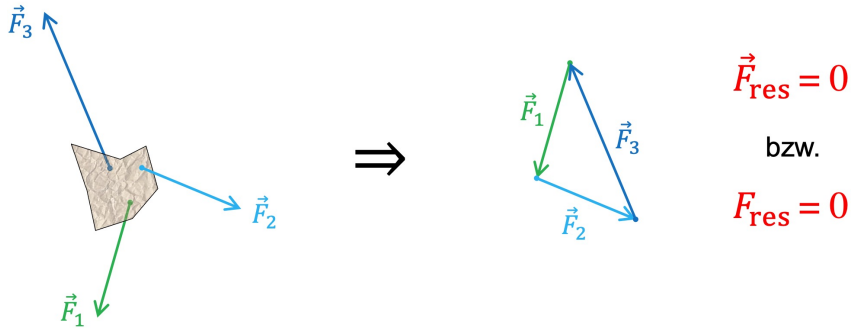
$$F_{\text{res}} \neq F_1 + F_2 + F_3 \qquad \text{stattdessen:} \quad F_{\text{res}} < F_1 + F_2 + F_3$$

[3] Im Gegensatz dazu heissen Grössen, die lediglich durch die Angabe eines Betrags beschrieben werden, **Skalare**.

$\vec{F}_{\text{res}} = 0$: Kräftegleichgewichte

Addieren sich alle auf einen Körper wirkenden Kräfte vektoriell so, dass die resultierende Kraft verschwindet, $\vec{F}_{\text{res}} = 0$ resp. $F_{\text{res}} = 0$, so sprechen wir von einem **Kräftegleichgewicht** und sagen, der Körper sei **kräftefrei**, obwohl Kräfte auf ihn wirken. Die Kräfte heben sich aber eben gegenseitig auf, sodass der Körper netto keine Kraft erfährt.

Geometrisch bedeutet ein Kräftegleichgewicht, dass sich die Pfeilkette aller Kraftvektoren genau schliesst:



Im Formalismus der Vektoraddition notieren wir sofort:

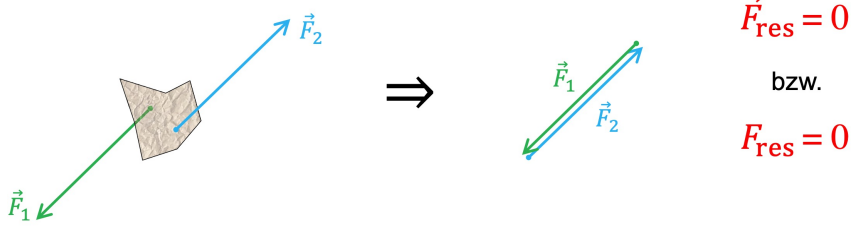
$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

Für die Kraftbeträge ist die Sache aber wieder komplizierter. So stehen die Längen der drei Kraftvektoren $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ im gezeigten Beispiel für die Seiten eines Dreiecks. Ganz bestimmt gilt in diesem Fall die sogenannte **Dreiecksungleichung** – immer zwei Seitenlängen sind zusammen länger als die dritte Seite:

$$F_1 < F_2 + F_3 \qquad \text{und} \qquad F_2 < F_1 + F_3 \qquad \text{und} \qquad F_3 < F_1 + F_2$$

Zwei sich gegenseitig aufhebende Kräfte

Oft werden wir es mit Situationen zu tun haben, in denen sich zwei Kräfte gegenseitig gerade neutralisieren:



Auch in diesem Fall können wir vektorgeometrisch notieren:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

Wir haben damit gerade gelernt, was das **Negative** eines Vektors ist: Hier ist $\vec{F}_2$ das Negative von $\vec{F}_1$, wobei es sich um einen gleich langen Pfeil handelt, der aber genau in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Für die Beträge der beiden Kraftvektoren lässt sich nun aber notieren:

$$F_1 = F_2$$

Und damit kommt das Kräftegleichgewicht doch in einer uns sehr vertrauten Weise daher. Die beiden zueinander entgegengesetzt gerichteten Kraftvektoren heben sich gegenseitig auf, weil ihre Beträge gleich gross sind.

3.3 Die Newton'schen Axiome

Die klassische Mechanik basiert auf drei durch Isaac Newton im 17. Jahrhundert formulierten Grundprinzipien. Man nennt sie die drei **Newton'schen Axiome**. (Axiome sind Grundgesetze, die innerhalb der Theorie nicht weiter hinterfragt, sondern als fundamentale Wahrheiten angesehen werden.)

Das 1. Newton'sche Axiom: Das Trägheitsprinzip

Ein Körper bewegt sich genau dann gleichförmig und geradlinig, d.h. mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ (Betrag und Richtung!), wenn er kräftefrei ist, also ein Kräftegleichgewicht herrscht. ($\vec{F}_{\text{res}} = 0$).

Das 2. Newton'sche Axiom: Das Aktionsprinzip

Ein Körper wird genau dann in eine bestimmte Richtung beschleunigt, wenn die auf ihn wirkende resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ in diese Richtung zeigt. Bei einem Körper mit Masse m gilt für die resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ und die Beschleunigung $\vec{a}$:

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a} \qquad \textit{resp.} \qquad F_{\text{res}} = m \cdot a \tag{14}$$

Das 3. Newton'sche Axiom: Das Wechselwirkungsprinzip

"actio = reactio: Jede Kraft erzeugt eine gleich grosse Gegenkraft."

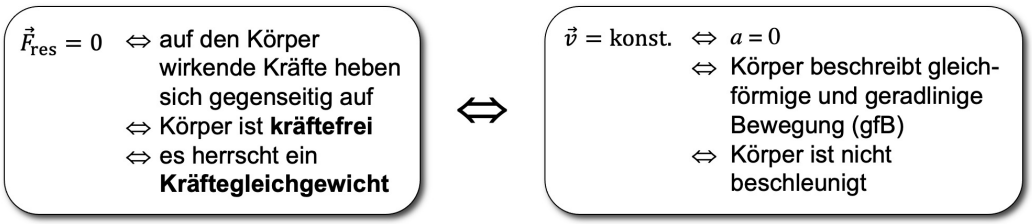
Wirkt der Körper A mit einer Kraft $\vec{F}_{\text{A}\to\text{B}}$ auf den Körper B, so erfährt auch A von B eine Kraft $\vec{F}_{\text{B}\to\text{A}}$. Diese ist gleich gross wie $F_{\text{A}\to\text{B}}$, wirkt aber in die entgegengesetzte Richtung:

$$\vec{F}_{\text{B}\to\text{A}} = -\vec{F}_{\text{A}\to\text{B}} \tag{15}$$

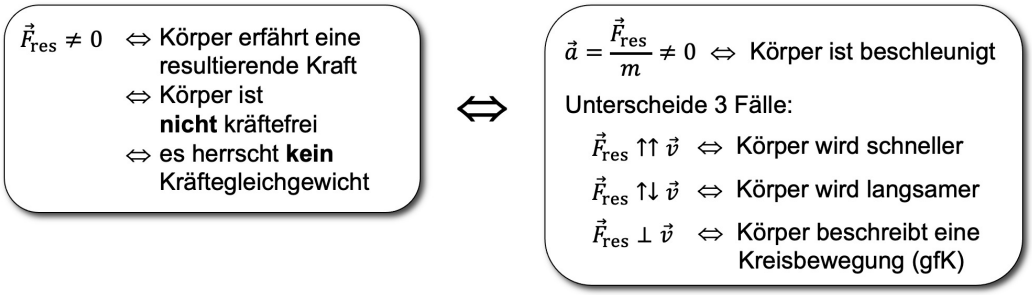
Anmerkungen zu den Newton'schen Axiomen

- Zunächst eine grafische Zusammenfassung zum Trägheits- und zum Aktionsprinzip:

Trägheitsprinzip (1. Newton'sches Axiom)



Aktionsprinzip (2. Newton'sches Axiom)



- Wir schränken unsere Betrachtungen zunächst auf die Änderung des Geschwindigkeitsbetrages ein. D.h., wir kümmern uns nur um das schneller oder langsamer Werden, nicht um die Kurvenfahrt. Daher der Übertitel des Kapitels: "Dynamik **geradliniger** Bewegungen."

  Im Kapitel 4 nehmen wir dann auch Kreisbewegungen resp. Kurvenfahrten unter die Lupe. Dann geht es genau um Situationen in denen die resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ nicht immer nur **parallel** ($\uparrow\uparrow$) oder **antiparallel** ($\uparrow\downarrow$) zur aktuellen Bewegungsrichtung $\vec{v}$ steht.

  Im Moment wollen wir uns vor allem merken: Zeigt die resultierende Kraft in dieselbe Richtung wie die aktuelle Bewegungsrichtung ($\vec{F}_{\text{res}} \uparrow\uparrow \vec{v}$), so wird der Körper schneller. Steht die resultierende Kraft hingegen genau entgegengesetzt zur aktuellen Bewegungsrichtung ($\vec{F}_{\text{res}} \uparrow\downarrow \vec{v}$), so wird der Körper langsamer.

- Die Masse m eines Körpers ist ein Mass für seine **Trägheit**. Ist ein Körper insgesamt kräftefrei ($F_{\text{res}} = 0$), so behält er seinen Bewegungszustand aufgrund dieser Trägheit bei. Wir sprechen von einer **Trägheitsbewegung**: "mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus" (gfB).

- Sobald ein Körper schneller oder langsamer wird oder seine Bewegungsrichtung ändert oder beides zusammen der Fall ist, muss er unter dem Einfluss einer von Null verschiedenen resultierenden Kraft stehen. Dann gilt der im 2. Newton'schen Axiom beschriebene formale Zusammenhang: $\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a}$ und der Körper erfährt eine Beschleunigung mit Betrag:

$$a = \frac{F_{\text{res}}}{m} \tag{16}$$

  Hier kommt die Masse als Mass für die Trägheit eines Körpers direkt zur Anwendung. Je grösser m ist, desto kleiner ist bei gleicher resultierender Kraft F_{res} die Beschleunigung a.

- Die vektorielle Schreibweise $\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a}$ bringt zum Ausdruck, dass die Beschleunigungsrichtung stets durch die Richtung der resultierenden Kraft vorgegeben wird.

- Die SI-Einheit der Kraft, das **Newton**, wird über das Aktionsprinzip definiert:

> **Die Definition der Krafteinheit Newton**
>
> *Ein Körper mit 1 Kilogramm Masse erfahre eine konstante (resultierende) Kraft. Schafft es diese Kraft, den Körper aus dem Stand in 1 Sekunde auf eine Geschwindigkeit von genau 1 Meter pro Sekunde zu beschleunigen, so hat sie einen Betrag von genau* **1 Newton**:
>
> $$[\,F\,] = [\,m\,] \cdot [\,a\,] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} := \textbf{Newton} = \text{N}$$

- Das Wechselwirkungsprinzip wird immer dann wichtig, wenn wir uns für den Austausch von Kräften zwischen mehreren Körpern interessieren. Im Moment ist dies eher selten der Fall, weil wir unsere Betrachtungen auf einzelne Körper und deren Bewegungsablauf einschränken.

  Ein paar Anmerkungen zum Wechselwirkungsprinzip folgen daher erst etwas weiter hinten im Abschnitt 3.12.

Nachdem wir nun die Newton'schen Axiome als theoretische Grundlage aller weiteren Betrachtungen kennengelernt haben, ist es an der Zeit endlich all die verschiedenen Kräfte kennenzulernen, die in der Mechanik auf unsere Körper wirken können. Das soll in den nächsten paar Abschnitten geschehen.

3.4 Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ und der Ortsfaktor $\vec{g}$

An der Erdoberfläche erfährt jeder Körper eine **Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in Richtung des Erdmittelpunktes**, also gegen unten. Wir nennen sie auch **Schwerkraft**, **Erdanziehungskraft** oder **Gravitation**.

Als Ursache für die Gewichtskraft identifizierte Isaac Newton die **Anziehung zwischen Massen**. Die Gewichtskraft, die ein Körper erfährt, ist **proportional** zu dessen eigener Masse m. Das klingt vielleicht kompliziert, besagt aber nichts anderes, als dass uns ein Kilogramm Masse halb so schwer erscheint wie zwei Kilogramm Masse.

Ich bin also deswegen schwer, weil meine Masse und die Masse der Erde sich gegenseitig anziehen. Im Prinzip werde ich auch von allen anderen Massen in meiner Umgebung angezogen. Davon merken wir allerdings nichts, weil die Gravitation eigentlich eine sehr schwache Kraft ist. Das hat zur Folge, dass mindestens eine der beiden Massen sehr gross sein muss, wenn wir von dieser Anziehungskraft etwas bemerken wollen.

Allerdings fühlen wir als unsere Schwerkraft nicht die Gewichtskraft selber, sondern vielmehr, wie wir durch sie gegen die Erdoberfläche gedrückt werden. Wir spüren also die Normalkräfte zwischen unseren Füssen und dem Boden (vgl. Abschnitt 3.5). **Im freien Fall merken wir nichts von unserer eigenen Gewichtskraft!**

Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$

Ein Körper mit Masse m erfährt eine **Gewichtskraft** *$\vec{F}_G$, die gegeben ist durch:*

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g} \qquad \textit{resp.} \qquad F_G = m \cdot g \tag{17}$$

Dabei ist $\vec{g}$ der sogenannte **Ortsfaktor**. *Er beschreibt die Stärke und Richtung der Gravitation an einem bestimmten Ort. An der Erdoberfläche zeigt er überall Richtung Erdmittelpunkt und hat in der Schweiz einen Betrag von etwa:*

$$g = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \approx 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

Weitere Anmerkungen zur Gewichtskraft

- Die Einheit des Ortsfaktors g ist zu lesen als **"Newton pro Kilogramm"**: Pro Kilogramm Masse entstehen an der Erdoberfläche 9.81 Newton Gewichtskraft.

