Gymnasium Unterstrass Zürich
Promotion 158b

KLASSISCHE MECHANIK

Alex Gertsch
im Oktober 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalische Grössen und Einheiten **5**
- 1.1 Das SI-Einheitensystem . . . 5
- 1.2 Grössen- und Einheitenübersicht . . . 5
- 1.3 SI-Vorsätze (-Präfixe) und Zehnerpotenzen . . . 6
- 1.4 Konstanten und spezielle Werte . . . 6
- 1.5 Genauigkeit, signifikante Ziffern und Rundungsregeln . . . 6

2 Kinematik geradliniger Bewegungen **9**
- 2.1 Geradlinige Bewegung und Bewegung längs einer Trajektorie . . . 9
- 2.2 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus . . . 10
- 2.3 Die drei Bewegungsdiagramme zur Fahrt des VBZ-Busses . . . 11
- 2.4 Das Zeit-Ort-, Zeit-Weg- oder t-s-Diagramm . . . 12
- 2.5 Die Definition der Geschwindigkeit v . . . 12
- 2.6 Das Zeit-Geschwindigkeits- oder t-v-Diagramm . . . 13
- 2.7 Die Definition der Beschleunigung a . . . 13
- 2.8 Das Zeit-Beschleunigungs- oder t-a-Diagramm . . . 14
- 2.9 Flächen im t-v-Diagramm und im t-a-Diagramm . . . 15
- 2.10 Tipps zum Zeichnen der Diagramme . . . 16
- 2.11 Gleichförmige Bewegung und Durchschnittsgeschwindigkeit . . . 16
- 2.12 Gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit . . . 17
- 2.13 Gleichmässig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit . . . 18
- 2.14 Der freie Fall und die Fallbeschleunigung g . . . 19
- 2.15 Differentialrechnung – ein mathematischer Ausblick . . . 19

3 Dynamik geradliniger Bewegungen **20**
- 3.1 Was ist eine Kraft? . . . 20
- 3.2 Kraftvektoren, resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ und Kräftegleichgewichte . . . 21
- 3.3 Die Newton'schen Axiome . . . 23
- 3.4 Die Gewichtskraft $\vec{F}_{\text{G}}$ und der Ortsfaktor g . . . 25
- 3.5 Die Normalkraft $\vec{F}_{\text{N}}$ . . . 26
- 3.6 Reibungskräfte $\vec{F}_{\text{R}}$ . . . 26
- 3.7 Luftwiderstand $\vec{F}_{\text{L}}$ . . . 28
- 3.8 Die Federkraft $\vec{F}_{\text{F}}$ und das Federgesetz . . . 28
- 3.9 Weitere Kraftarten . . . 29
- 3.10 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus . . . 29
- 3.11 "Alle Körper fallen gleich schnell" . . . 31
- 3.12 Erläuterungen zum Wechselwirkungsprinzip . . . 31
- 3.13 Die Zerlegung der Gewichtskraft auf einer schiefen Ebene . . . 33

4 Kinematik und Dynamik bei Kreisbewegungen **35**
4.1 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus . . . 35
4.2 Die Kinematik der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK) . . . 35
4.3 Die Dynamik der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK) . . . 36
4.4 Die Kräfte bei der Kurvenfahrt des VBZ-Busses . . . 37
4.5 Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen . . . 39
4.6 Kraftangaben als Vielfache des Ortsfaktors . . . 39
4.7 Das Newton'sche Gravitationsgesetz . . . 41
4.8 Kreisbahnen von Himmelskörpern . . . 42

5 Arbeit, Energie und Leistung **44**
5.1 Arbeit, Energie und Leistung beim VBZ-Bus . . . 44
5.2 Die Definition der Arbeit W: "Arbeit ist Kraft mal Weg" . . . 44
5.3 "Der Arbeitsbetrag ist prozessunabhängig!" . . . 46
5.4 Exkurs: Kraftwandler . . . 46
5.5 "Energie ist gespeichertes Arbeitsvermögen" . . . 48
5.6 Hubarbeit W_{Hub} und potentielle Energie E_{pot} . . . 48
5.7 Beschleunigungsarbeit W_{B} und kinetische Energie E_{kin} . . . 49
5.8 Weitere Energieformen . . . 50
5.9 Der Energieerhaltungssatz – allgemein und speziell für die Mechanik . . . 51
5.10 Die Definition der Leistung P: "Leistung ist Energieumsatz pro Zeit" . . . 53
5.11 Das Maschinenschema und der Wirkungsgrad einer Maschine . . . 54
5.12 Energieproblematik und elektrischer Energieverbrauch im Alltag . . . 55

6 Druck und Auftrieb **56**
6.1 Die Dichte von Stoffen . . . 56
6.2 Auflagedruck bei Festkörpern . . . 58
6.3 Druck als innerer Zustand von Flüssigkeiten und Gasen . . . 59
6.4 Druck im Teilchenmodell . . . 59
6.5 Der Schweredruck von Flüssigkeiten . . . 60
6.6 Notizen zum Luftdruck . . . 61
6.7 Gesamtdruck, Druckgleichgewicht, Über- und Unterdruck . . . 61
6.8 Die Auftriebskraft $\vec{F}_{\text{A}}$ . . . 63
6.9 Steigen, Sinken und Schweben . . . 64
6.10 Schwimmende Körper . . . 64
6.11 Herleitung der Formel (36) für den Schweredruck in Flüssigkeiten . . . 65
6.12 Herleitung der Formel (38) für die Auftriebskraft . . . 66

A Formelsammlung **67**
A.1 Kinematik (Bewegungsgleichungen) . . . 67
A.2 Dynamik (Newtonsche Mechanik und Kräfte) . . . 67
A.3 Arbeit, Energie und Leistung . . . 68
A.4 Druck und Auftrieb . . . 68

1 Physikalische Grössen und Einheiten

1.1 Das SI-Einheitensystem

Zu jeder **physikalischen Grösse** gehören **Masseinheiten**, wobei wir uns beliebig viele ausdenken könnten. Strecken kann man in Metern, Foots, Inches, Meilen, Lichtjahren, etc. angeben, Geschwindigkeiten in Metern pro Sekunde, Kilometern pro Stunde, Knoten, Mach, etc.

Um der möglichen Einheitenverwirrung aus dem Weg zu gehen, halten wir uns an ein breit anerkanntes und bewährtes Set von Einheiten, nämlich an das **internationale Einheitensystem (SI)**[1]. In diesem System gibt es **sieben Basiseinheiten**: **Meter m** (Strecke), **Sekunde s** (Zeit), **Kilogramm kg** (Masse), **Ampere A** (Stromstärke), **Kelvin K** (Temperatur), **Mol mol** (Stoffmenge) und **Candela cd** (Lichtstärke). Diese Basiseinheiten werden vom SI genau definiert. D.h., das SI legt präzise fest, was unter der jeweiligen Basiseinheit zu verstehen ist.[2]

Alle **Grundeinheiten** zu anderen Grössen setzen sich aus den sieben Basiseinheiten zusammen. Für die Mechanik werden allerdings nur der Meter, die Sekunde und das Kilogramm benötigt.

Das SI vereinfacht das Rechnen: Setzt man bei einer Berechnung lauter SI-Grundeinheiten ein, so wird die berechnete Grösse in ihrer SI-Grundeinheit herauskommen!

1.2 Grössen- und Einheitenübersicht

Grösse/Dimension	Symbol	SI-Grundeinheit	Andere Einheiten
Strecke, Länge, Radius, etc.	l, s, r, etc.	**Meter m**	–
Fläche	A	Quadratmeter m^2	–
Volumen	V	Kubikmeter m^3	$1\,\mathrm{lit.} = 0.001\,\mathrm{m}^3$
Zeit	t	**Sekunde s**	$1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min} = 3600\,\mathrm{s}$ $1\,\mathrm{d} = 24\,\mathrm{h} = 86\,400\,\mathrm{s}$
Geschwindigkeit	v	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Beschleunigung, Ortsfaktor	a, g	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$	–
Masse	m	**Kilogramm kg**	$1\,\mathrm{t} = 1000\,\mathrm{kg}$
Kraft	F	Newton $\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	–
Arbeit, Energie	W, E	Joule $\mathrm{J} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$	$1\,\mathrm{kWh} = 3\,600\,000\,\mathrm{J}$ $1\,\mathrm{kcal} = 4182\,\mathrm{J}$
Leistung	P	Watt $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$	$1\,\mathrm{PS} = 735.5\,\mathrm{W}$
Dichte	ϱ	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
Druck	p	Pascal $\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$	$1\,\mathrm{bar} = 100\,000\,\mathrm{Pa}$

[1] SI = *système international* (frz.) = internationales und wissenschaftlich festgelegtes Masseinheitensystem.

[2] Das stimmt heute nicht mehr ganz so. Im SI werden seit 2018 nicht mehr die Basiseinheiten definiert, sondern stattdessen die Werte von sieben fundamentalen Naturkonstanten exakt festgelegt. Es ist für die Gymnasialstufe vom Verständnis her aber sinnvoll, zunächst immer noch mit dem Konzept der Basiseinheiten zu arbeiten.

1.3 SI-Vorsätze (-Präfixe) und Zehnerpotenzen

Auch sehr grosse und sehr kleine Werte muss man übersichtlich notieren können. Dafür hat das SI sogenannte **Vorsätze** oder **Präfixe** eingeführt. Hier die Übersicht:

Präfix = Vorsatz		**Vergrösserungs- / Verkleinerungsfaktor**	**Zehnerpotenz**	**Beispiel**
E	Exa	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}	1 EJ = 1 Exajoule
P	Peta	1 000 000 000 000 000	10^{15}	1 PJ = 1 Petajoule
T	**Tera**	1 000 000 000 000	10^{12}	1 TB = 1 Terabyte
G	**Giga**	1 000 000 000	10^{9}	1 GJ = 1 Gigajoule
M	**Mega**	1 000 000	10^{6}	1 MV = 1 Megavolt
k	**Kilo**	1 000	10^{3}	1 kN = 1 Kilonewton
d	**Dezi**	0.1	10^{-1}	1 dl = 1 Deziliter
c	**Zenti**	0.01	10^{-2}	1 cm = 1 Zentimeter
m	**Milli**	0.001	10^{-3}	1 mW = 1 Milliwatt
µ	**Mikro**	0.000 001	10^{-6}	1 µs = 1 Mikrosekunde
n	**Nano**	0.000 000 001	10^{-9}	1 nm = 1 Nanometer
p	Piko	0.000 000 000 001	10^{-12}	1 pg = 1 Pikogramm
f	Femto	0.000 000 000 000 001	10^{-15}	1 fm = 1 Femtometer
a	Atto	0.000 000 000 000 000 001	10^{-18}	1 am = 1 Attometer

Alle fett gedruckten Vorsätze (von **Tera** bis **Nano**) sollten uns stets geläufig sein!

1.4 Konstanten und spezielle Werte

In den Naturwissenschaften gibt es gewisse feste Werte, die entweder eine fundamentale Bedeutung haben, oder einfach sehr häufig vorkommen, oder als Referenzgrössen bei der Einschätzung eines Resultates nützlich sind. Ab sofort auswendig kennen sollten sie die folgenden dieser **Konstanten**:

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c \approx 300\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$
Schallgeschwindigkeit in Luft	$v_{\mathrm{Schall}} \approx 340\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Ortsfaktor resp. **Fallbeschleunigung** an der Erdoberfläche (Schweiz)	$g = 9.81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Ungefährer **Luftdruck**	$p_{\mathrm{Luft}} \approx 1.0\,\mathrm{bar}$
Dichte von Luft	$\varrho_{\mathrm{Luft}} \approx 1.3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

1.5 Genauigkeit, signifikante Ziffern und Rundungsregeln

In Messungen erhobene Werte sind immer **ungenau**. Einerseits weist jede Messvorrichtung eine Genauigkeitsgrenze auf, andererseits treten beim Messen unvermeidbar Fehler auf. Diese lassen sich zwar durch Sorgfalt und bessere Messvorrichtungen verkleinern, aber es bleibt eine Tatsache, dass sämtliche Messdaten zwangsläufig mit einer Unsicherheit behaftet sind. Immer gibt es einen Unterschied zwischen dem gemessenen und dem "korrekten", "tatsächlichen" oder "wahren" Wert. Dieser inhärenten Ungenauigkeit müssen wir in einer "exakten" Naturwissenschaft wie der Physik Rechnung tragen!

Auf Forschungsebene ergänzt man Zahlenwerte durch eine **Fehlerangabe** mittels eines ± (sprich: "plusminus"). Möchte ich z.B. die Masse eines kleinen Metallstücks bestimmen und misst meine Waage auf $0.1\,\mathrm{g}$ genau, so schreibt man für den Messwert:

$$m = (34.6 \pm 0.1)\,\mathrm{g}$$

Es gibt genaue Regeln, wie mit solchen Angaben inkl. Fehler umzugehen ist, wenn daraus eine andere Grösse zu berechnen ist. Diese Regeln sind mathematisch etwas anspruchsvoller und für ein schnelles Rechnen ungeeignet, sodass wir eine vereinfachte Variante benutzen wollen: die Methode der **signifikanten Ziffern (s.Z.)**. Für eine ungefähre Genauigkeitsangabe genügt sie bestens.

> **Mit den signifikanten Ziffern einer Zahl meinen wir grundsätzlich alle ihre Ziffern!** (Es geht also **nicht** um die Nachkommastellen.)
>
> **Ausnahmen:** Vorangehende Nullen zählen niemals als signifikante Ziffern, nachfolgende Nullen nur dann, wenn die Zahl ein Dezimalkomma enthält.

Beispiele: $245.30\,\mathrm{N} \rightarrow 5$ s.Z. $\qquad 2600\,\mathrm{m} \rightarrow 2$ s.Z. $\qquad 0.003\,148\,\mathrm{kg} \rightarrow 4$ s.Z.

Unter Verwendung signifikanter Ziffern schreiben wir für die Masse unserer Münze von oben nun einfach $34.6\,\mathrm{g}$. Die letzte angegebene Ziffer wird automatisch als die Stelle interpretiert, auf der der Fehler resp. die Unsicherheit liegt.

Abmachung: Im Zweifelsfall kennzeichnen wir die letzte signifikante Ziffer explizit durch Unterstreichung. Soll z.B. die erste Null in $2600\,\mathrm{m}$ ebenfalls signifikant sein, so schreiben wir einfach $26\underline{0}0\,\mathrm{m}$. Und $2600\,\mathrm{m}$ hätte folglich 4 signifikante Ziffern.

Wissenschaftliche Schreibweise: Auf der sicheren Seite ist man mit der **wissenschaftlichen Schreibweise** unter Verwendung von Zehnerpotenzen: $2.60 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$ hat unmissverständlich 3 s.Z.. Der Nachteil dieser Schreibweise liegt darin, dass man zweimal überlegen muss, wie gross diese Angabe denn nun tatsächlich ist. Eine passende Wahl der Einheit schafft Abhilfe. Am besten geben wir diese Länge eben mit $2.60\,\mathrm{km}$ an.

Rechnen mit signifikanten Ziffern: Es ist unsinnig, wenn das Resultat einer Rechnung genauer ist als die Angaben, welche eingesetzt wurden. Daher gelten die folgenden Regeln:

- **Grundsätzlich gilt:**
  - **Endresultate werden auf so viele s.Z. wie die ungenaueste Angabe gerundet.**
  - **Bei Zwischenresultaten wird mindestens 1 s.Z. mehr angegeben.**
- **Weiter befolgen wir bei einer Addition oder Subtraktion: Die Dezimalstelle, auf der die Unsicherheit des Resultates liegt, ist vorgegeben durch den Summanden, der seine Unsicherheit auf der grössten Dezimalstelle hat.**

Beispiel 1: Während der Zeitspanne $t = 25.5\,\mathrm{s}$ fährt ein Auto gemäss Tachoanzeige mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Wie weit kommt es dabei? Zunächst sollten die $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ umgerechnet werden. Die Angabe $v = 52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ beinhaltet 2 s.Z.. Unser Zwischenresultat – die Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ – notieren wir deswegen mit mindestens 3 s.Z.:

$$v = 52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 52 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 14.44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Es folgt für die zurückgelegte Strecke

$$s = v \cdot t = 14.44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 25.5\,\mathrm{s} = 368.33\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{370\,\mathrm{m}}}$$

Wir runden auf 2 s.Z., weil die ungenauere Anfangsangabe ($52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$) nur 2 s.Z. aufweist.

Beispiel 2: Ich habe die Masse eines grossen Steins mit einer Waage auf $14.65\,\mathrm{kg}$ bestimmt. Die Masse eines zweiten, deutlich kleineren Steins habe ich auf einer anderen (feineren) Waage gemessen: $386.7\,\mathrm{g}$. Wie gross ist die Masse beider Steine zusammen? Hier die Addition:

$$\begin{array}{rr} & 14.6\underline{5}\ \ \mathrm{kg} \\ + & 0.3867\ \mathrm{kg} \\ \hline & 15.0\underline{3}67\ \mathrm{kg} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{15.04\,\mathrm{kg}}}$$

Die Unsicherheit des Resultates liegt auf der Dezimalstelle, wo die erste Massenangabe ihre letzte s.Z. aufweist. Auf diese Dezimalstelle, also auf die zweite nach dem Komma, muss gerundet werden. Das Resultat entspricht der Anzeige der ersten Waage, wenn wir beide Steine gleichzeitig auflegen.