  Über die Erdoberfläche hinweg variiert dieser Wert wenig. Am geringsten ist er am Äquator ($g \approx 9.78\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$), währenddem er bei den Polen am grössten ist ($g \approx 9.83\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$). Auf die Ursachen dieser unterschiedlichen Werte und auf die Grösse des Wertes selber werden wir zu gegebener Zeit näher eingehen.

- Zum Vergleich: Auf der Mondoberfläche beträgt der Ortsfaktor ca. $1.6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$. Im Erdmittelpunkt ist er 0, da man dort von allen Seiten gleich stark durch die Erdmasse angezogen wird.

- Die Gewichtskraft von $100\,\mathrm{g}$ Masse (z.B. eine **Tafel Schokolade**) beträgt hier an der Erdoberfläche gerade etwa 1 Newton. Das ist ein guter **Referenzwert** zum Merken und Vergleichen!

  Wann immer eine Kraft in Newton angegeben wird, können sie sich denken: "Ah, das ist so stark wie soundso viele Tafeln Schokolade schwer wären."

- Die Masse des Beispiel-VBZ-Busses beträgt 26.0 Tonnen. Somit folgt für seine Gewichtskraft:

$$F_G = m \cdot g = 26.0\,\mathrm{t} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 26\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \simeq 255\,000\,\mathrm{N} = 255\,\mathrm{kN}$$

3.5 Die Normalkraft $\vec{F}_{\mathrm{N}}$

Wirkt eine Kraft gegen die **Oberfläche** eines stabilen Gegenstandes, so reagiert dieser mit einer Gegenkraft, welche wir als **Normalkraft** $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ bezeichnen. Kurz:

> **Die Normalkraft ist die Reaktionskraft, die ein Gegenstand aufgrund seiner Stabilität zu erzeugen vermag.**

Anmerkungen zur Normalkraft

- In unserem Beispiel des VBZ-Busses entwickelt die Strassenoberfläche immer gerade soviel Kraft um den Bus zu tragen, also dessen Gewichtskraft zu kompensieren! Das wissen wir, weil der Bus in vertikaler Richtung in Ruhe ist (vgl. Abschnitt 3.3). Somit ist $F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}} = 255\,\mathrm{kN}$.
- Die Normalkraft wirkt stets **senkrecht von der Oberfläche weg**. Daher ihr Name: "Normal" bedeutet in der Mathematik nämlich "senkrecht stehend" (z.B. auf einer Fläche).

3.6 Reibungskräfte $\vec{F}_{\mathrm{R}}$

Wir unterscheiden verschiedene Arten von Reibung zwischen Oberflächen:

Gleitreibung: Dies ist die Reibungskraft, welche entsteht, wenn zwei Oberflächen aufgrund von Bewegung aneinander reiben (→ Rutschen resp. Gleiten).

Haftreibung: Diese Reibungskraft tritt auf, solange zwei Oberflächen sich berühren, sich aber noch nicht relativ zueinander bewegen (→ Haftung).

Solange die Kräfte, welche zur relativen Bewegung der Oberflächen führen würden, einen gewissen Betrag nicht überschreiten, verhindert die Haftreibung diese Bewegung. Für die Haftreibung lässt sich jeweils ein maximaler Grenzwert berechnen.

Rollreibung: Auch bei rollenden Rädern entsteht eine Art von Reibung, denn:

- Erstens besteht bei der Radachse eine Gleitreibung (oder allenfalls nochmals eine Rollreibung, wenn mit Kugellagern gearbeitet wird).
- Zweitens wird jede Stelle auf der Radaussenseite beim Rollen gegen die Unterlage gedrückt, nur um gleich wieder von dieser weggezogen zu werden. Dieses Wegziehen erfolgt gegen kleine anziehende Oberflächenkräfte. Dies ist der Hauptgrund für die Rollreibung – und für den Lärm, den man von vorbeifahrenden Autos hört; der Autolärm kommt in der Regel also nicht hauptsächlich vom Automotor.

Für Gleit-, Haft- und Rollreibung gibt es einfache Berechnungsformeln:

Beträge von Reibungskräften $\vec{F}_{\mathrm{R}}$

Werden zwei Körper mit der Normalkraft F_{N} gegeneinander gedrückt, so betragen allfällige Reibungskräfte:

$$\begin{aligned} &\textbf{Gleitreibung:} && F_{\mathrm{R}} = \mu_{\mathrm{G}} \cdot F_{\mathrm{N}} \\ &\textbf{Haftreibung:} && F_{\mathrm{R}} \leq \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{N}} \\ &\textbf{Rollreibung:} && F_{\mathrm{R}} = \mu_{\mathrm{R}} \cdot F_{\mathrm{N}} \end{aligned} \tag{18}$$

μ_{G}, μ_{H} und μ_{R} sind Reibungszahlen. *Sie beschreiben den Einfluss der Oberflächenbeschaffenheiten auf die jeweilige Reibungskraft.*

Anmerkungen zu Reibungskräften

- Die Berechnungsformeln (18) liefern nur Näherungswerte. Keinesfalls besitzen sie den exakten theoretischen Charakter des 2. Newton'schen Axioms. Es sind lediglich ungefähre experimentelle Befunde.
- Die Indizes G, H und R bei den Reibungszahlen μ sagen einfach, zu welcher Reibungsart die Reibungszahl gehört.
- Reibungskräfte hängen von zwei Faktoren ab: Erstens, wie stark die beiden Oberflächen gegeneinander gedrückt werden ($\rightarrow F_N$), zweitens von den Oberflächenbeschaffenheiten ($\rightarrow \mu$).
- Gleit- und Rollreibung hängen **nicht von der Reibungsgeschwindigkeit** ab!
- Gleit- und Haftreibung hängen **nicht von der Grösse der Kontaktfläche** ab!
- Befindet sich ein Körper auf einer **horizontalen Unterlage**, durch welche er vollständig getragen wird, so ist $F_N = F_G = m \cdot g$. Daraus folgt für die Reibungskräfte:

$$F_R = \mu_{G/R} \cdot m \cdot g \qquad \text{resp.} \qquad F_R \leq \mu_H \cdot m \cdot g$$

- Man kann die Reibungszahl so verstehen: μ gibt an, welcher Bruchteil der Normalkraft auch als Reibungskraft verwendet wird.
- Reibungszahlen liegen meistens zwischen 0 und 1, können aber auch grösser als 1 sein. Kleine Werte stehen für wenig reibende Oberflächenkombinationen.