Beispiel 3: Wir berechnen die Gesamtoberfläche einer Holzplatte aus ihren Massen $l = 140.0\,\mathrm{cm}$, $b = 65.0\,\mathrm{cm}$ und $h = 3.7\,\mathrm{cm}$. Jeweils zwei gegenüberliegende Seiten der Platte sind gleich gross. Für diese doppelten Flächen erhalten wir:

Ober- und Unterseite:	$2 \cdot l \cdot b = 2 \cdot 140.0\,\mathrm{cm} \cdot 65.0\,\mathrm{cm} = 18\underline{2}00\,\mathrm{cm}^2$
Doppelte Längsseitenfläche:	$2 \cdot l \cdot h = 2 \cdot 140.0\,\mathrm{cm} \cdot 3.7\,\mathrm{cm} = 1\underline{0}36\,\mathrm{cm}^2$
Doppelte Kopfseitenfläche:	$2 \cdot l \cdot h = 2 \cdot 65.0\,\mathrm{cm} \cdot 3.7\,\mathrm{cm} = 4\underline{8}1\,\mathrm{cm}^2$

Dabei habe ich jeweils die Ziffer unterstrichen, auf der die Unsicherheit des Resultates liegt. Gibt man beispielsweise die Summe der beiden Kopfseitenflächen als eigenes Resultat an, so würde sie $480\,\mathrm{cm}^2$ betragen, denn die Höhe ($h = 3.7\,\mathrm{cm}$) hat im Gegensatz zur Breite ($b = 65.0\,\mathrm{cm}$) nur 2 s.Z., sodass dieses Resultat eben auf 2 s.Z. gerundet werden müsste.

Nun möchten wir aber die Summe dieser drei Zwischenresultate bilden. Dabei taucht die Unsicherheit bei den ersten beiden Werten bereits auf der Hunderterstelle auf, sodass wir das Schlussresultat auf diese Dezimalstelle zu runden haben:

$$\begin{array}{rr} & 18\underline{2}00\ \mathrm{cm}^2 \\ + & 1\underline{0}36\ \mathrm{cm}^2 \\ + & 4\underline{8}1\ \mathrm{cm}^2 \\ \hline & 19\underline{7}17\ \mathrm{cm}^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{19\,700\,\mathrm{cm}^2}}$$

Wir bemerken: Obwohl alle Messungen auf Millimeter genau erhoben wurden, können wir die Gesamtoberfläche unserer Holzplatte nur auf $100\,\mathrm{cm}^2$, also auf $1\,\mathrm{dm}^2$ genau angeben! Das ist doch erstaunlich und zeigt, wie wichtig die Mitführung der Genauigkeit ist. Ansonsten ergeben sich scheinbare Genauigkeiten, die schlichtweg falsch sind! Aufgrund der Messgenauigkeit resp. -ungenauigkeit kann diese Plattenoberfläche eben nicht genauer angegeben werden!

Exakte Angaben: Manche Angaben sind **exakt**, also als Wert mit unendlich vielen signifikanten Ziffern aufzufassen. Hier ein paar Beispiele, die zeigen sollen, was damit gemeint ist:

- **Zählangaben:** Z.B. sind in einem Tram genau 48 Menschen, an einem normalen Würfel gibt es exakt 6 Seitenflächen und eine Woche beinhaltet genau 7 Tage.
- **Mathematische Angaben:** In der Mathematik sind in der Regel alle Zahlen exakt gemeint, so z.B. die 3 und die 7 im Bruch $\frac{3}{7}$ sowie der Bruch selber. Dasselbe gilt z.B. auch für $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$, etc. Ausserdem gibt es wichtige mathematische Zahlenkonstanten, die wir ebenfalls exakt behandeln. Dazu gehören z.B. π ($\approx 3.141\,593$) und e ($\approx 2.718\,282$).
- **Einheitenumrechnungen:** Umrechnungsangaben sind stets exakt gemeint. $1\,\mathrm{km}$ beinhaltet per Definition exakt $1000\,\mathrm{m}$. Diese Zahl 1000 ist unendlich genau!

2 Kinematik geradliniger Bewegungen

⇒ Mathematische Beschreibung der Bewegung längs einer vorgegebenen Bahn

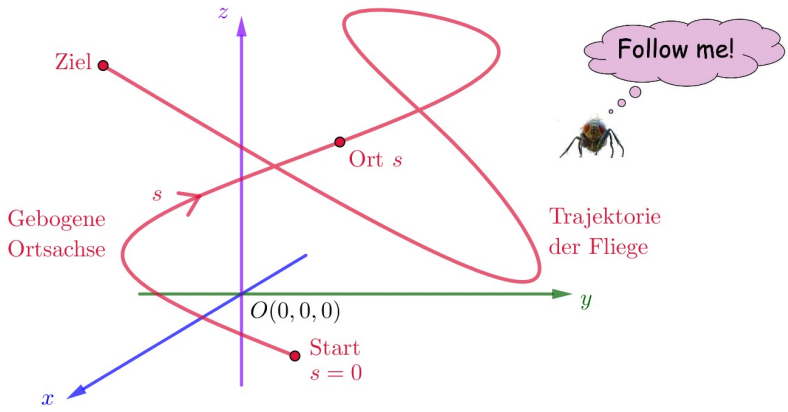
Als **Kinematik** bezeichnen wir den Teilbereich der Mechanik, der sich damit beschäftigt Bewegungsabläufe in Mathematik zu fassen. Erst in der sogenannten **Dynamik** wird gefragt, weshalb eine Bewegung gerade so abläuft, wie sie das tut. Die Kurzantwort wird lauten: "Kräfte steuern Bewegungen". Im Moment reden wir aber eben noch nicht über Kräfte, sondern wollen erst Bewegungen mittels mathematischer **Funktionen** beschreiben.

2.1 Geradlinige Bewegung und Bewegung längs einer Trajektorie

Stellen wir uns zunächst eine möglichst einfache Bewegung im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ vor, z.B. einen Zug, der auf einem schnurgeraden Streckenabschnitt unterwegs ist. Wir wollen zulassen, dass der Zug schneller oder langsamer wird, aber seine Bewegung verlaufe strikt längs einer Gerade. In diesem Fall sprechen wir von einer **geradlinigen Bewegung**.

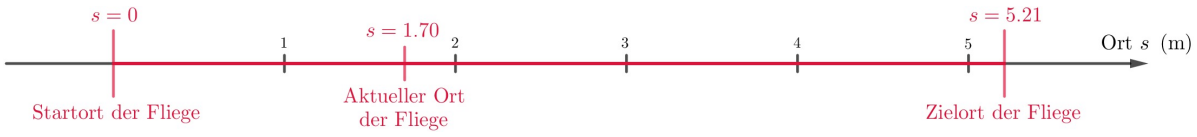
Wenn wir unser kartesisches Koordinatensystem nun so legen, dass die x-Achse genau längs der Bewegungsgerade liegt und folglich y- und z-Achse senkrecht dazu stehen, dann behält der Zug während seiner Bewegung ständig dieselbe y- und dieselbe z-Koordinate. Nur die x-Koordinate verändert sich und ist interessant. Die anderen beiden können wir getrost ausblenden. Somit brauchen wir zur Beschreibung des Ortes nur noch eine einzige Raumdimension und nicht mehr alle drei. Das macht die Sache deutlich einfacher!

Allerdings bilden solche echt geradlinigen Bewegungen in der Realität die Ausnahme. Die allermeisten Bewegungen beinhalten nun mal Kurven. Stellen wir uns z.B. eine Fliege vor, die in unserem Schulzimmer herumsaust. Sie startet irgendwo und landet an einem anderen Ort, nachdem sie einen komplizierten und durchaus kurvenreichen Flug hinter sich hat:



Die Flugbahn der Fliege bezeichnen wir als **Trajektorie** (sprich: "Trajektori-e"). Längs dieser Flugbahn können wir messen, wie weit die Fliege bereits geflogen ist. Wir legen eine gebogene, aber als Objekt eben eindimensionale **Ortsachse** auf die Trajektorie und legen ihren Nullpunkt der Einfachheit halber in den Startort der Fliege.

Auf diese Weise blenden wir die Kurven der Flugbahn aus. Sie sind aus der Ortsangabe s nicht mehr ersichtlich. So vereinfachen wir die komplizierte, dreidimensionale Bewegung zu einer quasi geradlinigen, also eindimensionalen Bewegung:



Ist diese Vereinfachung zu einer Ortsachse längs der Trajektorie nicht zu einschränkend? Im ersten Moment lautet die Antwort: Nein, für unsere nächsten Schritte ist diese Einschränkung genau richtig. Wir wollen uns nämlich damit beschäftigen, wie wir das schneller und das langsamer Werden von Objekten mathematisch beschreiben, und dabei geht es nicht um die Kurven, sondern eben nur um die Bewegung längs der Trajektorie.

Natürlich werden wir uns später für Kurven interessieren, dann müssen wir die gesamte Dreidimensionalität wieder berücksichtigen.

2.2 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus

Zur konkreten Veranschaulichung erläutere ich in diesem Skript viele Überlegungen direkt am Beispiel eines **VBZ-Busses** in Zürich:



Längs seiner Trajektorie betrachten wir die Bewegung des Busses von der Haltestelle X zur Haltestelle Y. Sie setzt sich (idealisiert) aus drei Teilen (= **Bewegungsabschnitte**) zusammen:

1. **Losfahren = Gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit (gmbBoA)**

   Der Bus beschleunigt. Nach $7.0\,\mathrm{s}$ hat er seine Fahrtgeschwindigkeit von $45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ erreicht.

2. **Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit = Gleichförmige Bewegung (gfB)**

   Der Bus fährt während den folgenden $10\,\mathrm{s}$ mit seiner erreichten Geschwindigkeit weiter. Für die späteren Betrachtungen empfiehlt sich eine Umrechnung von $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$:

   $$45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 45 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{45}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \left(= 13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

   Anmerkung zur Rundung (vgl. Abschnitt 1.5): Die $12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sind ein ungerundetes **Zwischenresultat**, das wir in diesem Skript für diverse Rechnungen weiter verwenden werden. Die $45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ enthalten ja nur zwei signifikante Ziffern. Ein Zwischenresultat besitzt immer mindestens eine signifikante Ziffer mehr als die ungenaueste Angabe (= Angabe mit den wenigsten s.Z.). Wäre die Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ das Endresultat, so müssten wir sie auf zwei signifikante Ziffern, also eben auf $13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ runden.

   In den $10\,\mathrm{s}$ gleichförmiger Fahrt legt der Bus somit $125\,\mathrm{m}$ zurück (auch ein ungerundetes Resultat).

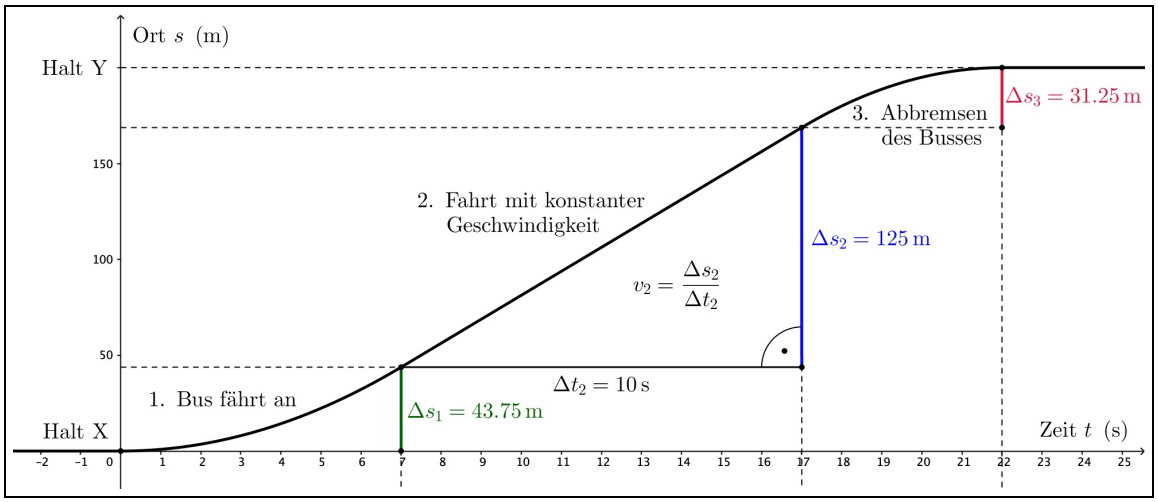
3. **Abbremsen = Gleichmässig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit (gmbBmA)**

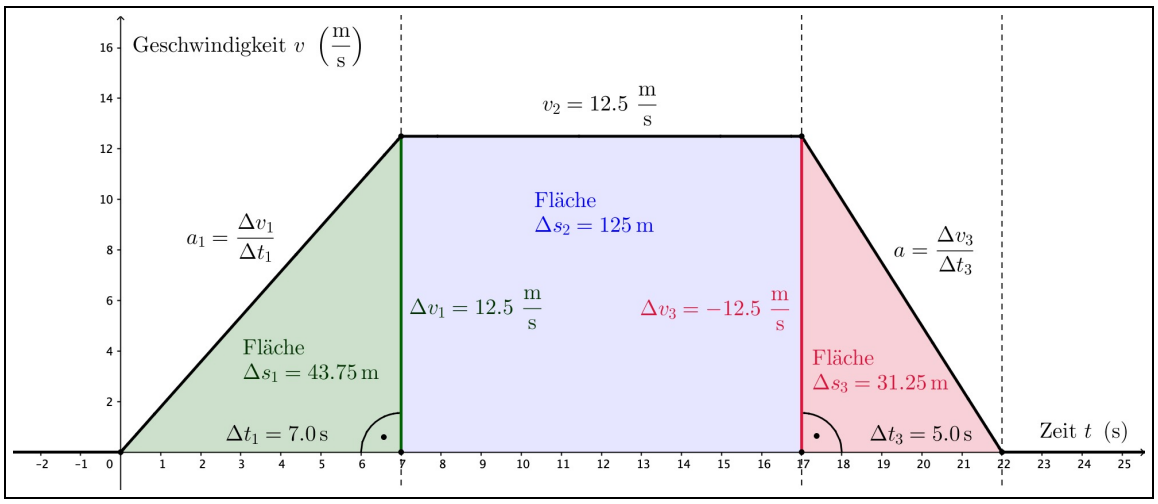
   Der Bus bremst ab. Dafür benötigt er eine Zeit von $5.0\,\mathrm{s}$. Seine Geschwindigkeit ist am Ende auf 0 gesunken.

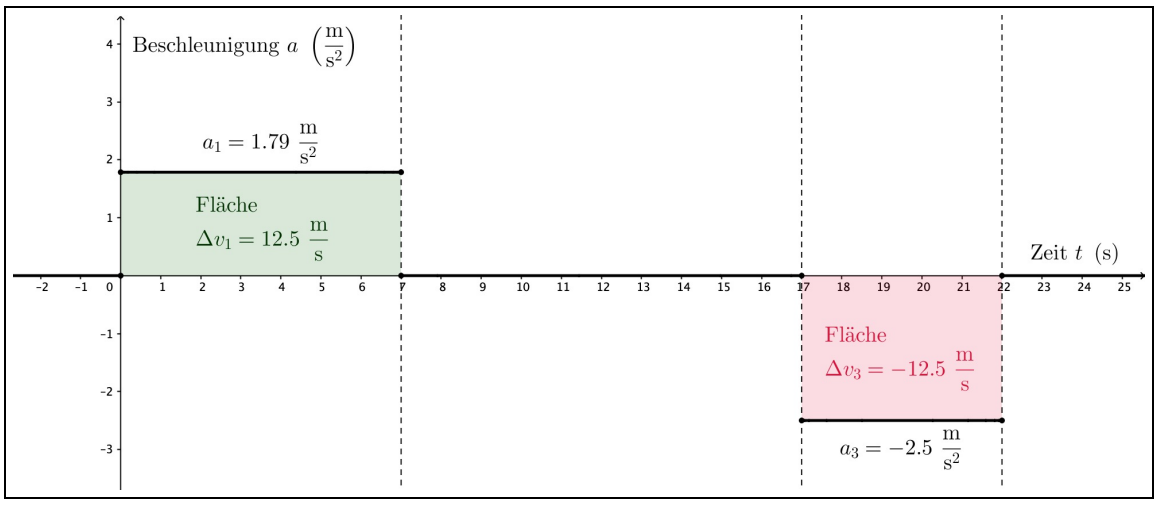
2.3 Die drei Bewegungsdiagramme zur Fahrt des VBZ-Busses

Es ist empfehlenswert stets die hier gezeigte Diagramm-Reihenfolge zu wählen:

- **Oben: Zeit-Weg-**, **Zeit-Ort-** oder einfach ***t*-*s*-Diagramm**.
- **Mitte: Zeit-Geschwindigkeits-** oder einfach ***t*-*v*-Diagramm**.
- **Unten: Zeit-Beschleunigungs-** oder einfach ***t*-*a*-Diagramm**.