  Bei gegebenen Oberflächenbeschaffenheiten ist die Haftreibungszahl stets grösser als die Gleitreibungreibungszahl: $\mu_H > \mu_G$. Das ist die Ursache des Rucks, der sich einstellt, wenn ein Gegenstand zu rutschen beginnt.

  Es gibt eine Vielzahl tabellierter Reibungszahlen – für verschiedene Reibungsarten und verschiedene Kombinationen von Oberflächenbeschaffenheiten. Solche Tabellenwerte sind allerdings nur ungefähre Richtwerte. Hier einige Beispiele:

Haft- und Gleitreibung
(typische Werte für glatte, trockene Oberflächen)

	Gleitreibung	Haftreibung
Bremsklotz auf Bremsscheibe	0.35 ± 0.15	
Gelenk (z. B. Schulter)	0.003	0.01
Glas auf Glas	0.40	0.94
Holz auf Holz	0.3 ± 0.1	0.4 ± 0.2
Holz auf Stein	0.3	0.7
Leder auf Metall	0.3	0.4
NaCl auf NaCl	1.2	1.5
Pneu auf trockener Asphaltstrasse	0.65 ± 0.15	0.85 ± 0.15
Ski auf Schnee	0.12 ± 0.08	0.2 ± 0.1
Stahl auf Eis	0.014	0.027
Stahl auf Stahl (hart)	0.42	0.78
Stahl auf Teflon	0.04	0.04

Rollwiderstandskoeffizienten
(typische Werte)

	Rollreibung
Autoreifen auf Asphalt (Lkw)	0.008 ± 0.002
Autoreifen auf losem Sand	0.3 ± 0.1
Autoreifen auf Schotter	0.02 ± 0.01
Eisenbahnrad auf Schiene	0.0015 ± 0.0005
Fahrradreifen auf Asphalt	0.007

  Wir nehmen zur Kenntnis, dass hier ziemlich ungenaue Angaben tabelliert sind. Möchte man die Reibungszahl in einer bestimmten Situation ganz genau kennen, so gibt es nur die Ausmessung im Experiment.

- Gehen wir in unserem VBZ-Bus-Beispiel von einer Rollreibungszahl von $\mu_R = 0.0075$ aus, so erfährt der Bus während der Fahrt eine Reibungskraft von:

$$F_R = \mu_R \cdot F_N = 0.0075 \cdot 255\,\text{kN} \simeq 1.9\,\text{kN}$$

3.7 Luftwiderstand $\vec{F}_{\mathrm{L}}$

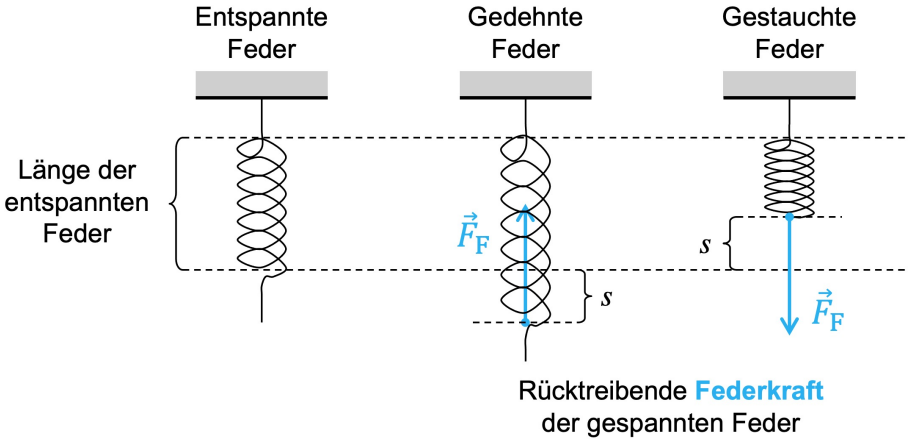
Bewegt sich ein Gegenstand relativ zur Luft, so muss er bei dieser Bewegung ständig Luft zur Seite schieben. Dies erzeugt je nach Geschwindigkeit, Form und Fläche eine unterschiedlich starke Widerstandskraft. Diese Art von Reibung bezeichnen wir als **Luftwiderstand** $\vec{F}_{\mathrm{L}}$.

Im Unterschied zu anderen Reibungsarten ist beim Luftwiderstand die Geschwindigkeit von entscheidender Bedeutung. Bei kleiner Geschwindigkeit kann man $\vec{F}_{\mathrm{L}}$ meistens vernachlässigen, bei grossen Geschwindigkeiten wird diese Kraft hingegen ganz entscheidend.

Wir verzichten auf eine Formel zur Berechnung des Luftwiderstandes. Im Beispiel unseres VBZ-Busses vernachlässigen wir ihn.

3.8 Die Federkraft $\vec{F}_{\mathrm{F}}$ und das Federgesetz

Wird eine Spiralfeder gedehnt oder gestaucht, so entwickelt sie eine rücktreibende **Federkraft** $\vec{F}_{\mathrm{F}}$:



Der Betrag F_{F} ist proportional zur **Dehnungsstrecke** s. D.h., in gleichem Masse, wie die Feder gedehnt (oder gestaucht) wird, wächst auch ihre rücktreibende Kraft an! Dieser Zusammenhang ist unter dem Namen **Federgesetz** bekannt.

Das Federgesetz und die Federkraft $\vec{F}_{\mathrm{F}}$

Wird eine Spiralfeder um die Strecke s aus ihrer entspannten Lage gedehnt oder gestaucht, so entwickelt sie eine rücktreibende **Federkraft** $\vec{F}_{\mathrm{F}}$*, mit welcher sie die entspannte Lage wieder herzustellen versucht. Für ihren Betrag gilt:*

$$F_{\mathrm{F}} = D \cdot s \tag{19}$$

D ist die **Federkonstante** *der Spiralfeder. Sie beschreibt die Stärke der Feder.*

Anmerkungen zum Federgesetz

- Je stärker eine Feder ist, desto grösser ist der Wert ihrer Federkonstante. Das kommt auch in der SI-Einheit der Federkonstante zum Ausdruck: $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, also Newton pro Meter.

  Beispiel: Wollte man eine Spiralfeder mit einer Federkonstanten von $D = 34\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ um einen Meter dehnen, so bräuchte man eine Kraft von $34\,\mathrm{N}$, eben: "34 Newton pro Meter".

- Auch bei vielen anderen **elastischen**, also dehnbaren Gegenständen gilt das Federgesetz in guter Näherung und es lässt sich eine Federkonstante angeben.

  Beispiele sind Pfeilbogen, Gummibälle, Trampoline, Luftpolster, etc.

3.9 Weitere Kraftarten

Es gibt noch etliche weitere Kraftarten, denen man je nach Vorkommen oder Ursache verschiedene Namen geben kann. Hier zwei häufige Beispiele aus der Mechanik:

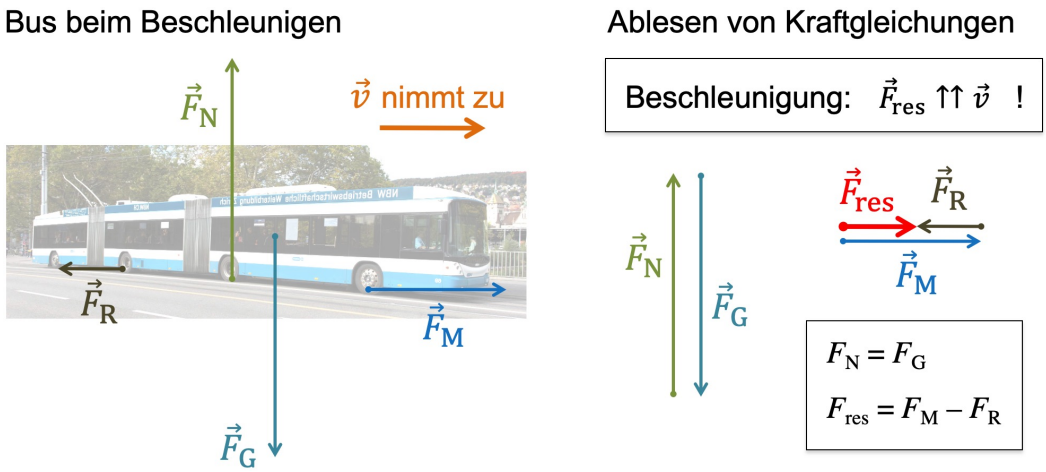
Zugkräfte $\vec{F}_{\mathrm{Z}}$: Zugkräfte treten auf, wenn mit Händen, Haken, Seilen oder sonst irgendwie an einem Gegenstand gezogen wird. Die Ausrichtung von Seilen, Schnüren, Fäden, etc. zeigt einem direkt die Kraftrichtung, in welche gezogen wird.

Antriebs- oder Motorenkräfte $\vec{F}_{\mathrm{M}}$: Autos übertragen Kräfte auf die Strasse, mit welchen sie sich aufgrund von Haftreibung in Vorwärtsrichtung abstossen können. Solche Kräfte bezeichnen wir ganz einfach als Antriebs- oder Motorenkräfte.

3.10 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus

Werfen wir zur Verdeutlichung des bisher Gesagten einen ausführlicheren Blick auf unser Beispiel mit dem VBZ-Bus. Wir gehen die Bewegungsabschnitte nacheinander durch:

- **Bewegungsabschnitt 1: Gleichmässige Beschleunigung**



Der Bus beschleunigt in Vorwärtsrichtung. Gemäss Aktionsprinzip muss er dazu eine resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ in Fahrtrichtung erfahren. Dabei sorgt die Motorenkraft $\vec{F}_{\mathrm{M}}$ für den Antrieb, während die Rollreibung $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ der Bewegung entgegenwirkt. (Einen allfälligen Luftwiderstand $\vec{F}_{\mathrm{L}}$ wollen wir hier vernachlässigen.)

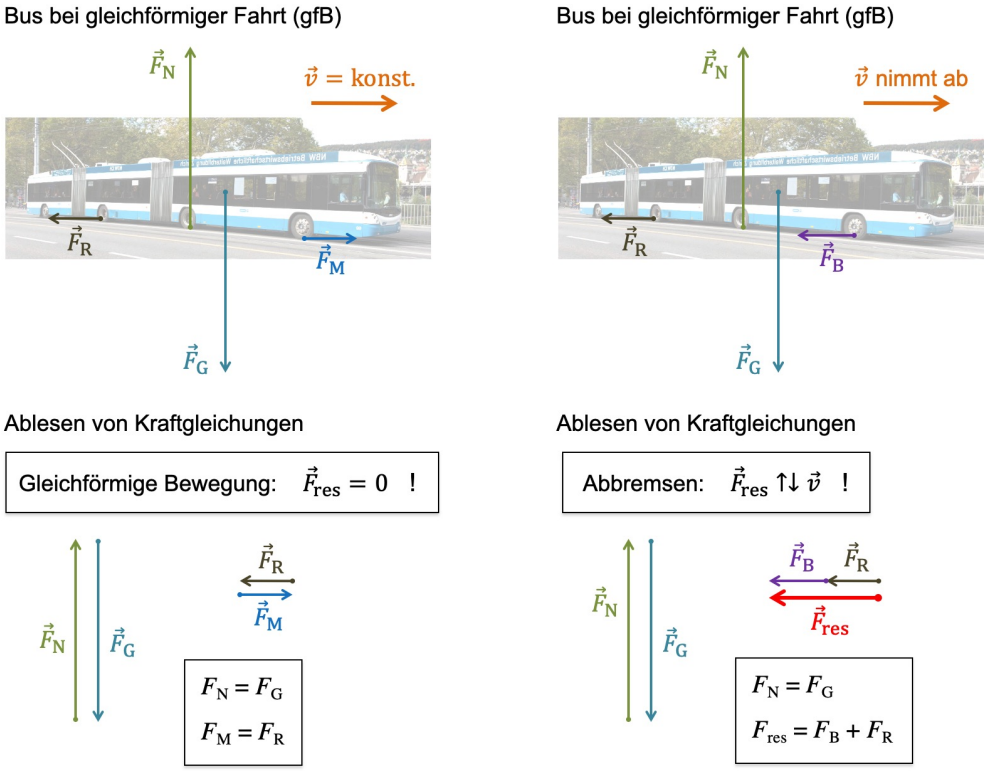
Für die resultierende Kraft ergibt sich gemäss dem Aktionsprinzip aus der Busmasse und der in Abschnitt 2.7 bestimmten Beschleunigung von $1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$:

$$F_{\mathrm{res}} = m \cdot a = 26\,000\,\mathrm{kg} \cdot 1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 46\,540\,\mathrm{N} \approx 46.5\,\mathrm{kN}$$

Die Kräfteskizze oben erklärt, dass die Kraft F_{M} des Motors einerseits für die Beschleunigung der Masse sorgt ($\rightarrow F_{\mathrm{res}}$), andererseits aber auch die Reibungskraft F_{R} kompensiert. Daraus folgt mit der Reibungskraft von Seite 27:

$$F_{\mathrm{M}} = F_{\mathrm{res}} + F_{\mathrm{R}} = 46.5\,\mathrm{kN} + 1.9\,\mathrm{kN} = 48.4\,\mathrm{kN} \simeq 48\,\mathrm{kN}$$

Ein solches Resultat kann man stets mit der Gewichtskraft einer bestimmten Masse vergleichen, damit man sich etwas vorstellen kann. $48\,\mathrm{kN}$ entsprechen der Gewichtskraft von etwa $4800\,\mathrm{kg}$ Masse. Der Bus muss also ganz ordentlich ziehen!