2.4 Das Zeit-Ort-, Zeit-Weg- oder t-s-Diagramm

(vgl. Diagramme auf Seite 11)

Die Zeitachse: Auf der liegenden Achse wird die Zeit aufgetragen (z.B. in Sekunden). Den **zeitlichen Nullpunkt** legen wir mit der Abfahrt des Busses von der Haltestelle X zusammen.

Die Ortsachse: Auf der stehenden Achse sind die Orte längs der Strasse aufgetragen. Den **örtlichen Nullpunkt** setzen wir auf die Haltestelle X. Damit kann man auf der Ortsachse die zurückgelegte Wegstrecke ablesen. Die Ortsachse wird zur Wegachse → **Zeit-Weg-Diagramm**.

Die Ortsfunktion $s(t)$: In der Kinematik wird der Aufenthaltsort s als Grösse angesehen, die vom aktuellen Zeitpunkt t abhängt. Wir sprechen von der **Ortsfunktion** $s(t)$ (sprich: "s von t"). Dies ist eine **Funktion** oder **Abbildung** ganz im Sinne der Mathematik: Jeder reellen Zahl t, die für einen Zeitpunkt steht, wird genau eine reelle Zahl s, die für einen Ort steht, zugeordnet. Die Funktionsdeklaration sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{rccc} \text{Ortsfunktion} \quad s: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & s(t) \end{array}$$

Auf der oberen Zeile wird gesagt, dass eine reelle Zahl auf eine andere reelle Zahl abgebildet wird. Auf der unteren Zeile steht dann die konkrete Abbildung. Der Stelle $t \in \mathbb{R}$ ordnet die Funktion den Funktionswert $s(t) \in \mathbb{R}$ zu.

Das t-s-Diagramm zeigt den **Graphen** der Ortsfunktion. Zu jedem Zeitpunkt t auf der Zeitachse gehört genau ein Aufenthaltsort s auf der Ortsachse. Man fährt vom Zeitpunkt t auf der Zeitachse senkrecht bis zum Graphen nach oben, und anschliessend waagrecht nach links hinüber zur Ortsachse, wo der zugehörige Ort $s(t)$ ablesbar ist.

2.5 Die Definition der Geschwindigkeit v

Je steiler der Graph im t-s-Diagramm ist, desto schneller ist der Bus unterwegs (vgl. Seite 11).

Im 1. Bewegungsabschnitt nimmt die Steigung zu: der Bus wird schneller. Im 2. Abschnitt bleibt die Steigung gleich: der Bus fährt gleichbleibend schnell. Im 3. Abschnitt flacht der Graph ab: der Bus wird langsamer. Diese Beobachtungen motivieren die folgende Definition:

Definition der (Momentan-)Geschwindigkeit v

Die momentane **Geschwindigkeit** *v ist gegeben durch die aktuelle Steigung im t-s-Diagramm. Auf Bewegungsabschnitten mit konstanter Geschwindigkeit lässt sie sich mittels eines Steigungsdreiecks bestimmen:*

$$v := \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

"Geschwindigkeit = Strecke pro Zeitspanne"

- Im zweiten Bewegungsabschnitt des Busses gilt demzufolge ganz nachvollziehbar:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{125\,\text{m}}{10\,\text{s}} = 12.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \left(= 13\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

- **Konsequenz: Geschwindigkeiten können negativ sein!**

  Würde der Bus rückwärts fahren, so ergäbe sich im t-s-Diagramm eine negative Steigung. Geschwindigkeiten können demnach auch negative Werte annehmen. Das ist anders als in unserer Alltagsvorstellung von Geschwindigkeit!

2.6 Das Zeit-Geschwindigkeits- oder t-v-Diagramm

(vgl. Diagramme auf Seite 11)

Die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$: Auch die Geschwindigkeit v wird als Funktion der Zeit t aufgefasst. Jedem Zeitpunkt t wird eine momentane Geschwindigkeit $v(t)$ zugeordnet. Das t-v-Diagramm zeigt den Graphen dieser Funktion.

"Geschwindigkeitveränderungen verlaufen gleichmässig": Solange der Bus im 2. Bewegungsabschnitt mit konstanter Geschwindigkeit unterwegs ist, ergibt sich im t-v-Diagramm eine Horizontale. Das ist klar, denn die Zeit schreitet voran, aber der Geschwindigkeitswert bleibt gleich.

Hingegen wissen wir eigentlich nicht so genau, wie die Geschwindigkeit während dem Losfahren zu- und während dem Abbremsen abnimmt. Deshalb wollen wir uns die Sache momentan etwas vereinfachen, indem wir bei Geschwindigkeitsveränderungen immer von der folgenden Annahme ausgehen:

> **Annahme zu Geschwindigkeitsänderungen**
>
> *Geschwindigkeitsänderungen laufen stets gleichmässig ab, sodass sich das t-v-Diagramm zu einem Vorgang stets aus lauter geraden Abschnitten zusammensetzt. Wir gehen momentan also stets von sogenannt* **gleichmässig beschleunigten Bewegungen (gmbB)** *aus.*

Diese Annahme hat für die anderen Diagramme zur Folge, dass...

- ... im t-s-Diagramm nur gerade oder aber parabelförmige Kurven vorkommen.
- ... das t-a-Diagramm stets eine Treppenfunktion, bestehend aus lauter Horizontalen, ist.

In der Realität können natürlich beliebige Verläufe von Geschwindigkeitsänderungen vorkommen. Unsere Einschränkung ist trotzdem sinnvoll, weil wir damit erstens die Grundideen der Klassischen Mechanik bereits gut verstehen können, und zweitens, weil erstaunlich viele Beschleunigungsvorgänge tatsächlich mehr oder weniger gleichmässig ablaufen.

2.7 Die Definition der Beschleunigung a

Je steiler der Graph im t-v-Diagramm ist, desto schneller verändert sich die Geschwindigkeit des Busses (vgl. Seite 11).

Im 1. Bewegungsabschnitt ist der Geschwindigkeitsgraph steigend: die Geschwindigkeit nimmt zu. Im 2. Abschnitt verläuft er horizontal: der Bus bleibt gleich schnell. Im 3. Abschnitt fällt der Geschwindigkeitsgraph: der Bus bremst ab. Diese Beobachtungen motivieren die folgende Definition:

> **Definition der Beschleunigung a**
>
> *Die* **Beschleunigung** a *ist gegeben durch die aktuelle Steigung im t-v-Diagramm. Auf Bewegungsabschnitten mit gleichmässiger Geschwindigkeitsänderung lässt sie sich mit Hilfe eines Steigungsdreiecks bestimmen:*
>
> $$a := \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2}$$
>
> *"Beschleunigung = Geschwindigkeitsänderung pro Zeitspanne"*

- Positive Beschleunigungen gehören zu zunehmenden Geschwindigkeitswerten: "der vorwärts fahrende Bus wird schneller" **oder:** "der rückwärts fahrende Bus wird langsamer".
- Negative Beschleunigungen gehören zu abnehmenden Geschwindigkeitswerten: "der vorwärts fahrende Bus wird langsamer" **oder:** "der rückwärts fahrende Bus wird schneller".
- Die Beschleunigungen im 1. und im 3. Bewegungsabschnitt betragen (Zwischenresultate):

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{7.0\,\mathrm{s}} = 1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{und} \qquad a_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5.0\,\mathrm{s}} = -2.50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

  Im 2. Bewegungsabschnitt gibt es keine Beschleunigung resp. $a = 0$.
- Was beschreibt eine Beschleunigung genau?

> **Anschauliche Bedeutung der Beschleunigung**
>
> *Die Beschleunigung beschreibt, wie rasch sich die Geschwindigkeit eines Körpers verändert. Die Einheit $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ sollte man sich stets aufgeteilt denken:*
>
> $$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}}$$
>
> *"Meter pro Quadratsekunde = (Meter pro Sekunde) pro Sekunde"*
>
> *$a = 1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ meint z.B., dass der Bus pro Sekunde um $1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ schneller wird.*

- **Vorsicht bei Umrechnungen von Beschleunigungseinheiten!**

$$\text{Beispiel:} \quad 1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{(3600\,\mathrm{s})^2} = \frac{1}{12\,960}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

  Achtung! Nur bei der Umrechnung von $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gilt der Faktor "3.6": $1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$!

2.8 Das Zeit-Beschleunigungs- oder t-a-Diagramm

(vgl. Diagramme auf Seite 11)

Die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ und ihr Graph: Wie schon Ort und Geschwindigkeit, so wird auch die Beschleunigung a als Funktion der Zeit aufgefasst. Jedem Zeitpunkt t wird die aktuell vorhandene Beschleunigung $a(t)$ zugeordnet. Das t-a-Diagramm zeigt den Graphen dieser Funktion.

Treppenfunktion: Gehen wir davon aus, dass Geschwindigkeitsänderungen stets gleichmässig ablaufen, so ist der Beschleunigungsgraph eine aus lauter Horizontalen bestehende **Treppenfunktion**.

Die gestrichelten Verbindungslinien zwischen den Treppenstufen sind allerdings "unphysikalisch". Bei realen Vorgängen würde sich, selbst bei enorm rascher Veränderung der Beschleunigung ein stetiger Übergang ergeben, weil Kräfte nicht in Nullzeit ein- oder ausgeschaltet werden können.

2.9 Flächen im t-v-Diagramm und im t-a-Diagramm

(vgl. Diagramme auf Seite 11)

Im Rahmen unserer Übungsaufgaben finden wir heraus, dass den Flächen in t-v- und t-a-Diagramm interessante Bedeutungen zugeschrieben werden können:

Wegstrecken im t-v-Diagramm

In jedem Bewegungsabschnitt entspricht die **Fläche zwischen Zeitachse und Geschwindigkeitsgraph** *dem während diesem Abschnitt* **zurückgelegten Weg** Δs.

Kurz: "Die Fläche im t-v-Diagramm ist gleich der zurückgelegten Strecke."

Geschwindigkeitsänderungen im t-a-Diagramm

In jedem Bewegungsabschnitt entspricht die **Fläche zwischen Zeitachse und Beschleunigungsgraph** *der während diesem Abschnitt erfolgten* **Geschwindigkeitsänderung** Δv.

Kurz: "Die Fläche im t-a-Diagramm ist gleich der Geschwindigkeitsänderung."

Warum diese Zusammenhänge so gelten, wird so richtig erst in der 4. Klasse in der Mathematik im Thema **Integralrechnung** geklärt, auch wenn wir uns die Sache in den Übungsaufgaben schon ziemlich plausibel machen. Ein paar Anmerkungen noch:

- In beiden Diagrammen haben Flächen oberhalb der Zeitachse positive, solche unterhalb negative Werte.
- Mit der ersten Aussage werden Wegstrecken auch bei sich verändernden Geschwindigkeiten berechenbar. Mit der Zweiten können Geschwindigkeitsänderungen bei sich verändernden Beschleunigungen bestimmt werden. Dies verleiht den Diagrammen eine gewisse Wichtigkeit.
- Für unseren Bus finden wir im t-v-Diagramm die folgenden Strecken:

  1. Bewegungsabschnitt: $\Delta s_1 = \frac{1}{2} \cdot 12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 7.0\,\text{s} = 43.75\,\text{m}$

  2. Bewegungsabschnitt: $\Delta s_2 = 12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\,\text{s} = 125\,\text{m}$

  3. Bewegungsabschnitt: $\Delta s_3 = \frac{1}{2} \cdot 12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5.0\,\text{s} = 31.25\,\text{m}$

  Gesamtstrecke: $s_{\text{total}} = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 = 200\,\text{m}$ (Endresultat)

  Da es sich im 1. und im 3. Bewegungsabschnitt um Dreiecksflächen unter dem Geschwindigkeitsgraphen handelt, kommt je ein Faktor $\frac{1}{2}$ in der Streckenberechnung vor.

- Analog ergibt sich für die Geschwindigkeitsänderungen im t-a-Diagramm:

  1. Bewegungsabschnitt: $\Delta v_1 = 1.79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 7.0\,\text{s} = 12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

  3. Bewegungsabschnitt: $\Delta v_3 = -2.50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5.0\,\text{s} = -12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

  Die beiden Flächen im t-a-Diagramm sind also genau gleich gross, was widerspiegelt, dass der Bus am Ende der gesamten Bewegung wieder stillsteht. Seine Geschwindigkeit nimmt im 3. Abschnitt um gleich viel ab, wie sie im 1. Abschnitt zugenommen hat.

2.10 Tipps zum Zeichnen der Diagramme

- Zuerst sollte der Bewegungsablauf in **Bewegungsabschnitte** unterteilt werden. Diese Unterteilung strukturiert das weitere Denken. Im t-s-Diagramm muss man dafür von Auge abschätzen, wo die Übergange zwischen geraden und gekrümmten Abschnitten liegen. In den beiden anderen Diagrammtypen ist die Unterteilung in der Regel direkt sichtbar.
- Der Graph im t-s-Diagramm ist **stetig** und **glatt**. Er lässt sich an einem Stück zeichnen und es gibt keine Ecken. (Letzteres wäre unphysikalisch, da solche Ecken mit Geschwindigkeitssprüngen und unendlich grossen Kräften einhergehen müssten.)
- Der Graph im t-v-Diagramm ist **stetig** und besteht aus lauter geraden Abschnitten. Er lässt sich an einem Stück zeichnen und weist Ecken auf ($\hat{=}$ Beschleunigung ändert sich schlagartig).
- Der Graph im t-a-Diagramm ist eine nicht stetige **Treppenfunktion** aus Horizontalen.
- Wo die Geschwindigkeit ansteigt, d.h., wo die Beschleunigung grösser ist als 0, beschreibt der Graph im t-s-Diagramm eine **Linkskurve**. Wo die Geschwindigkeit abnimmt, wo also die Beschleunigung kleiner ist als 0, zeigt er eine **Rechtskurve**.

2.11 Gleichförmige Bewegung und Durchschnittsgeschwindigkeit

Gleichung zur gleichförmigen Bewegung (gfB)

$v = \text{konstant}$ *resp.* $a = 0$

Ist ein Körper mit der konstanten Geschwindigkeit v unterwegs, so gilt:

$$s = v \cdot t \tag{3}$$

"Strecke = Geschwindigkeit mal Zeit"

Definition der Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$

Wir blenden aus, wie die Bewegung eines Körpers im Detail aussieht. Benötigt er für eine Strecke s die Zeit t, so beträgt seine **Durchschnittsgeschwindigkeit** *$\bar{v}$ auf dieser Strecke:*

$$\overline{v} := \frac{s}{t} \tag{4}$$

- Im Beispiel unseres Busses gilt:

1. Abschnitt: $\overline{v}_1 = \dfrac{12.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 6.25\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad s_1 = \overline{v}_1 \cdot t_1 = 6.25\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 7.0\,\text{s} = 43.75\,\text{m}$

2. Abschnitt: $\overline{v}_2 = v_2 = 12.5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad s_2 = \overline{v}_2 \cdot t_2 = 12.5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \underline{10}\,\text{s} = 125\,\text{m}$

3. Abschnitt: $\overline{v}_3 = \dfrac{12.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 6.25\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad s_3 = \overline{v}_3 \cdot t_3 = 6.25\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5.0\,\text{s} = 31.3\,\text{m}$

Gesamte Fahrt: $\bar{v}_{\text{total}} = \dfrac{200\,\text{m}}{22\,\text{s}} = 9.09\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Wir bemerken: $\overline{v}_{\text{total}} = 9.09\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \neq \frac{6.25+12.5+6.25}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 8.33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (!!!). Die Durchschnittsgeschwindigkeit der gesamten Fahrt ist in der Regel nicht gleich dem arithmetischen Mittel der Durchschnittgeschwindigkeiten auf den einzelnen Abschnitten!

- Bei der Berechnung einer Durchschnittsgeschwindigkeit geht man also von einer gfB aus, obwohl der Körper innerhalb der Bewegung beschleunigen und/oder abbremsen kann.
- Bei gleichmässiger Beschleunigung lässt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit sehr leicht berechnen. Sie ist das arithmetische Mittel aus der **Anfangsgeschwindigkeit** v_0 und der **Endgeschwindigkeit** v:

$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

Ist die Anfangs- oder die Endgeschwindigkeit gleich Null, so gilt einfach:

$$\overline{v} = \frac{v}{2} \qquad \text{resp.} \qquad \overline{v} = \frac{v_0}{2} \tag{5}$$

Dies ist bei der Bewegung des Busses auf dem 1. und dem 3. Bewegungsabschnitt der Fall.

2.12 Gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit

Gleichungen zur gleichmässig beschleunigten Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit (gmbBoA)

$a = \text{konstant} \neq 0$ *und* $v_0 = 0$

Startet ein Körper seine Bewegung aus dem Stand ($v_0 = 0$)*, so gilt:*

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \tag{6}$$

$$v = a \cdot t \tag{7}$$

$$s = \frac{v^2}{2a} \tag{8}$$

$$s = \frac{v}{2} \cdot t \tag{9}$$

Dabei ist t die Zeit, s die Strecke, a die Beschleunigung und v die Endgeschwindigkeit.