- **Bewegungsabschnitt 2: Gleichförmige Bewegung**

  Fährt der VBZ-Bus mit konstanter Geschwindigkeit, so muss er insgesamt kräftefrei sein. Daher wissen wir, dass sich in der Skizze oben links die Kräfte sowohl in horizontaler, als auch in vertikaler Richtung gegenseitig aufheben müssen. Der Busmotor muss also eine Kraft erzeugen, die vom Betrag her genau der Reibungskraft F_R entspricht:

  $$F_M = F_R = 1.9\,\text{kN}$$

- **Bewegungsabschnitt 3: Gleichmässiges Abbremsen**

  Beim Abbremsen wirken nur Kräfte entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung auf den Bus (vgl. oben rechts). Wie bei der Beschleunigung, so lässt sich auch hier über das Aktionsprinzip die resultierende Kraft bestimmen ($a = 2.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$):

  $$F_{res} = m \cdot a = 26\,000\,\text{kg} \cdot 2.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 65\,000\,\text{N} = 65\,\text{kN}$$

  Diese resultierende Kraft F_{res} setzt sich aus der Rollreibung F_R und der Bremskraft F_B der Räder zusammen. Für Letztere folgt nun:

  $$F_B = F_{res} - F_R = 65\,\text{kN} - 1.9\,\text{kN} \simeq 63\,\text{kN}$$

Kräfte in unterschiedlichen Raumrichtungen

In vielen Situationen treten ausschliesslich Kräfte in senkrecht zueinander stehenden Raumrichtungen auf. In solchen Fällen lassen sich direkt Kraftgleichungen aus der Kräfteskizze ablesen.

Das ist in allen drei Bewegungsabschnitten des VBZ-Busses der Fall. In vertikaler Richtung heben sich $\vec{F}_N$ und $\vec{F}_G$ jeweils gegenseitig auf. Horizontal muss sich eine Gleichung ergeben, die im Falle des schneller oder langsamer Werdens auch $\vec{F}_{res}$ mit einbezieht.

Die vertikalen und die horizontalen Kräfte können aber eben vollständig losgelöst voneinander betrachtet und in eigenen Gleichungen miteinander verknüpft werden.

3.11 "Alle Körper fallen gleich schnell"

Wirkt auf einen Körper ausschliesslich die Gewichtskraft F_{G}, so bezeichnen wir diese Kräftesituation als **freien Fall**. Er wird in guter Näherung realisiert, wenn sich ein Gegenstand ohne Kontakt zu anderen Gegenständen durch die Luft bewegt und der Luftwiderstand vernachlässigbar klein ist (optimal: Vakuum).

Da im freien Fall einzig die Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ wirkt, ist sie auch gerade gleich der resultierenden Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$.[4] Diese wiederum bestimmt, welche Beschleunigung der Gegenstand erfährt:

$$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{G}} \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot a = m \cdot g \qquad \Rightarrow \qquad a = g$$

Das bedeutet, im freien Fall erfahren alle Körper die gleiche Beschleunigung, nämlich g.

Der Ortsfaktor $\vec{g}$ beschreibt also gleichzeitig die Beschleunigung, die ein Körper erfährt, der einzig und allein unter dem Einfluss der Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ steht:

$$\textbf{Fallbeschleunigung} = \textbf{Ortsfaktor} = \vec{g}$$

Nun könnte man einwenden, dass der Ortsfaktor aber eine ganz andere Einheitenzusammensetzung ($\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$) als eine Beschleunigung ($\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) aufweist. Wie sollen die beiden Grössen dasselbe sein?!

Bei näherer Betrachtung wird allerdings klar, dass diese beiden Einheitenzusammensetzungen identisch sind. Denn die Krafteinheit Newton wird aufgrund des Aktionsprinzips definiert: $\mathrm{N} := \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Dividieren wir diese Gleichung durch das Kilogramm rechts, so ergibt sich sofort $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Somit halten wir für die Fallbeschleunigung resp. den Ortsfaktor an der Erdoberfläche fest:

$$g = 9.81 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 9.81 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Behalten wir also im Hinterkopf:

"Alle Körper, die ausschliesslich unter dem Einfluss der Gewichtskraft stehen, beschleunigen beim Fallen gleich schnell."

Das verstehen wir innerhalb der Newton'schen Mechanik sogar noch ein wenig besser: Ein Körper mit einer grossen Masse ist sowohl schwerer, als auch träger als ein Körper mit einer geringen Masse. Schwere und Trägheit kompensieren sich gerade, so dass beide Körper im freien Fall die gleiche Beschleunigung g erfahren.[5]

3.12 Erläuterungen zum Wechselwirkungsprinzip

Das 3. Newtonsche Axiom, also das Wechselwirkungsprinzip, besagt, dass Kräfte nicht einzeln vorkommen können, sondern stets paarweise auftreten.

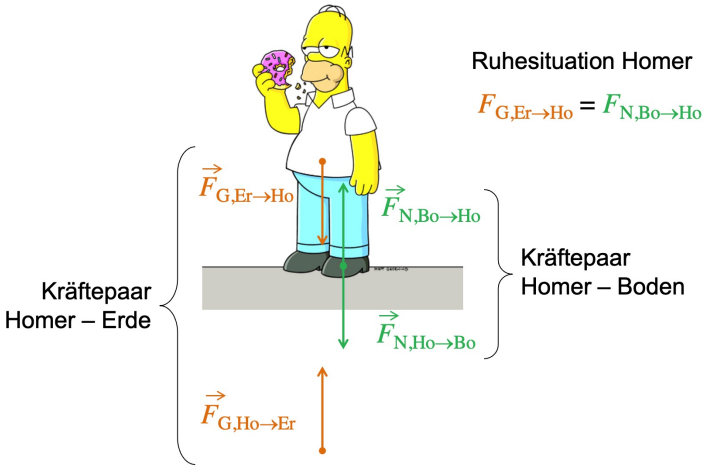
Allerdings wirken Kraft und **Gegenkraft** nicht auf denselben Körper. Deshalb ist das Prinzip nicht so wichtig, wenn man sich nur für die Bewegung eines einzelnen Körpers interessiert. Entscheidend wird das Prinzip erst, wenn man ein ganzes System von Körpern untersucht.

Hier seien nun einfach zwei Beispiele von "actio = reactio" angeführt, damit wir uns etwas Konkreteres unter dem Wechselwirkungsprinzip vorstellen können.

[4] Das gilt ganz allgemein: Wenn nur eine einzige Kraft F auf einen Körper wirkt, dann ist die resultierende Kraft eben immer gleich dieser Kraft: $\vec{F}_{\mathrm{res}} = F$.

[5] Innerhalb der Newton'schen Mechanik gibt es allerdings keine Erklärung dafür, weshalb die Schwere eines Körpers auch gerade seiner Trägheit entspricht. Es wäre innerhalb dieser Theorie durchaus denkbar, dass ein Körper sehr schwer, aber kaum träge ist oder umgekehrt.

Auf dem Boden stehen



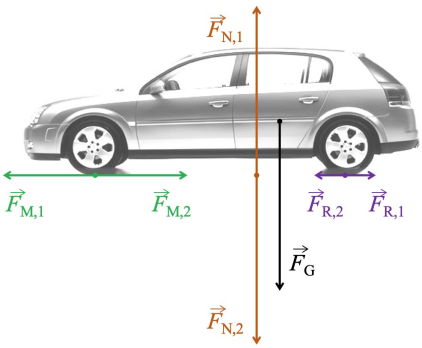
Homer steht in Ruhe auf horizontalem Boden. Auf ihn wirkt erstens die Gewichtskraft der Erde $\vec{F}_{G,Er\to Ho}$ nach unten, zweitens die Normalkraft des Bodens $\vec{F}_{N,Bo\to Ho}$ nach oben. Da er selber in Ruhe ist, heben sich diese beiden Kräfte gegenseitig auf.

$\vec{F}_{G,Er\to Ho}$ und $\vec{F}_{N,Bo\to Ho}$ sind allerdings keine Gegenkräfte im Newton'schen Sinne! Gewichtskraft und Normalkraft könnten durchaus verschieden sein. Z.B., wenn Homer in einem Lift stehen würde, der gerade am anfahren oder abbremsen wäre.

Die eigentliche Gegenkraft zu $\vec{F}_{G,Er\to Ho}$ ist die von Homer erzeugte Gewichtskraft auf die Erde $\vec{F}_{G,Ho\to Er}$. Sie setzt im Erdmittelpunkt an. Wegen ihrer riesigen Masse bleibt die Erde davon allerdings praktisch unbeeinflusst – ihre Trägheit ist einfach zu gross.

Die Gegenkraft von $\vec{F}_{N,Bo\to Ho}$ ist die Normalkraft $\vec{F}_{N,Ho\to Bo}$ von Homer auf den Boden. Der Boden kann Homer nicht tragen ohne dabei selber belastet zu werden.

Die Belastung des Strassenbelags



Auto beschleunigt

$F_{res} = F_{M,1} - F_{R,1}$

$\vec{F}_G$ = Gewichtskraft der Erde auf das Auto
$\vec{F}_{N,1}$ = Normalkraft des Bodens auf das Auto
$\vec{F}_{N,2}$ = Normalkraft des Autos auf den Boden
$\vec{F}_{M,1}$ = Motorenkraft des Bodens auf das Auto
$\vec{F}_{M,2}$ = Motorenkraft des Autos auf den Boden
$\vec{F}_{R,1}$ = Rollreibungskraft des Bodens auf das Auto
$\vec{F}_{R,2}$ = Rollreibungskraft des Autos auf den Boden

"actio = reactio"

$\vec{F}_{M,1} = -\vec{F}_{M,2}$
$\vec{F}_{N,1} = -\vec{F}_{N,2}$
$\vec{F}_{R,1} = -\vec{F}_{R,2}$

Obige Kräfteskizze zeigt die Beschleunigungssituation eines Autos, wobei auch die vom Auto auf die Strasse wirkenden Kräfte eingezeichnet sind. (Die Gegenkraft zu $\vec{F}_G$ ist allerdings nicht eingezeichnet. Es wäre die Gewichtskraft, welche die Erde aufgrund des Autos erfahren würde. In der Skizze würde sie im Erdmittelpunkt ansetzen.)

Vertikal wirkt die Normalkraft des Autos und damit indirekt seine Gewichtskraft auf die Strasse. Horizontal muss die Strasse zusätzlich die Rollreibungs- und vor allem die Motorenkraft des Autos – welche eigentlich eine Haftreibungskraft ist – aushalten. Dies ist eine massive Belastung des Belags, da diese Kräfte nicht "nur" den Boden einzudrücken versuchen, sondern vor allem eben in horizontaler Richtung wirken.

Auch beim Abbremsen gibt es eine Haftreibung zwischen Pneus und Boden, welche wiederum zu grosser horizontaler Belastung führt.

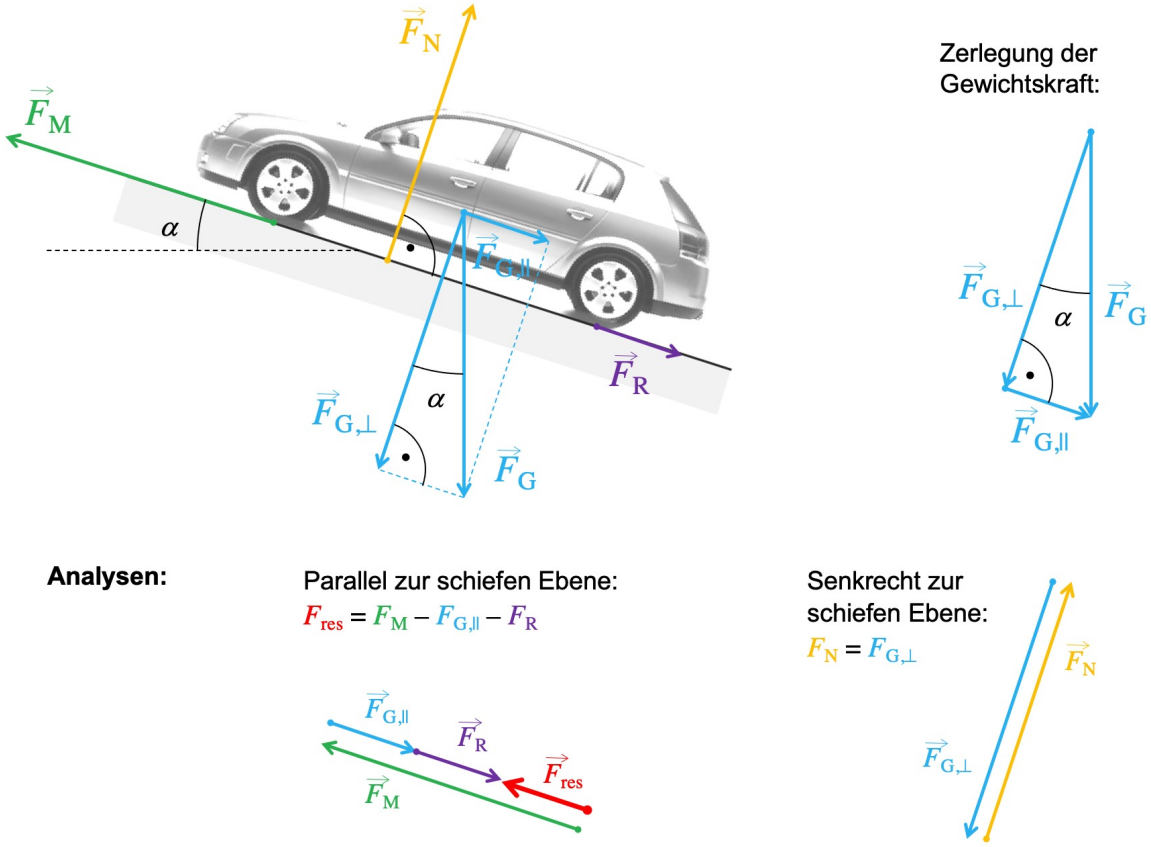
3.13 Die Zerlegung der Gewichtskraft auf einer schiefen Ebene