- **Herleitungen**

Der Geschwindigkeitsgraph $v(t)$ ist eine Ursprungsgerade (vgl. t-v-Diagramm auf Seite 11). Dazu gehört eine lineare Funktion ohne y-Achsenabschnitt: $v = a \cdot t$. Die Steigung ist entspricht genau der Beschleunigung a, weil diese ja so definiert wurde. Damit ist Gleichung (7) erklärt.

Gleichung (9) bedient sich der Durchschnittsgeschwindigkeit bei verschwindender Anfangsgeschwindigkeit (siehe Gleichung (5)). Es gilt:

$$s = \overline{v} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot t$$

Die Kombination von (7) und (9) liefert (6):

$$s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{a \cdot t}{2} \cdot t = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Unter Verwendung einer Umstellung von (7) erhält man aus (9) schliesslich auch (8):

$$v = a \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v}{a} \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{a} = \frac{v^2}{2a}$$

- (8) wird häufig als die **zeitunabhängige Gleichung** bezeichnet, da t in ihr nicht vorkommt. Sie verknüpft die zurückgelegte Strecke und die Endgeschwindigkeit direkt miteinander.

  Ein Rechenbeispiel zu dieser zeitunabhängigen Gleichung beim VBZ-Bus:

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{(12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2 \cdot 1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 43.65\,\mathrm{m}$$

  Wegen der Rundung des Beschleunigungswertes (Zwischenresultat $a = 1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) ergibt sich nicht ganz genau der gleiche Wert wie auf Seite 16 ($s = 43.75\,\mathrm{m}$).

- Gleichung (6) ist die Ortsfunktion $s(t)$ bei einer gmbBoA. Da die Zeit quadratisch auftritt, ist ihr Graph im t-s-Diagramm eine **Parabel** (vgl. t-s-Diagramm auf Seite 11).

2.13 Gleichmässig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit

Gleichungen zur gleichmässig beschleunigten Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit (gmbBmA)

$a = \text{konstant} \neq 0 \quad \textit{und} \quad v_0 \neq 0$

Beschleunigt sich die Bewegung eines Körpers gleichmässig ausgehend von einer Startgeschwindigkeit v_0, so gelten die folgenden Beziehungen:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \tag{10}$$

$$v = v_0 + a \cdot t \tag{11}$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \tag{12}$$

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t \tag{13}$$

Dabei ist t die Zeit, s die Strecke, a die Beschleunigung, v_0 die Start- und v die Endgeschwindigkeit.

- **Herleitungen**

  Die Herleitungen dieser Gleichungen verlaufen analog zu denjenigen der gmbBoA (Seite 17).

  Zum Geschwindigkeitsgraphen gehört jetzt allerdings eine lineare Geschwindigkeitsfunktion **mit** y-Achsenabschnitt: $v = v_0 + a \cdot t$. Der Graph beginnt über $t = 0$ bei der Startgeschwindigkeit v_0, die dann eben gerade dem y-Achsenabschnitt entsprechen muss. (Die Steigung ist nach wie vor durch die Beschleunigung a gegeben.) Damit ist Gleichung (11) erklärt.

  Wie Gleichung (9), so bedient sich auch Gleichung (13) der Durchschnittsgeschwindigkeit. Nun ist allerdings die Anfangsgeschwindigkeit nicht mehr gleich 0. Aus der Kombination von (11) und (13) folgt (10):

$$s = \overline{v} \cdot t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t = \frac{2v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

  Aus (11) und (13) lässt sich (12) gewinnen (binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$):

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a} \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t = \frac{v + v_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

2.14 Der freie Fall und die Fallbeschleunigung g

Definition "Freier Fall" := Vertikale Bewegung, bei welcher ausschliesslich die Gewichtskraft auf den Körper wirkt ($F_{\text{res}} = F_{\text{G}}$).

Real fallende Objekte beschreiben in guter Näherung einen freien Fall, solange der Luftwiderstand gering ist (→ kleine Geschwindigkeit, kleine Angriffsfläche, geringe Luftdichte).

Merke: Beim freien Fall an der Erdoberfläche wird die stets gleiche **Fallbeschleunigung** $a = g$ gemessen. Sie beträgt:

$$g = 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

In der Dynamik werden wir verstehen, dass die Fallbeschleunigung g gleich dem **Ortsfaktor** ist, was dazu führt, dass wir g auch mit anderen Einheiten schreiben können: $9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}$ ("Newton pro Kilogramm", vgl. Abschnitt 3.11).

2.15 Differentialrechnung – ein mathematischer Ausblick

In der Kinematik definieren wir die Momentangeschwindigkeit v in Gleichung (1) als Steigung des Graphen der Ortsfunktion $s(t)$ und die Beschleunigung a in Gleichung (2) als Steigung des Graphen der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$. Das funktioniert mit Ihren bisherigen mathematischen Kenntnissen allerdings nur, solange wir es mit geraden Abschnitten zu tun haben. Nur dann lässt sich nämlich ein Steigungsdreieck an den Graphen legen und die beiden Gleichungen ergeben einen Sinn.

Wie steht es aber mit kurvenartigen Verläufen? Wie lässt sich beispielsweise die Geschwindigkeit des VBZ-Busses zum Zeitpunkt $t = 3.0\,\text{s}$ im t-s-Diagramm auf Seite 11 bestimmen?

Klar, wenn wir davon ausgehen, dass die Geschwindigkeitsveränderung gleichmässig abläuft, dann können wir mit Gleichung (7) rasch eine Antwort geben, aber es müsste doch eine allgemeinere Möglichkeit geben die Steigung eines Graphen in einem bestimmten Punkt anzugeben.

Tatsächlich werden Sie diese mathematische "Technik" in der 3. Klasse lernen. Sie heisst **Differentialrechnung** und erlaubt die Berechnung der Steigung in einem beliebigen Punkt auf einem Funktionsgraphen. Im Prinzip wird dabei die Steigung einer Tangente berechnet, die man im betrachteten Punkt an die Kurve legt.

Es wäre schön, wenn Sie sich in der 3. Klasse noch daran erinnern könnten, dass Sie beim Zeichnen eines t-v-Diagramms aus einem vorgegebenen t-s-Diagramm im Prinzip bereits in der 1. Klasse Differentialrechnung betrieben haben. Die Berechnung der Steigungsfunktion werden Sie dann als **Ableitung** bezeichnen. Die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ ist die Ableitung der Ortsfunktion $s(t)$ und die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ ist die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ oder die zweite Ableitung der Ortsfunktion $s(t)$.

3 Dynamik geradliniger Bewegungen

⇒ Der Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung

3.1 Was ist eine Kraft?

In der Physik sprechen wir immer dann von einer **Kraft**, wenn ein Körper **gestossen** oder an ihm **gezogen** wird. Um eine Kraft zu beschreiben sind mehrere Angaben notwendig:

Vollständige Beschreibung einer Kraft $\vec{F}$

Wirkt auf einen Körper die **Kraft** $\vec{F}$*, so müssen zu deren vollständiger Beschreibung drei Angaben gemacht werden:*

- **Kraftrichtung:** **In welche Richtung** *zieht oder stösst die Kraft?*
- **Kraftbetrag:** **Wie stark** *wird gestossen resp. gezogen?*
- **Ansatzpunkt:** **Wo** *setzt die Kraft am Körper an?*

Anmerkungen zur Kraftbeschreibung

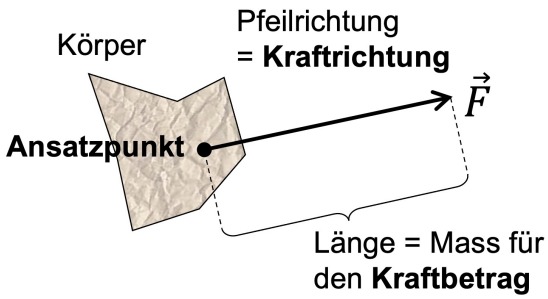
- **"Stossen" resp. "Ziehen" meint hier nicht die Bewegung des Körpers, sondern lediglich das "an ihm" Ziehen oder Stossen.**

  Die Bewegung – oder besser: der Bewegungsablauf – ist dann allenfalls ein Resultat dieses Stossens. Drücken Sie z.B. mit einer Hand gegen eine Wand, so üben Sie zwar eine Kraft auf die Wand aus, bewegen wird sich diese deswegen aber noch lange nicht.

  Erst das Zusammenspiel aller auf einen Körper wirkenden Kräfte bestimmt über die Auswirkung, die dieser Körper erfährt! Genau dieses Zusammenspiel und die dadurch hervorgerufene Bewegungswirkung ist das Thema der Newton'schen Mechanik resp. der Dynamik. Dieses Kapitel enthält die zentralen Aussagen hierzu.

- Kraft**beträge** – "Wie stark ist die Kraft?" – lassen sich durch **Kraftmessgeräte** (Federwaagen, Kraftplatten, Kraftsensoren) erfassen. Die **SI-Grundeinheit**, in der man Kräfte angibt, ist das **Newton** N. Mehr dazu später in Abschnitt 3.3.

- Kräfte lassen sich in Skizzen bestens durch einen **Pfeil** darstellen:



- Wie oder wodurch ein Körper "gestossen" resp. "gezogen" wird, dafür gibt es viele verschiedene Möglichkeiten. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von verschiedenen **Kraftarten**.

  Jede Kraftart ist auf eine bestimmte Ursache zurückzuführen, die in der Regel bereits aus dem Namen der Kraft hervorgeht. Die Abschnitte 3.4 bis 3.9 listen einige für die Mechanik sehr typische Kraftarten auf und geben wichtige Erläuterungen dazu.

3.2 Kraftvektoren, resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ und Kräftegleichgewichte

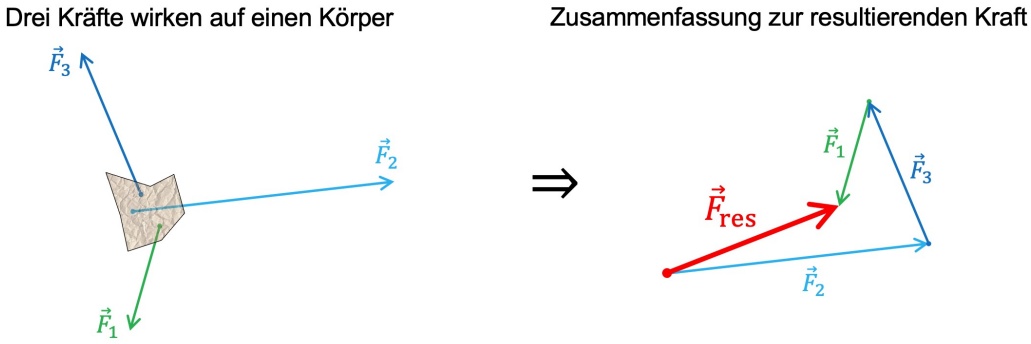
Die Kraft ist ein Beispiel für eine Grösse, die neben dem Betrag auch eine **Richtung** im dreidimensionalen Raum beinhaltet. Dasselbe gilt für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Solche "Grössen mit Richtung" bezeichnen wir als **Vektoren**.[3] Zur Kennzeichnung von Vektoren verwenden wir das oberhalb des Symbols stehende **Vektorpfeilchen**. So schreiben wir Kräfte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Skizzen mit $\vec{F}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$ an.

Lassen wir das Vektorpfeilchen weg, so meinen wir nur den **Betrag** der jeweiligen Grösse. F alleine steht also für einen Kraftbetrag – "Wie stark wird gezogen/gestossen?".

Die Konstruktion der resultierenden Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ durch Vektoraddition

Auf einen Körper sollen beispielsweise irgendwelche drei Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ wirken. Welche Kraft erfährt der Körper in dieser Situation insgesamt? Hier die geometrische Antwort:



In Worten: Die Kraftvektoren werden **in beliebiger Reihenfolge** (!) zu einer **Pfeilkette** aneinander gehängt. Der Vektor, der vom Anfangs- zum Endpunkt der Pfeilkette führt, steht für die Zusammenfassung der Kräfte zu einer einzigen Kraft. Dieses Aneinanderhängen der Vektoren nennt man **Vektor-** oder **Pfeiladdition** und im Falle unserer Kräfte bezeichnen wir ihr Ergebnis als die **resultierende Kraft** $\vec{F}_{\text{res}}$, die unser Körper erfährt.

> **Definition der resultierenden Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$**
>
> *Unter der* **resultierenden Kraft** $\vec{F}_{\text{res}}$ *verstehen wir die Zusammenfassung aller auf einen Körper wirkenden Kräfte zu einer einzigen Kraft.*
>
> *Diese Zusammenfassung erfolgt via* **Pfeil-** *oder* **Vektoraddition**, *bei der man alle einzelnen Kraftvektoren aneinander hängt.* $\vec{F}_{\text{res}}$ *ist dann der* **Vektor vom Anfangs- bis zum Endpunkt dieser Pfeilkette**.

Offenbar wird das Aneinanderhängen der Pfeile als eine Art **Addition** verstanden. Tatsächlich werden Sie in der **Vektorgeometrie**, also in der Mathematik, die sich mit der Beschreibung von Objekten im dreidimensionalen Raum auseinandersetzt, für die oben gezeigte Situation schreiben:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Ohne Vektorpfeilchen wäre diese Gleichung falsch, denn der Pfeil für die resultierende Kraft F_{res} ist deutlich kürzer als die aufaddierten Längen der Pfeile für die drei einzelnen Kräfte F_1, F_2 und F_3:

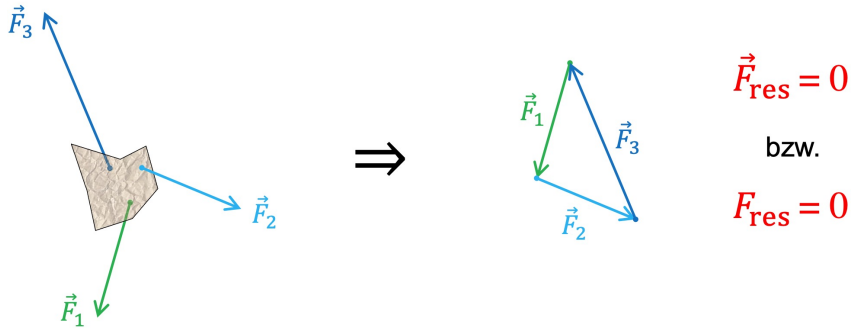
$$F_{\text{res}} \neq F_1 + F_2 + F_3 \qquad \text{stattdessen:} \quad F_{\text{res}} < F_1 + F_2 + F_3$$

[3] Im Gegensatz dazu heissen Grössen, die lediglich durch die Angabe eines Betrags beschrieben werden, **Skalare**.

$\vec{F}_{\text{res}} = 0$: Kräftegleichgewichte

Addieren sich alle auf einen Körper wirkenden Kräfte vektoriell so, dass die resultierende Kraft verschwindet, $\vec{F}_{\text{res}} = 0$ resp. $F_{\text{res}} = 0$, so sprechen wir von einem **Kräftegleichgewicht** und sagen, der Körper sei **kräftefrei**, obwohl Kräfte auf ihn wirken. Die Kräfte heben sich aber eben gegenseitig auf, sodass der Körper netto keine Kraft erfährt.

Geometrisch bedeutet ein Kräftegleichgewicht, dass sich die Pfeilkette aller Kraftvektoren genau schliesst:



Im Formalismus der Vektoraddition notieren wir sofort:

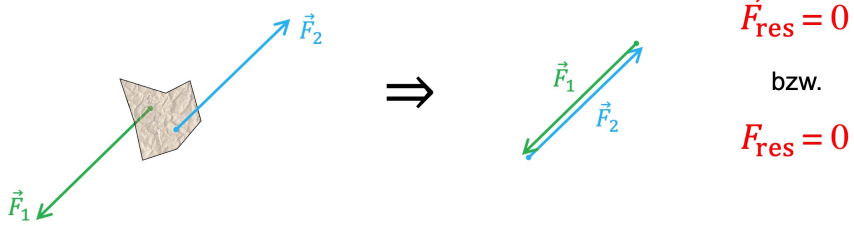
$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

Für die Kraftbeträge ist die Sache aber wieder komplizierter. So stehen die Längen der drei Kraftvektoren $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ im gezeigten Beispiel für die Seiten eines Dreiecks. Ganz bestimmt gilt in diesem Fall die sogenannte **Dreiecksungleichung** – immer zwei Seitenlängen sind zusammen länger als die dritte Seite:

$$F_1 < F_2 + F_3 \qquad \text{und} \qquad F_2 < F_1 + F_3 \qquad \text{und} \qquad F_3 < F_1 + F_2$$

Zwei sich gegenseitig aufhebende Kräfte

Oft werden wir es mit Situationen zu tun haben, in denen sich zwei Kräfte gegenseitig gerade neutralisieren:



Auch in diesem Fall können wir vektorgeometrisch notieren:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

Wir haben damit gerade gelernt, was das **Negative** eines Vektors ist: Hier ist $\vec{F}_2$ das Negative von $\vec{F}_1$, wobei es sich um einen gleich langen Pfeil handelt, der aber genau in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Für die Beträge der beiden Kraftvektoren lässt sich nun aber notieren:

$$F_1 = F_2$$

Und damit kommt das Kräftegleichgewicht doch in einer uns sehr vertrauten Weise daher. Die beiden zueinander entgegengesetzt gerichteten Kraftvektoren heben sich gegenseitig auf, weil ihre Beträge gleich gross sind.

3.3 Die Newton'schen Axiome

Die klassische Mechanik basiert auf drei durch Isaac Newton im 17. Jahrhundert formulierten Grundprinzipien. Man nennt sie die drei **Newton'schen Axiome**. (Axiome sind Grundgesetze, die innerhalb der Theorie nicht weiter hinterfragt, sondern als fundamentale Wahrheiten angesehen werden.)

Das 1. Newton'sche Axiom: Das Trägheitsprinzip

Ein Körper bewegt sich genau dann gleichförmig und geradlinig, d.h. mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ (Betrag und Richtung!), wenn er kräftefrei ist, also ein Kräftegleichgewicht herrscht. ($\vec{F}_{\text{res}} = 0$).

Das 2. Newton'sche Axiom: Das Aktionsprinzip

Ein Körper wird genau dann in eine bestimmte Richtung beschleunigt, wenn die auf ihn wirkende resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ in diese Richtung zeigt. Bei einem Körper mit Masse m gilt für die resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ und die Beschleunigung $\vec{a}$:

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a} \qquad \textit{resp.} \qquad F_{\text{res}} = m \cdot a \tag{14}$$

Das 3. Newton'sche Axiom: Das Wechselwirkungsprinzip

"actio = reactio: Jede Kraft erzeugt eine gleich grosse Gegenkraft."

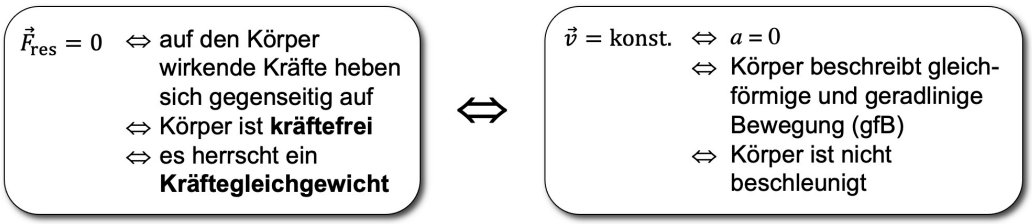
Wirkt der Körper A mit einer Kraft $\vec{F}_{\text{A}\to\text{B}}$ auf den Körper B, so erfährt auch A von B eine Kraft $\vec{F}_{\text{B}\to\text{A}}$. Diese ist gleich gross wie $F_{\text{A}\to\text{B}}$, wirkt aber in die entgegengesetzte Richtung:

$$\vec{F}_{\text{B}\to\text{A}} = -\vec{F}_{\text{A}\to\text{B}} \tag{15}$$

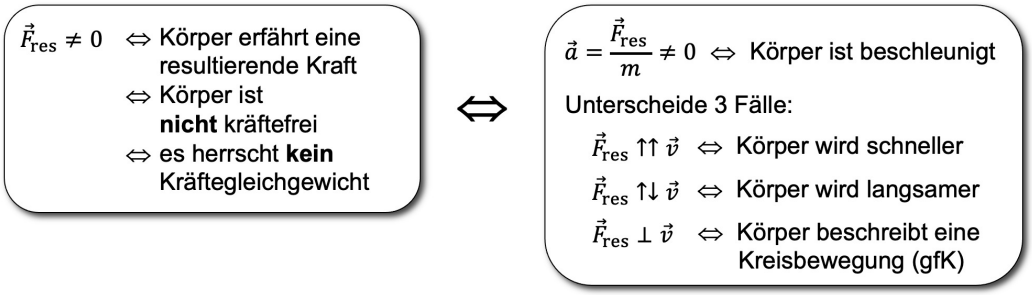
Anmerkungen zu den Newton'schen Axiomen

- Zunächst eine grafische Zusammenfassung zum Trägheits- und zum Aktionsprinzip:

Trägheitsprinzip (1. Newton'sches Axiom)



Aktionsprinzip (2. Newton'sches Axiom)



- Wir schränken unsere Betrachtungen zunächst auf die Änderung des Geschwindigkeitsbetrages ein. D.h., wir kümmern uns nur um das schneller oder langsamer Werden, nicht um die Kurvenfahrt. Daher der Übertitel des Kapitels: "Dynamik **geradliniger** Bewegungen."

  Im Kapitel 4 nehmen wir dann auch Kreisbewegungen resp. Kurvenfahrten unter die Lupe. Dann geht es genau um Situationen in denen die resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ nicht immer nur **parallel** ($\uparrow\uparrow$) oder **antiparallel** ($\uparrow\downarrow$) zur aktuellen Bewegungsrichtung $\vec{v}$ steht.

  Im Moment wollen wir uns vor allem merken: Zeigt die resultierende Kraft in dieselbe Richtung wie die aktuelle Bewegungsrichtung ($\vec{F}_{\text{res}} \uparrow\uparrow \vec{v}$), so wird der Körper schneller. Steht die resultierende Kraft hingegen genau entgegengesetzt zur aktuellen Bewegungsrichtung ($\vec{F}_{\text{res}} \uparrow\downarrow \vec{v}$), so wird der Körper langsamer.

- Die Masse m eines Körpers ist ein Mass für seine **Trägheit**. Ist ein Körper insgesamt kräftefrei ($F_{\text{res}} = 0$), so behält er seinen Bewegungszustand aufgrund dieser Trägheit bei. Wir sprechen von einer **Trägheitsbewegung**: "mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus" (gfB).

- Sobald ein Körper schneller oder langsamer wird oder seine Bewegungsrichtung ändert oder beides zusammen der Fall ist, muss er unter dem Einfluss einer von Null verschiedenen resultierenden Kraft stehen. Dann gilt der im 2. Newton'schen Axiom beschriebene formale Zusammenhang: $\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a}$ und der Körper erfährt eine Beschleunigung mit Betrag:

$$a = \frac{F_{\text{res}}}{m} \tag{16}$$

  Hier kommt die Masse als Mass für die Trägheit eines Körpers direkt zur Anwendung. Je grösser m ist, desto kleiner ist bei gleicher resultierender Kraft F_{res} die Beschleunigung a.

- Die vektorielle Schreibweise $\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a}$ bringt zum Ausdruck, dass die Beschleunigungsrichtung stets durch die Richtung der resultierenden Kraft vorgegeben wird.

- Die SI-Einheit der Kraft, das **Newton**, wird über das Aktionsprinzip definiert:

> **Die Definition der Krafteinheit Newton**
>
> *Ein Körper mit 1 Kilogramm Masse erfahre eine konstante (resultierende) Kraft. Schafft es diese Kraft, den Körper aus dem Stand in 1 Sekunde auf eine Geschwindigkeit von genau 1 Meter pro Sekunde zu beschleunigen, so hat sie einen Betrag von genau* **1 Newton**:
>
> $$[\,F\,] = [\,m\,] \cdot [\,a\,] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} := \textbf{Newton} = \text{N}$$

- Das Wechselwirkungsprinzip wird immer dann wichtig, wenn wir uns für den Austausch von Kräften zwischen mehreren Körpern interessieren. Im Moment ist dies eher selten der Fall, weil wir unsere Betrachtungen auf einzelne Körper und deren Bewegungsablauf einschränken.

  Ein paar Anmerkungen zum Wechselwirkungsprinzip folgen daher erst etwas weiter hinten im Abschnitt 3.12.

Nachdem wir nun die Newton'schen Axiome als theoretische Grundlage aller weiteren Betrachtungen kennengelernt haben, ist es an der Zeit endlich all die verschiedenen Kräfte kennenzulernen, die in der Mechanik auf unsere Körper wirken können. Das soll in den nächsten paar Abschnitten geschehen.

3.4 Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ und der Ortsfaktor $\vec{g}$

An der Erdoberfläche erfährt jeder Körper eine **Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in Richtung des Erdmittelpunktes**, also gegen unten. Wir nennen sie auch **Schwerkraft**, **Erdanziehungskraft** oder **Gravitation**.

Als Ursache für die Gewichtskraft identifizierte Isaac Newton die **Anziehung zwischen Massen**. Die Gewichtskraft, die ein Körper erfährt, ist **proportional** zu dessen eigener Masse m. Das klingt vielleicht kompliziert, besagt aber nichts anderes, als dass uns ein Kilogramm Masse halb so schwer erscheint wie zwei Kilogramm Masse.

Ich bin also deswegen schwer, weil meine Masse und die Masse der Erde sich gegenseitig anziehen. Im Prinzip werde ich auch von allen anderen Massen in meiner Umgebung angezogen. Davon merken wir allerdings nichts, weil die Gravitation eigentlich eine sehr schwache Kraft ist. Das hat zur Folge, dass mindestens eine der beiden Massen sehr gross sein muss, wenn wir von dieser Anziehungskraft etwas bemerken wollen.

Allerdings fühlen wir als unsere Schwerkraft nicht die Gewichtskraft selber, sondern vielmehr, wie wir durch sie gegen die Erdoberfläche gedrückt werden. Wir spüren also die Normalkräfte zwischen unseren Füssen und dem Boden (vgl. Abschnitt 3.5). **Im freien Fall merken wir nichts von unserer eigenen Gewichtskraft!**

Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$

Ein Körper mit Masse m erfährt eine **Gewichtskraft** *$\vec{F}_G$, die gegeben ist durch:*

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g} \qquad \textit{resp.} \qquad F_G = m \cdot g \tag{17}$$

Dabei ist $\vec{g}$ der sogenannte **Ortsfaktor**. *Er beschreibt die Stärke und Richtung der Gravitation an einem bestimmten Ort. An der Erdoberfläche zeigt er überall Richtung Erdmittelpunkt und hat in der Schweiz einen Betrag von etwa:*

$$g = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \approx 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

Weitere Anmerkungen zur Gewichtskraft

- Die Einheit des Ortsfaktors g ist zu lesen als **"Newton pro Kilogramm"**: Pro Kilogramm Masse entstehen an der Erdoberfläche 9.81 Newton Gewichtskraft.

  Über die Erdoberfläche hinweg variiert dieser Wert wenig. Am geringsten ist er am Äquator ($g \approx 9.78\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$), währenddem er bei den Polen am grössten ist ($g \approx 9.83\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$). Auf die Ursachen dieser unterschiedlichen Werte und auf die Grösse des Wertes selber werden wir zu gegebener Zeit näher eingehen.

- Zum Vergleich: Auf der Mondoberfläche beträgt der Ortsfaktor ca. $1.6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$. Im Erdmittelpunkt ist er 0, da man dort von allen Seiten gleich stark durch die Erdmasse angezogen wird.

- Die Gewichtskraft von $100\,\mathrm{g}$ Masse (z.B. eine **Tafel Schokolade**) beträgt hier an der Erdoberfläche gerade etwa 1 Newton. Das ist ein guter **Referenzwert** zum Merken und Vergleichen!

  Wann immer eine Kraft in Newton angegeben wird, können sie sich denken: "Ah, das ist so stark wie soundso viele Tafeln Schokolade schwer wären."

- Die Masse des Beispiel-VBZ-Busses beträgt 26.0 Tonnen. Somit folgt für seine Gewichtskraft:

$$F_G = m \cdot g = 26.0\,\mathrm{t} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 26\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \simeq 255\,000\,\mathrm{N} = 255\,\mathrm{kN}$$

3.5 Die Normalkraft $\vec{F}_{\mathrm{N}}$

Wirkt eine Kraft gegen die **Oberfläche** eines stabilen Gegenstandes, so reagiert dieser mit einer Gegenkraft, welche wir als **Normalkraft** $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ bezeichnen. Kurz:

> **Die Normalkraft ist die Reaktionskraft, die ein Gegenstand aufgrund seiner Stabilität zu erzeugen vermag.**

Anmerkungen zur Normalkraft

- In unserem Beispiel des VBZ-Busses entwickelt die Strassenoberfläche immer gerade soviel Kraft um den Bus zu tragen, also dessen Gewichtskraft zu kompensieren! Das wissen wir, weil der Bus in vertikaler Richtung in Ruhe ist (vgl. Abschnitt 3.3). Somit ist $F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}} = 255\,\mathrm{kN}$.
- Die Normalkraft wirkt stets **senkrecht von der Oberfläche weg**. Daher ihr Name: "Normal" bedeutet in der Mathematik nämlich "senkrecht stehend" (z.B. auf einer Fläche).

3.6 Reibungskräfte $\vec{F}_{\mathrm{R}}$

Wir unterscheiden verschiedene Arten von Reibung zwischen Oberflächen:

Gleitreibung: Dies ist die Reibungskraft, welche entsteht, wenn zwei Oberflächen aufgrund von Bewegung aneinander reiben (→ Rutschen resp. Gleiten).

Haftreibung: Diese Reibungskraft tritt auf, solange zwei Oberflächen sich berühren, sich aber noch nicht relativ zueinander bewegen (→ Haftung).

Solange die Kräfte, welche zur relativen Bewegung der Oberflächen führen würden, einen gewissen Betrag nicht überschreiten, verhindert die Haftreibung diese Bewegung. Für die Haftreibung lässt sich jeweils ein maximaler Grenzwert berechnen.

Rollreibung: Auch bei rollenden Rädern entsteht eine Art von Reibung, denn:

- Erstens besteht bei der Radachse eine Gleitreibung (oder allenfalls nochmals eine Rollreibung, wenn mit Kugellagern gearbeitet wird).
- Zweitens wird jede Stelle auf der Radaussenseite beim Rollen gegen die Unterlage gedrückt, nur um gleich wieder von dieser weggezogen zu werden. Dieses Wegziehen erfolgt gegen kleine anziehende Oberflächenkräfte. Dies ist der Hauptgrund für die Rollreibung – und für den Lärm, den man von vorbeifahrenden Autos hört; der Autolärm kommt in der Regel also nicht hauptsächlich vom Automotor.

Für Gleit-, Haft- und Rollreibung gibt es einfache Berechnungsformeln:

Beträge von Reibungskräften $\vec{F}_{\mathrm{R}}$

Werden zwei Körper mit der Normalkraft F_{N} gegeneinander gedrückt, so betragen allfällige Reibungskräfte:

$$\begin{aligned} &\textbf{Gleitreibung:} && F_{\mathrm{R}} = \mu_{\mathrm{G}} \cdot F_{\mathrm{N}} \\ &\textbf{Haftreibung:} && F_{\mathrm{R}} \leq \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{N}} \\ &\textbf{Rollreibung:} && F_{\mathrm{R}} = \mu_{\mathrm{R}} \cdot F_{\mathrm{N}} \end{aligned} \tag{18}$$

μ_{G}, μ_{H} und μ_{R} sind Reibungszahlen. *Sie beschreiben den Einfluss der Oberflächenbeschaffenheiten auf die jeweilige Reibungskraft.*

Anmerkungen zu Reibungskräften

- Die Berechnungsformeln (18) liefern nur Näherungswerte. Keinesfalls besitzen sie den exakten theoretischen Charakter des 2. Newton'schen Axioms. Es sind lediglich ungefähre experimentelle Befunde.
- Die Indizes G, H und R bei den Reibungszahlen μ sagen einfach, zu welcher Reibungsart die Reibungszahl gehört.
- Reibungskräfte hängen von zwei Faktoren ab: Erstens, wie stark die beiden Oberflächen gegeneinander gedrückt werden ($\rightarrow F_N$), zweitens von den Oberflächenbeschaffenheiten ($\rightarrow \mu$).
- Gleit- und Rollreibung hängen **nicht von der Reibungsgeschwindigkeit** ab!
- Gleit- und Haftreibung hängen **nicht von der Grösse der Kontaktfläche** ab!
- Befindet sich ein Körper auf einer **horizontalen Unterlage**, durch welche er vollständig getragen wird, so ist $F_N = F_G = m \cdot g$. Daraus folgt für die Reibungskräfte:

$$F_R = \mu_{G/R} \cdot m \cdot g \qquad \text{resp.} \qquad F_R \leq \mu_H \cdot m \cdot g$$

- Man kann die Reibungszahl so verstehen: μ gibt an, welcher Bruchteil der Normalkraft auch als Reibungskraft verwendet wird.
- Reibungszahlen liegen meistens zwischen 0 und 1, können aber auch grösser als 1 sein. Kleine Werte stehen für wenig reibende Oberflächenkombinationen.

  Bei gegebenen Oberflächenbeschaffenheiten ist die Haftreibungszahl stets grösser als die Gleitreibungreibungszahl: $\mu_H > \mu_G$. Das ist die Ursache des Rucks, der sich einstellt, wenn ein Gegenstand zu rutschen beginnt.