Im Abschnitt 3.2 auf Seite 21 wurde gezeigt, wie einzelne auf einen Körper wirkende Kräfte zur resultierenden Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ zusammenzusetzen sind. Erst $\vec{F}_{\text{res}}$, also das Zusammenwirken aller einzelnen Kräfte, bestimmt, wie die Bewegung eines Körpers verläuft. $\vec{F}_{\text{res}}$ gibt die Richtung der Beschleunigung vor und bestimmt via $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m}$ auch über deren Betrag.

Erst $\vec{F}_{\text{res}}$ ist also an die Beschleunigung $\vec{a}$ gekoppelt. Deshalb darf man umgekehrt **Kraftzerlegungen** vornehmen. D.h., man darf den zu einer bestimmten Kraft gehörenden Kraftpfeil durch mehrere andere, im Prinzip beliebig ausgerichtete Pfeile ersetzen, solange die Pfeilkette, welche diese neuen Kraftpfeile bilden, vom Anfangspunkt des ursprünglichen Pfeils zu dessen Endpunkt führt.

Solche Kraftzerlegungen helfen, Situationen besser zu verstehen und zu analysieren, ändern aber nichts an der physikalischen Situation.

Ganz typisch ist z.B. die **Zerlegung der Gewichtskraft auf einer schiefen Ebene**. Betrachten wir als Beispiel dazu ein beschleunigendes Auto auf einer ansteigenden Strasse (= schiefe Ebene):



Die Antriebskraft $\vec{F}_{\text{M}}$ wirkt parallel zur Strasse in Aufwärtsrichtung, währenddem die Rollreibungskraft $\vec{F}_{\text{R}}$ parallel zur Strasse in Abwärtsrichtung der Bewegung entgegenwirkt. Die Normalkraft $\vec{F}_{\text{N}}$ der Strasse wirkt senkrecht von dieser weg.

Um die senkrecht nach unten zeigende Gewichtskraft $\vec{F}_{\text{G}}$ mit diesen anderen Kräften zu verrechnen, zerlegt man sie in eine Parallel- und eine Senkrechtkomponente $\vec{F}_{\text{G},\parallel}$ und $\vec{F}_{\text{G},\perp}$. Ausserdem verdeutlicht diese Zerlegung die physikalische Situation:

- Nur die Gewichtskraft-Komponente $\vec{F}_{\text{G},\perp}$ senkrecht zur Strasse wirkt gegen diese. Die Strasse muss also nicht die gesamte Gewichtskraft mit ihrer Normalkraft kompensieren, sondern eben nur die **Senkrecht-Komponente** $\vec{F}_{\text{G},\perp} \Rightarrow F_{\text{N}} = F_{\text{G},\perp}$.

- Der andere Teil der Gewichtskraft ist die Komponente $\vec{F}_{\mathrm{G},\parallel}$ parallel zur Strasse. Diese Komponente sorgt normalerweise für die Abwärtsbeschleunigung auf einer schiefen Unterlage, z.B. beim Skifahren oder Snowboarden. Man bezeichnet sie gerne auch als **Hangabtriebskraft**.

  Die Motorenkraft $\vec{F}_{\mathrm{M}}$ muss diese **Parallel-Komponente** $\vec{F}_{\mathrm{G},\parallel}$ der Gewichtskraft und zudem auch noch die Reibung $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ überkompensieren, damit eine resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ in Aufwärtsrichtung entsteht und das Auto tatsächlich beschleunigen kann $\Rightarrow F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{M}} - F_{\mathrm{G},\parallel} - F_{\mathrm{R}}$.

Natürlich nützt diese Zerlegung nur etwas, wenn man die Komponenten der Gewichtskraft auch berechnen kann. Bei vorgegebenem Steigungswinkel α ist dies allerdings kein Problem. Man muss lediglich etwas Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck anwenden, um die Kraftkomponenten $\vec{F}_{\mathrm{G},\parallel}$ und $\vec{F}_{\mathrm{G},\perp}$ auf die Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ zurückzuführen. Es ist:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{F_{\mathrm{G},\parallel}}{F_{\mathrm{G}}} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{F_{\mathrm{G},\perp}}{F_{\mathrm{G}}} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{G},\perp} = F_{\mathrm{G}} \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Komponenten der Gewichtkraft auf der schiefen Ebene

Auf einer schiefen Ebene lässt sich die Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ eines Objektes in eine Komponente $\vec{F}_{\mathrm{G},\parallel}$ parallel zur schiefen Ebene und in eine Komponente $\vec{F}_{\mathrm{G},\perp}$ senkrecht zu dieser unterteilen. Für die Beträge der beiden Gewichtskraft-Komponenten gilt:

$$F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha \tag{20}$$

$$F_{\mathrm{G},\perp} = F_{\mathrm{G}} \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha \tag{21}$$

Dabei ist α der Steigungswinkel der schiefen Ebene.

Nebenbei: Häufig wird bei Neigungen von Strassen nicht der **Steigungswinkel** α, sondern vielmehr die **Steigung** in Prozenten angegeben:



Dieses Schild bedeutet beispielsweise, dass die Strasse pro $100\,\mathrm{m}$ horizontaler Strecke (quasi in den Boden hinein) um $12\,\mathrm{m}$ ansteigt. Aus der Trigonometrie folgt somit für den Steigungswinkel α:

$$\tan\alpha = 12\,\% = 0.12 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan 0.12 = 6.84^\circ$$

Auf dem Taschenrechner wird in der Regel allerdings nicht arctan (= Arcustangens) für die Umkehrfunktion der Tangensfunktion zu finden sein. Dort steht typischerweise $\tan^{-1}$.