  Es gibt eine Vielzahl tabellierter Reibungszahlen – für verschiedene Reibungsarten und verschiedene Kombinationen von Oberflächenbeschaffenheiten. Solche Tabellenwerte sind allerdings nur ungefähre Richtwerte. Hier einige Beispiele:

Haft- und Gleitreibung
(typische Werte für glatte, trockene Oberflächen)

	Gleitreibung	Haftreibung
Bremsklotz auf Bremsscheibe	0.35 ± 0.15	
Gelenk (z. B. Schulter)	0.003	0.01
Glas auf Glas	0.40	0.94
Holz auf Holz	0.3 ± 0.1	0.4 ± 0.2
Holz auf Stein	0.3	0.7
Leder auf Metall	0.3	0.4
NaCl auf NaCl	1.2	1.5
Pneu auf trockener Asphaltstrasse	0.65 ± 0.15	0.85 ± 0.15
Ski auf Schnee	0.12 ± 0.08	0.2 ± 0.1
Stahl auf Eis	0.014	0.027
Stahl auf Stahl (hart)	0.42	0.78
Stahl auf Teflon	0.04	0.04

Rollwiderstandskoeffizienten
(typische Werte)

	Rollreibung
Autoreifen auf Asphalt (Lkw)	0.008 ± 0.002
Autoreifen auf losem Sand	0.3 ± 0.1
Autoreifen auf Schotter	0.02 ± 0.01
Eisenbahnrad auf Schiene	0.0015 ± 0.0005
Fahrradreifen auf Asphalt	0.007

  Wir nehmen zur Kenntnis, dass hier ziemlich ungenaue Angaben tabelliert sind. Möchte man die Reibungszahl in einer bestimmten Situation ganz genau kennen, so gibt es nur die Ausmessung im Experiment.

- Gehen wir in unserem VBZ-Bus-Beispiel von einer Rollreibungszahl von $\mu_R = 0.0075$ aus, so erfährt der Bus während der Fahrt eine Reibungskraft von:

$$F_R = \mu_R \cdot F_N = 0.0075 \cdot 255\,\text{kN} \simeq 1.9\,\text{kN}$$

3.7 Luftwiderstand $\vec{F}_{\mathrm{L}}$

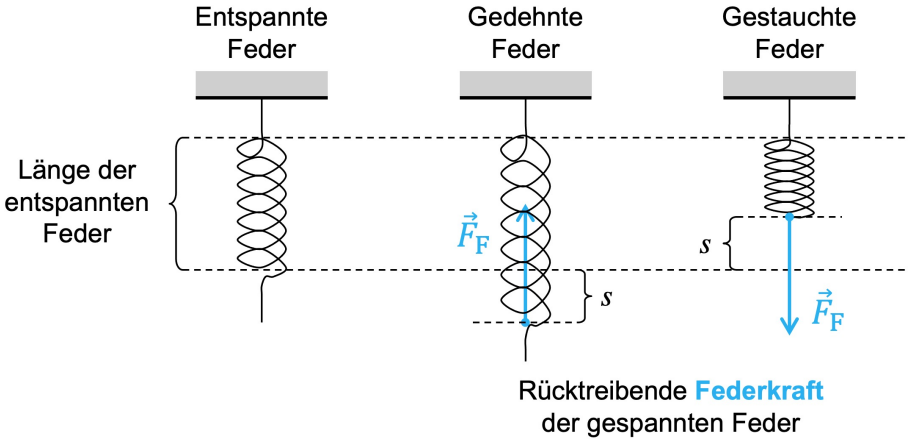
Bewegt sich ein Gegenstand relativ zur Luft, so muss er bei dieser Bewegung ständig Luft zur Seite schieben. Dies erzeugt je nach Geschwindigkeit, Form und Fläche eine unterschiedlich starke Widerstandskraft. Diese Art von Reibung bezeichnen wir als **Luftwiderstand** $\vec{F}_{\mathrm{L}}$.

Im Unterschied zu anderen Reibungsarten ist beim Luftwiderstand die Geschwindigkeit von entscheidender Bedeutung. Bei kleiner Geschwindigkeit kann man $\vec{F}_{\mathrm{L}}$ meistens vernachlässigen, bei grossen Geschwindigkeiten wird diese Kraft hingegen ganz entscheidend.

Wir verzichten auf eine Formel zur Berechnung des Luftwiderstandes. Im Beispiel unseres VBZ-Busses vernachlässigen wir ihn.

3.8 Die Federkraft $\vec{F}_{\mathrm{F}}$ und das Federgesetz

Wird eine Spiralfeder gedehnt oder gestaucht, so entwickelt sie eine rücktreibende **Federkraft** $\vec{F}_{\mathrm{F}}$:



Der Betrag F_{F} ist proportional zur **Dehnungsstrecke** s. D.h., in gleichem Masse, wie die Feder gedehnt (oder gestaucht) wird, wächst auch ihre rücktreibende Kraft an! Dieser Zusammenhang ist unter dem Namen **Federgesetz** bekannt.

Das Federgesetz und die Federkraft $\vec{F}_{\mathrm{F}}$

Wird eine Spiralfeder um die Strecke s aus ihrer entspannten Lage gedehnt oder gestaucht, so entwickelt sie eine rücktreibende **Federkraft** $\vec{F}_{\mathrm{F}}$*, mit welcher sie die entspannte Lage wieder herzustellen versucht. Für ihren Betrag gilt:*

$$F_{\mathrm{F}} = D \cdot s \tag{19}$$

D ist die **Federkonstante** *der Spiralfeder. Sie beschreibt die Stärke der Feder.*

Anmerkungen zum Federgesetz

- Je stärker eine Feder ist, desto grösser ist der Wert ihrer Federkonstante. Das kommt auch in der SI-Einheit der Federkonstante zum Ausdruck: $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, also Newton pro Meter.

  Beispiel: Wollte man eine Spiralfeder mit einer Federkonstanten von $D = 34\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ um einen Meter dehnen, so bräuchte man eine Kraft von $34\,\mathrm{N}$, eben: "34 Newton pro Meter".

- Auch bei vielen anderen **elastischen**, also dehnbaren Gegenständen gilt das Federgesetz in guter Näherung und es lässt sich eine Federkonstante angeben.

  Beispiele sind Pfeilbogen, Gummibälle, Trampoline, Luftpolster, etc.

3.9 Weitere Kraftarten

Es gibt noch etliche weitere Kraftarten, denen man je nach Vorkommen oder Ursache verschiedene Namen geben kann. Hier zwei häufige Beispiele aus der Mechanik:

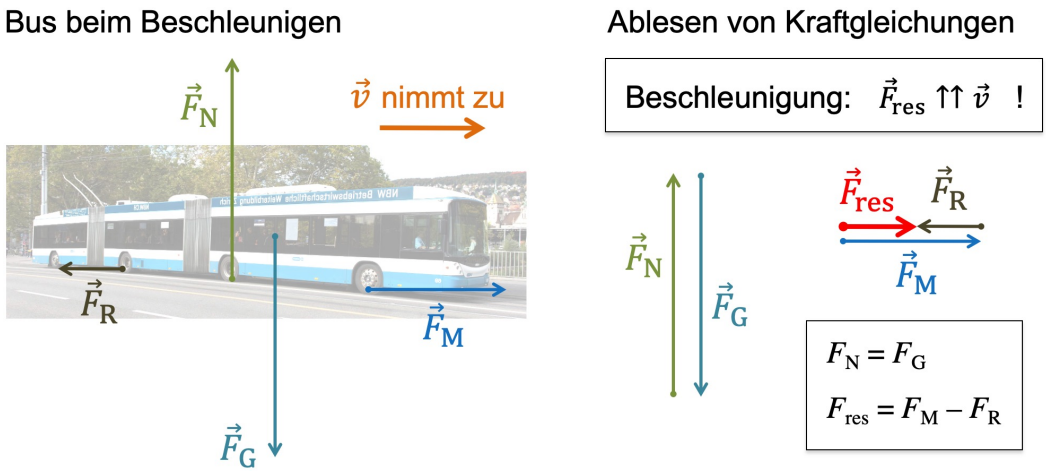
Zugkräfte $\vec{F}_{\mathrm{Z}}$: Zugkräfte treten auf, wenn mit Händen, Haken, Seilen oder sonst irgendwie an einem Gegenstand gezogen wird. Die Ausrichtung von Seilen, Schnüren, Fäden, etc. zeigt einem direkt die Kraftrichtung, in welche gezogen wird.

Antriebs- oder Motorenkräfte $\vec{F}_{\mathrm{M}}$: Autos übertragen Kräfte auf die Strasse, mit welchen sie sich aufgrund von Haftreibung in Vorwärtsrichtung abstossen können. Solche Kräfte bezeichnen wir ganz einfach als Antriebs- oder Motorenkräfte.

3.10 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus

Werfen wir zur Verdeutlichung des bisher Gesagten einen ausführlicheren Blick auf unser Beispiel mit dem VBZ-Bus. Wir gehen die Bewegungsabschnitte nacheinander durch:

- **Bewegungsabschnitt 1: Gleichmässige Beschleunigung**



Der Bus beschleunigt in Vorwärtsrichtung. Gemäss Aktionsprinzip muss er dazu eine resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ in Fahrtrichtung erfahren. Dabei sorgt die Motorenkraft $\vec{F}_{\mathrm{M}}$ für den Antrieb, während die Rollreibung $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ der Bewegung entgegenwirkt. (Einen allfälligen Luftwiderstand $\vec{F}_{\mathrm{L}}$ wollen wir hier vernachlässigen.)

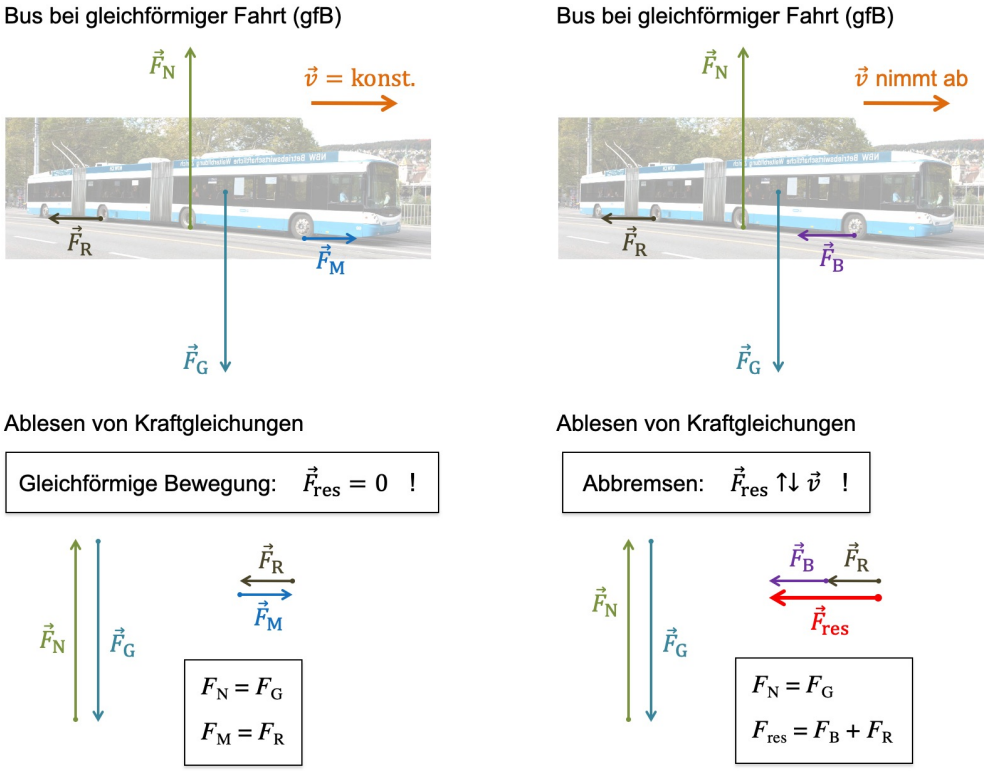
Für die resultierende Kraft ergibt sich gemäss dem Aktionsprinzip aus der Busmasse und der in Abschnitt 2.7 bestimmten Beschleunigung von $1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$:

$$F_{\mathrm{res}} = m \cdot a = 26\,000\,\mathrm{kg} \cdot 1.79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 46\,540\,\mathrm{N} \approx 46.5\,\mathrm{kN}$$

Die Kräfteskizze oben erklärt, dass die Kraft F_{M} des Motors einerseits für die Beschleunigung der Masse sorgt ($\rightarrow F_{\mathrm{res}}$), andererseits aber auch die Reibungskraft F_{R} kompensiert. Daraus folgt mit der Reibungskraft von Seite 27:

$$F_{\mathrm{M}} = F_{\mathrm{res}} + F_{\mathrm{R}} = 46.5\,\mathrm{kN} + 1.9\,\mathrm{kN} = 48.4\,\mathrm{kN} \simeq 48\,\mathrm{kN}$$

Ein solches Resultat kann man stets mit der Gewichtskraft einer bestimmten Masse vergleichen, damit man sich etwas vorstellen kann. $48\,\mathrm{kN}$ entsprechen der Gewichtskraft von etwa $4800\,\mathrm{kg}$ Masse. Der Bus muss also ganz ordentlich ziehen!



- **Bewegungsabschnitt 2: Gleichförmige Bewegung**

  Fährt der VBZ-Bus mit konstanter Geschwindigkeit, so muss er insgesamt kräftefrei sein. Daher wissen wir, dass sich in der Skizze oben links die Kräfte sowohl in horizontaler, als auch in vertikaler Richtung gegenseitig aufheben müssen. Der Busmotor muss also eine Kraft erzeugen, die vom Betrag her genau der Reibungskraft F_R entspricht:

  $$F_M = F_R = 1.9\,\text{kN}$$

- **Bewegungsabschnitt 3: Gleichmässiges Abbremsen**

  Beim Abbremsen wirken nur Kräfte entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung auf den Bus (vgl. oben rechts). Wie bei der Beschleunigung, so lässt sich auch hier über das Aktionsprinzip die resultierende Kraft bestimmen ($a = 2.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$):

  $$F_{res} = m \cdot a = 26\,000\,\text{kg} \cdot 2.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 65\,000\,\text{N} = 65\,\text{kN}$$

  Diese resultierende Kraft F_{res} setzt sich aus der Rollreibung F_R und der Bremskraft F_B der Räder zusammen. Für Letztere folgt nun:

  $$F_B = F_{res} - F_R = 65\,\text{kN} - 1.9\,\text{kN} \simeq 63\,\text{kN}$$

Kräfte in unterschiedlichen Raumrichtungen

In vielen Situationen treten ausschliesslich Kräfte in senkrecht zueinander stehenden Raumrichtungen auf. In solchen Fällen lassen sich direkt Kraftgleichungen aus der Kräfteskizze ablesen.

Das ist in allen drei Bewegungsabschnitten des VBZ-Busses der Fall. In vertikaler Richtung heben sich $\vec{F}_N$ und $\vec{F}_G$ jeweils gegenseitig auf. Horizontal muss sich eine Gleichung ergeben, die im Falle des schneller oder langsamer Werdens auch $\vec{F}_{res}$ mit einbezieht.

Die vertikalen und die horizontalen Kräfte können aber eben vollständig losgelöst voneinander betrachtet und in eigenen Gleichungen miteinander verknüpft werden.

3.11 "Alle Körper fallen gleich schnell"

Wirkt auf einen Körper ausschliesslich die Gewichtskraft F_{G}, so bezeichnen wir diese Kräftesituation als **freien Fall**. Er wird in guter Näherung realisiert, wenn sich ein Gegenstand ohne Kontakt zu anderen Gegenständen durch die Luft bewegt und der Luftwiderstand vernachlässigbar klein ist (optimal: Vakuum).

Da im freien Fall einzig die Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ wirkt, ist sie auch gerade gleich der resultierenden Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$.[4] Diese wiederum bestimmt, welche Beschleunigung der Gegenstand erfährt:

$$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{G}} \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot a = m \cdot g \qquad \Rightarrow \qquad a = g$$

Das bedeutet, im freien Fall erfahren alle Körper die gleiche Beschleunigung, nämlich g.

Der Ortsfaktor $\vec{g}$ beschreibt also gleichzeitig die Beschleunigung, die ein Körper erfährt, der einzig und allein unter dem Einfluss der Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ steht:

$$\textbf{Fallbeschleunigung} = \textbf{Ortsfaktor} = \vec{g}$$

Nun könnte man einwenden, dass der Ortsfaktor aber eine ganz andere Einheitenzusammensetzung ($\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$) als eine Beschleunigung ($\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) aufweist. Wie sollen die beiden Grössen dasselbe sein?!

Bei näherer Betrachtung wird allerdings klar, dass diese beiden Einheitenzusammensetzungen identisch sind. Denn die Krafteinheit Newton wird aufgrund des Aktionsprinzips definiert: $\mathrm{N} := \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Dividieren wir diese Gleichung durch das Kilogramm rechts, so ergibt sich sofort $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Somit halten wir für die Fallbeschleunigung resp. den Ortsfaktor an der Erdoberfläche fest:

$$g = 9.81 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 9.81 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Behalten wir also im Hinterkopf:

"Alle Körper, die ausschliesslich unter dem Einfluss der Gewichtskraft stehen, beschleunigen beim Fallen gleich schnell."

Das verstehen wir innerhalb der Newton'schen Mechanik sogar noch ein wenig besser: Ein Körper mit einer grossen Masse ist sowohl schwerer, als auch träger als ein Körper mit einer geringen Masse. Schwere und Trägheit kompensieren sich gerade, so dass beide Körper im freien Fall die gleiche Beschleunigung g erfahren.[5]

3.12 Erläuterungen zum Wechselwirkungsprinzip

Das 3. Newtonsche Axiom, also das Wechselwirkungsprinzip, besagt, dass Kräfte nicht einzeln vorkommen können, sondern stets paarweise auftreten.

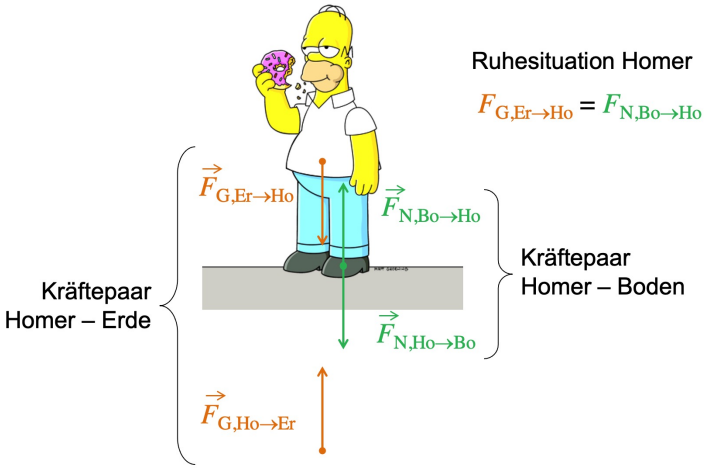
Allerdings wirken Kraft und **Gegenkraft** nicht auf denselben Körper. Deshalb ist das Prinzip nicht so wichtig, wenn man sich nur für die Bewegung eines einzelnen Körpers interessiert. Entscheidend wird das Prinzip erst, wenn man ein ganzes System von Körpern untersucht.

Hier seien nun einfach zwei Beispiele von "actio = reactio" angeführt, damit wir uns etwas Konkreteres unter dem Wechselwirkungsprinzip vorstellen können.

[4] Das gilt ganz allgemein: Wenn nur eine einzige Kraft F auf einen Körper wirkt, dann ist die resultierende Kraft eben immer gleich dieser Kraft: $\vec{F}_{\mathrm{res}} = F$.

[5] Innerhalb der Newton'schen Mechanik gibt es allerdings keine Erklärung dafür, weshalb die Schwere eines Körpers auch gerade seiner Trägheit entspricht. Es wäre innerhalb dieser Theorie durchaus denkbar, dass ein Körper sehr schwer, aber kaum träge ist oder umgekehrt.

Auf dem Boden stehen



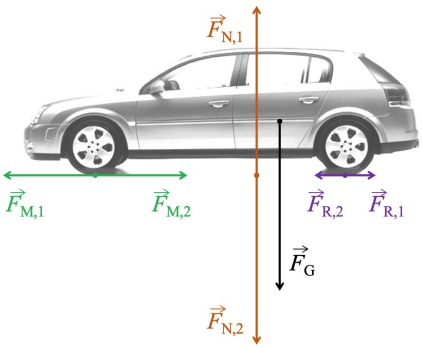
Homer steht in Ruhe auf horizontalem Boden. Auf ihn wirkt erstens die Gewichtskraft der Erde $\vec{F}_{G,Er\to Ho}$ nach unten, zweitens die Normalkraft des Bodens $\vec{F}_{N,Bo\to Ho}$ nach oben. Da er selber in Ruhe ist, heben sich diese beiden Kräfte gegenseitig auf.

$\vec{F}_{G,Er\to Ho}$ und $\vec{F}_{N,Bo\to Ho}$ sind allerdings keine Gegenkräfte im Newton'schen Sinne! Gewichtskraft und Normalkraft könnten durchaus verschieden sein. Z.B., wenn Homer in einem Lift stehen würde, der gerade am anfahren oder abbremsen wäre.

Die eigentliche Gegenkraft zu $\vec{F}_{G,Er\to Ho}$ ist die von Homer erzeugte Gewichtskraft auf die Erde $\vec{F}_{G,Ho\to Er}$. Sie setzt im Erdmittelpunkt an. Wegen ihrer riesigen Masse bleibt die Erde davon allerdings praktisch unbeeinflusst – ihre Trägheit ist einfach zu gross.

Die Gegenkraft von $\vec{F}_{N,Bo\to Ho}$ ist die Normalkraft $\vec{F}_{N,Ho\to Bo}$ von Homer auf den Boden. Der Boden kann Homer nicht tragen ohne dabei selber belastet zu werden.

Die Belastung des Strassenbelags



Auto beschleunigt

$F_{res} = F_{M,1} - F_{R,1}$

$\vec{F}_G$ = Gewichtskraft der Erde auf das Auto
$\vec{F}_{N,1}$ = Normalkraft des Bodens auf das Auto
$\vec{F}_{N,2}$ = Normalkraft des Autos auf den Boden
$\vec{F}_{M,1}$ = Motorenkraft des Bodens auf das Auto
$\vec{F}_{M,2}$ = Motorenkraft des Autos auf den Boden
$\vec{F}_{R,1}$ = Rollreibungskraft des Bodens auf das Auto
$\vec{F}_{R,2}$ = Rollreibungskraft des Autos auf den Boden

"actio = reactio"

$\vec{F}_{M,1} = -\vec{F}_{M,2}$
$\vec{F}_{N,1} = -\vec{F}_{N,2}$
$\vec{F}_{R,1} = -\vec{F}_{R,2}$

Obige Kräfteskizze zeigt die Beschleunigungssituation eines Autos, wobei auch die vom Auto auf die Strasse wirkenden Kräfte eingezeichnet sind. (Die Gegenkraft zu $\vec{F}_G$ ist allerdings nicht eingezeichnet. Es wäre die Gewichtskraft, welche die Erde aufgrund des Autos erfahren würde. In der Skizze würde sie im Erdmittelpunkt ansetzen.)

Vertikal wirkt die Normalkraft des Autos und damit indirekt seine Gewichtskraft auf die Strasse. Horizontal muss die Strasse zusätzlich die Rollreibungs- und vor allem die Motorenkraft des Autos – welche eigentlich eine Haftreibungskraft ist – aushalten. Dies ist eine massive Belastung des Belags, da diese Kräfte nicht "nur" den Boden einzudrücken versuchen, sondern vor allem eben in horizontaler Richtung wirken.

Auch beim Abbremsen gibt es eine Haftreibung zwischen Pneus und Boden, welche wiederum zu grosser horizontaler Belastung führt.

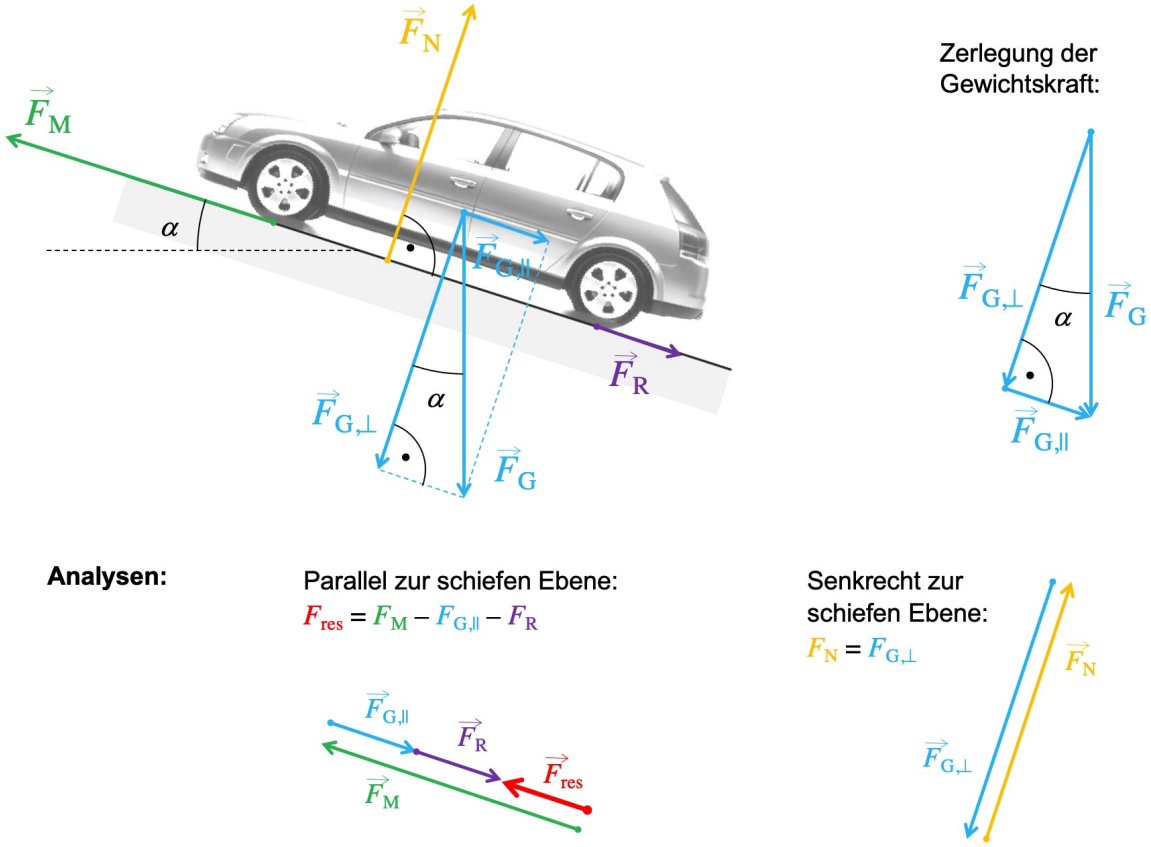
3.13 Die Zerlegung der Gewichtskraft auf einer schiefen Ebene

Im Abschnitt 3.2 auf Seite 21 wurde gezeigt, wie einzelne auf einen Körper wirkende Kräfte zur resultierenden Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ zusammenzusetzen sind. Erst $\vec{F}_{\text{res}}$, also das Zusammenwirken aller einzelnen Kräfte, bestimmt, wie die Bewegung eines Körpers verläuft. $\vec{F}_{\text{res}}$ gibt die Richtung der Beschleunigung vor und bestimmt via $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m}$ auch über deren Betrag.

Erst $\vec{F}_{\text{res}}$ ist also an die Beschleunigung $\vec{a}$ gekoppelt. Deshalb darf man umgekehrt **Kraftzerlegungen** vornehmen. D.h., man darf den zu einer bestimmten Kraft gehörenden Kraftpfeil durch mehrere andere, im Prinzip beliebig ausgerichtete Pfeile ersetzen, solange die Pfeilkette, welche diese neuen Kraftpfeile bilden, vom Anfangspunkt des ursprünglichen Pfeils zu dessen Endpunkt führt.

Solche Kraftzerlegungen helfen, Situationen besser zu verstehen und zu analysieren, ändern aber nichts an der physikalischen Situation.

Ganz typisch ist z.B. die **Zerlegung der Gewichtskraft auf einer schiefen Ebene**. Betrachten wir als Beispiel dazu ein beschleunigendes Auto auf einer ansteigenden Strasse (= schiefe Ebene):



Die Antriebskraft $\vec{F}_{\text{M}}$ wirkt parallel zur Strasse in Aufwärtsrichtung, währenddem die Rollreibungskraft $\vec{F}_{\text{R}}$ parallel zur Strasse in Abwärtsrichtung der Bewegung entgegenwirkt. Die Normalkraft $\vec{F}_{\text{N}}$ der Strasse wirkt senkrecht von dieser weg.

Um die senkrecht nach unten zeigende Gewichtskraft $\vec{F}_{\text{G}}$ mit diesen anderen Kräften zu verrechnen, zerlegt man sie in eine Parallel- und eine Senkrechtkomponente $\vec{F}_{\text{G},\parallel}$ und $\vec{F}_{\text{G},\perp}$. Ausserdem verdeutlicht diese Zerlegung die physikalische Situation:

- Nur die Gewichtskraft-Komponente $\vec{F}_{\text{G},\perp}$ senkrecht zur Strasse wirkt gegen diese. Die Strasse muss also nicht die gesamte Gewichtskraft mit ihrer Normalkraft kompensieren, sondern eben nur die **Senkrecht-Komponente** $\vec{F}_{\text{G},\perp} \Rightarrow F_{\text{N}} = F_{\text{G},\perp}$.

- Der andere Teil der Gewichtskraft ist die Komponente $\vec{F}_{\mathrm{G},\parallel}$ parallel zur Strasse. Diese Komponente sorgt normalerweise für die Abwärtsbeschleunigung auf einer schiefen Unterlage, z.B. beim Skifahren oder Snowboarden. Man bezeichnet sie gerne auch als **Hangabtriebskraft**.

  Die Motorenkraft $\vec{F}_{\mathrm{M}}$ muss diese **Parallel-Komponente** $\vec{F}_{\mathrm{G},\parallel}$ der Gewichtskraft und zudem auch noch die Reibung $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ überkompensieren, damit eine resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ in Aufwärtsrichtung entsteht und das Auto tatsächlich beschleunigen kann $\Rightarrow F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{M}} - F_{\mathrm{G},\parallel} - F_{\mathrm{R}}$.

Natürlich nützt diese Zerlegung nur etwas, wenn man die Komponenten der Gewichtskraft auch berechnen kann. Bei vorgegebenem Steigungswinkel α ist dies allerdings kein Problem. Man muss lediglich etwas Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck anwenden, um die Kraftkomponenten $\vec{F}_{\mathrm{G},\parallel}$ und $\vec{F}_{\mathrm{G},\perp}$ auf die Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ zurückzuführen. Es ist:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{F_{\mathrm{G},\parallel}}{F_{\mathrm{G}}} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{F_{\mathrm{G},\perp}}{F_{\mathrm{G}}} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{G},\perp} = F_{\mathrm{G}} \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Komponenten der Gewichtkraft auf der schiefen Ebene

Auf einer schiefen Ebene lässt sich die Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ eines Objektes in eine Komponente $\vec{F}_{\mathrm{G},\parallel}$ parallel zur schiefen Ebene und in eine Komponente $\vec{F}_{\mathrm{G},\perp}$ senkrecht zu dieser unterteilen. Für die Beträge der beiden Gewichtskraft-Komponenten gilt:

$$F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha \tag{20}$$

$$F_{\mathrm{G},\perp} = F_{\mathrm{G}} \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha \tag{21}$$

Dabei ist α der Steigungswinkel der schiefen Ebene.

Nebenbei: Häufig wird bei Neigungen von Strassen nicht der **Steigungswinkel** α, sondern vielmehr die **Steigung** in Prozenten angegeben:



Dieses Schild bedeutet beispielsweise, dass die Strasse pro $100\,\mathrm{m}$ horizontaler Strecke (quasi in den Boden hinein) um $12\,\mathrm{m}$ ansteigt. Aus der Trigonometrie folgt somit für den Steigungswinkel α:

$$\tan\alpha = 12\,\% = 0.12 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan 0.12 = 6.84^\circ$$

Auf dem Taschenrechner wird in der Regel allerdings nicht arctan (= Arcustangens) für die Umkehrfunktion der Tangensfunktion zu finden sein. Dort steht typischerweise $\tan^{-1}$.

4 Kinematik und Dynamik bei Kreisbewegungen

⇒ Wie spielen die Kräfte bei Kreisbewegungen zusammen?

4.1 Das Musterbeispiel: Der VBZ-Bus

Auch die Kreisbewegung veranschaulichen wir uns am Beispiel des VBZ-Busses. Der Bus fahre mit konstanter Geschwindigkeit durch eine Kurve. Wir sprechen von einer **gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)**. Folgende Angaben gelten für die Kurvenfahrt des Busses:

- Die Masse des Busses beträgt immer noch $26.0\,\mathrm{t}$.
- Die Kurve besitze einen **Kurven-** oder **Bahnradius** von $63\,\mathrm{m}$.
- Die **(Bahn-)Geschwindigkeit** des Busses sei konstant und betrage $v = 12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

4.2 Die Kinematik der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)

Ein Körper, der gleichmässig eine Kreisbahn abfährt, beschreibt eine **gleichförmige Kreisbewegung (gfK)**. Seine Geschwindigkeit bezeichnet man in diesem Fall als **Bahngeschwindigkeit** und es gilt:

Bahngeschwindigkeit bei der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)

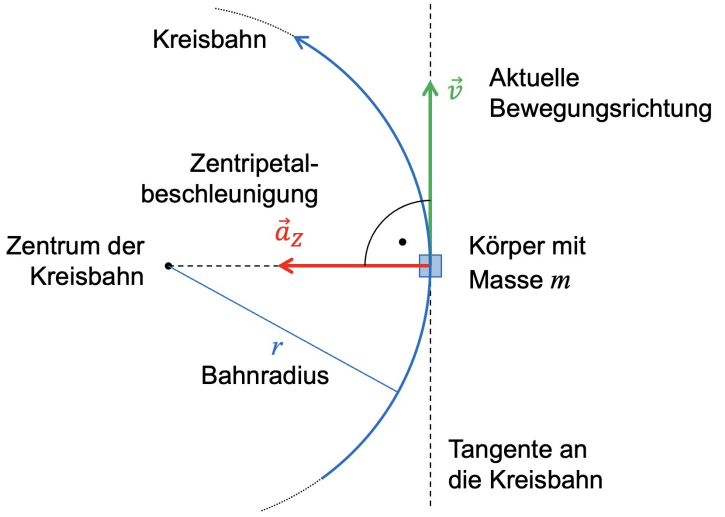
Beschreibt ein Körper eine gleichförmige Kreisbewegung mit **Bahnradius** r *und* **Umlaufszeit** T*, so gilt für seine* **Bahngeschwindigkeit** v*:*

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 1 \text{ Kreisumfang pro } 1 \text{ Umlaufszeit} \tag{22}$$

Würde der VBZ-Bus eine Runde in einem Kreisel fahren, so ergäbe sich für seine Umlaufszeit aus Gleichung (22):

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 63\,\mathrm{m}}{12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 32\,\mathrm{s}$$

Der Geschwindigkeitsbetrag v bleibt bei einer gfK konstant. Zur Geschwindigkeit gehört aber auch eine **Richtung**. Sie muss vollständigerweise als **Vektor** (= **Pfeil**) dargestellt werden: $\vec{v}$. Bei einer Kreisbewegung liegt die momentane Bewegungsrichtung $\vec{v}$ stets auf einer Tangente an die Kreisbahn!



Der Körper muss nun eine Beschleunigung erfahren, welche **für die Veränderung der Bewegungsrichtung verantwortlich ist, den Geschwindigkeitsbetrag aber unverändert lässt**. Diese Art von Beschleunigung nennt man **Zentripetalbeschleunigung** $\vec{a}_Z$.

Die Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_Z$

Beschreibt ein Körper eine gfK mit der Bahngeschwindigkeit v und dem Bahnradius r, so muss er unter dem Einfluss einer **Zentripetalbeschleunigung** $\vec{a}_Z$ *stehen. Diese steht stets senkrecht zur aktuellen Bewegungsrichtung $\vec{v}$ und zeigt ins Zentrum der Kreisbahn. Ihr Betrag ist gegeben durch:*

$$a_Z = \frac{v^2}{r} \tag{23}$$

Anmerkungen zur Zentripetalbeschleunigung

- Gleichung (23) für den Betrag von a_Z lässt sich herleiten, indem man sich überlegt, wie sich die Geschwindigkeitsrichtung bei einer Kreisbewegung momentan verändern muss. Bis jetzt steht uns die Mathematik (Vektorgeometrie, Differentialrechnung) für diese Herleitung allerdings nicht zur Verfügung, weshalb wir an dieser Stelle darauf verzichten und die Gleichung so "akzeptieren" wollen.
- Der Vorsatz **zentripetal** wurde durch Newton geprägt. Er bedeutet soviel wie "nach der Mitte (des Kreises) strebend" (*petere* = lat. Verb für "streben nach" oder "zielen").
- Im Beispiel des VBZ-Busses erhalten wir für den Zentripetalbeschleunigungsbetrag mit (23):

$$a_Z = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{63\,\mathrm{m}} = 2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

  Zur nochmaligen Verdeutlichung: Der Bus wird durch diese Zentripetalbeschleunigung weder schneller, noch langsamer. Sie hält ihn lediglich auf seiner Kreisbahn!

4.3 Die Dynamik der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)

Das Aktionsprinzip (= 2. Newtonsches Axiom) erklärt uns den Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung: Die Zusammenfassung aller wirkenden Kräfte zu einer einzigen, resultierenden Kraft F_{res} zeigt stets in die Richtung der Beschleunigung a. Für die Beträge gilt nach wie vor:

$$F_{\mathrm{res}} = m \cdot a$$

Dies gilt auch für Kreisbewegungen! Ein Körper, der eine gfK beschreibt, muss eine resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ erfahren, welche in die Richtung der Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_Z$, also ins Zentrum der Kreisbahn zeigt. Für den Betrag dieser resultierenden Kraft folgt mit (14) und (23) sofort:

$$F_{\mathrm{res}} = m \cdot a_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Im Falle einer gfK bezeichnen wir die resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ neu als **Zentripetalkraft** $\vec{F}_Z$. Dies ist lediglich ein neuer Name! Es gibt daran nichts Neues zu verstehen.

Zentripetalkraft $\vec{F}_Z$ = Bezeichnung für die resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$ im Falle einer gfK

Das Aktionsprinzip bei der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)

Ein Körper beschreibt genau dann eine gfK, wenn die resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ senkrecht zu seiner aktuellen Bewegungsrichtung $\vec{v}$ steht. In diesem Fall bezeichnen wir $\vec{F}_{\text{res}}$ als **Zentripetalkraft** $\vec{F}_{\text{Z}}$.

Bewegt sich ein Körper der Masse m mit der Bahngeschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r, so gilt für den Betrag von $\vec{F}_{\text{Z}}$:

$$F_{\text{Z}} = m \cdot a_{\text{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r} \tag{24}$$

Der Körper mit Masse m beschreibt eine gleichförmige Kreisbewegung mit Bahnradius r und -geschwindigkeit v

$\Leftrightarrow$

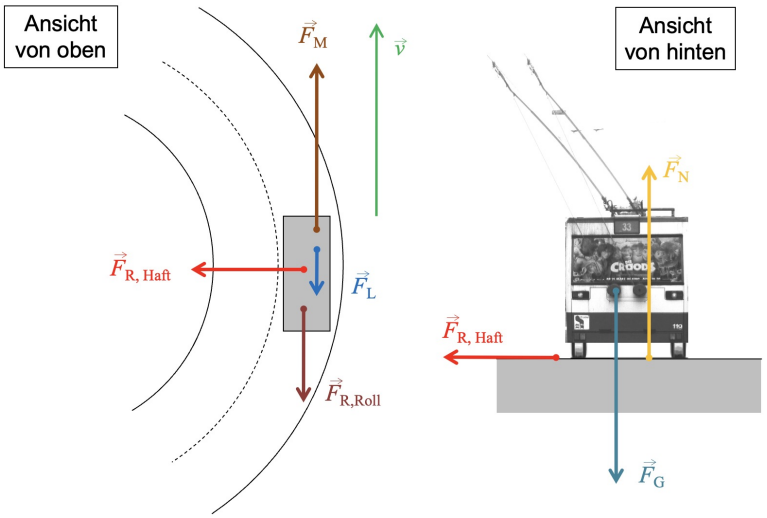
Die auf den Körper wirkende resultierende Kraft $\vec{F}_{res}$ ist eine Zentripetalkraft $\vec{F}_Z$, d.h., sie steht senkrecht zur aktuellen Bewegungsrichtung $\vec{v}$ und beträgt:

$$F_{\text{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Anmerkungen zur Zentripetalkraft

- Die Formel für F_{Z} beinhaltet die wesentlichen physikalischen Aussagen:
  Um einen Körper auf einer Kreisbahn zu halten, braucht man **mehr Kraft**, ...
  - **je mehr Masse** m der Körper besitzt ($F_{\text{Z}} \sim m$),
  - **je enger die Kurve**, also je kleiner der **Bahnradius** r ist ($F_{\text{Z}} \sim \frac{1}{r}$),
  - vor allem aber **je grösser die Geschwindigkeit** v des Körpers ist, denn sie fliesst quadratisch in die Zentripetalkraft ein ($F_{\text{Z}} \sim v^2$)!
- Der im Alltag so oft gehörte Begriff **Zentrifugal-** oder **Fliehkraft** meint **nicht** das Gleiche wie die Zentripetalkraft! Wir kommen im Abschnitt 4.5 darauf zu sprechen.

4.4 Die Kräfte bei der Kurvenfahrt des VBZ-Busses



Kraftgleichungen (Analyse)

Vertikale Richtung

Ruhe $\Longrightarrow$ $F_{\text{N}} = F_{\text{G}}$

Horizontal, parallel zu v:

gfB $\Longrightarrow$ $F_{\text{M}} = F_{\text{R,Roll}} + F_{\text{L}}$

Horizontal, senkrecht zu v:

gfK $\Longrightarrow$ $F_{\text{Z}} = F_{\text{R,Haft}}$

Die auf den Bus wirkenden Kräfte lassen sich in den drei Richtungen des Raumes betrachten:

- **aufwärts ↔ abwärts:** Der Bus ist in vertikaler Richtung in Ruhe und es ist folgt:

$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}}$$

- **vorwärts ↔ rückwärts:** Der Bus fährt mit konstanter Geschwindigkeit in Vorwärtsrichtung. Laut dem Trägheitsprinzip gilt daher:

$$F_{\mathrm{M}} = F_{\mathrm{R,Roll}} + F_{\mathrm{L}}$$

  Der Motor zieht in Vorwärtsrichtung, um Rollreibung und Luftwiderstand zu kompensieren.

- **rechts ↔ links:** Nehmen wir an, der Bus befinde sich in einer Linkskurve. Dann muss er zwangsläufig aus irgendeinem Grund eine Kraft nach links erfahren, denn als resultierende Kraft muss eine Zentripetalkraft nach links, also ins Zentrum der Kreisbahn entstehen.

  Welche Kraft hält den Bus in der Kurve? Es ist die **seitliche Haftreibung zwischen Pneus und Strasse**. Die Reifen rollen ja nur in Vorwärtsrichtung, seitlich haften sie! Es gilt also:

$$F_{\mathrm{Z}} = F_{\mathrm{R,Haft}}$$

Verfügt der Bus tatsächlich über die benötigte seitliche Haftung? Berechnen wir dazu einmal die aktuelle Zentripetalkraft nach Gleichung (24):

$$F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{26\,000\,\mathrm{kg} \cdot \left(12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{63\,\mathrm{m}} = 64\,500\,\mathrm{N}$$

Die Haftreibungszahl zwischen einer trockenen Strasse und Autopneus beträgt z.B. etwa $\mu_{\mathrm{H}} = 0.85$. Dann folgt für die Haftreibungskraft $F_{\mathrm{R,Haft}}$ gemäss Gleichung (18) auf Seite 26:

$$F_{\mathrm{R,Haft}} \leq \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{N}} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{G}} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot m \cdot g = 0.85 \cdot 26\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 217\,000\,\mathrm{N}$$

Die maximal mögliche Haftreibung reicht also bei Weitem, um den Bus in der Kurve zu halten – schliesslich handelt es sich ja um ein öffentliches Verkehrsmittel, bei dessen Fahrt es niemals in die Nähe der physikalischen Grenzen gehen sollte.

Umgekehrt lässt sich nun aber berechnen, wie schnell der Bus denn bei diesen Bedingungen maximal sein dürfte, um sich gerade noch in der Kurve zu halten:

$$F_{\mathrm{Z}} = F_{\mathrm{R,Haft,max}} = 217\,000\,\mathrm{N}$$

$$F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{F_{\mathrm{Z}} \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{217\,000\,\mathrm{N} \cdot 63\,\mathrm{m}}{26\,000\,\mathrm{kg}}} = 22.93\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 83\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Vielleicht hätten wir eine deutlich grössere maximale Geschwindigkeit erwartet, weil der Unterschied zwischen aktueller Zentripetal- und maximal möglicher Haftreibungskraft oben so gross war:

$$F_{\mathrm{Z}} = 64\,500\,\mathrm{N} \ll 217\,000\,\mathrm{N} = F_{\mathrm{R,Haft,max}}$$

Hier widerspiegelt sich der quadratische Einfluss der Geschwindigkeit v in der Zentripetalkraft-Gleichung $F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$.

Nebenbei: Die Rechnung ist so nicht ganz korrekt, denn die Motorenkraft, die zur Aufrechterhaltung der Geschwindigkeit benötigt wird, ist eigentlich auch eine Komponente der Haftreibungskraft. Das hat zur Folge, dass die maximal mögliche seitliche Haftreibung etwas geringer ist als oben berechnet.

4.5 Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen

Will man das Aktionsprinzip (= 2. Newtonsches Axiom) anwenden, so darf das System, in welchem die Kräfte und Bewegungen beschrieben werden, selber nicht beschleunigt sein. Solche nichtbeschleunigten Bezugssysteme heissen **Inertialsysteme**.

Dies trifft für die Strasse in guter Näherung zu, für den Bus hingegen nicht. Deshalb treten innerhalb des Busses scheinbar Kräfte auf, die es von der Strasse aus gesehen gar nicht gibt. Wir sprechen von **Schein-** oder **Trägheitskräften**. Hier seien zwei typische Beispiele ausgeführt:

"In den Sitz gedrückt werden"

Beschleunigt der Bus von der Strasse aus gesehen, so hat man innerhalb des Busses den Eindruck eine Kraft nach hinten zu erfahren. Dies ist eine Scheinkraft! Sie entsteht, weil unsere Körper aufgrund ihrer Masse träge sind und von sich aus in Ruhe bleiben würden. Der Innenraum des Busses ist hingegen kein Inertialsystem. Er beschleunigt vorwärts. So entsteht für die Menschen im Bus der Eindruck einer nach hinten wirkenden Kraft, gegen die sie sich stemmen müssen.

Die Zentrifugal- oder Fliehkraft

Macht der Bus eine Linkskurve, so würde sich unser Körper im Bus aufgrund seiner Trägheit aus Sicht der Strasse weiter geradeaus bewegen. Der Bus beschleunigt aber (zentripetal) nach links, und so entsteht innerhalb des Busses der subjektive Eindruck, eine Kraft nach rechts resp. in der Kurve "nach aussen" zu erfahren. Genau diese Kraft – die es aus der Sicht der Strasse gar nicht gibt – wird **Zentrifugal-** oder **Fliehkraft** genannt. Es ist eine Kraft, die nur innerhalb das Busses "existiert" – eben eine Scheinkraft.

4.6 Kraftangaben als Vielfache des Ortsfaktors

Grundsätzlich lässt sich jede beliebige auf einen Körper wirkende Kraft F als Vielfaches der Gewichtskraft F_G ausdrücken, welche der Körper an der Erdoberfläche erfährt:

$$F = x \cdot F_\mathrm{G} \quad \text{resp.} \quad x = \frac{F}{F_\mathrm{G}} \qquad \textit{"Wie oft steckt } F_\mathrm{G} \textit{ in } F \textit{ drin?"}$$

Ist z.B. $x = 5$, also $F = 5 \cdot F_\mathrm{G}$ oder $\frac{F}{F_\mathrm{G}} = 5$, so sagt man, auf den Körper wirken $5\,g$. Man gibt den Vergleich also in **Vielfachen des Ortsfaktors** g an der Erdoberfläche an.

Solche vergleichenden Angaben haben sich besonders für Situationen mit starken Beschleunigungen eingebürgert, wie die folgenden Beispiele zeigen sollen.

Beschleunigung im Formel-1-Auto

Die Beschleunigung eines Formel-1-Autos beträgt von 0 auf $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ knapp $a = 17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Der Fahrer (z.B. $72\,\mathrm{kg}$) erfährt diese Beschleunigung, weil seine Rückenlehne ihn mit der entsprechenden Normalkraft nach vorne schiebt. Aus einer Kräfteskizze wird klar, dass diese Normalkraft der Rückenlehne gerade gleich der resultierenden Kraft sein muss. Mit dem Aktionsprinzip (14) folgt:

$$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{res} = m \cdot a = 72\,\mathrm{kg} \cdot 17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1224\,\mathrm{N}$$

Für den Vergleich mit F_G ist es aber gar nicht notwendig, den Wert der Normalkraft zu kennen. Das gesuchte Vielfache ergibt sich direkt aus dem Vergleich von Beschleunigungswert und Ortsfaktor:

$$F_\mathrm{N} = x \cdot F_\mathrm{G} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F_\mathrm{N}}{F_\mathrm{G}} = \frac{F_\mathrm{res}}{F_\mathrm{G}} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{a}{g} = \frac{17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1.73$$

Der Fahrer wird beim Start also etwa mit $1.7\,g$ in den Sessel gedrückt resp. von diesem beschleunigt.

Beschleunigungen beim Wäscheschleudern

Wie stark wird die Wäsche beim Schleudern gegen die Trommelwand gedrückt?

Vorüberlegungen: Beim Schleudern drehe sich die Wäschetrommel mit $6\underline{0}\underline{0}$ Umdrehungen pro Minute. Dann dauert die einzelne Umdrehung $T = 0.100\,\mathrm{s}$.

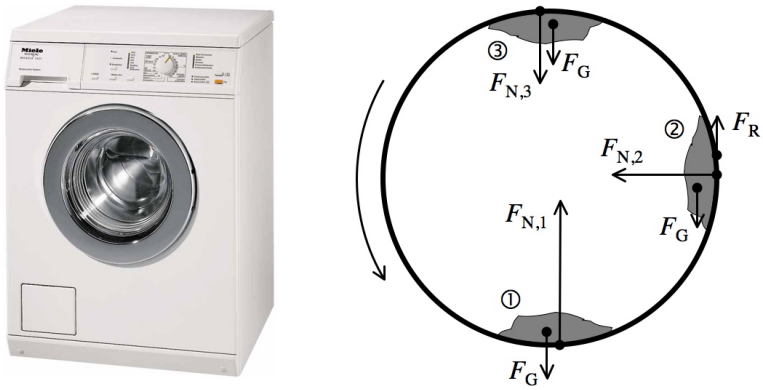
Die Trommel besitze einen Radius von $r = 24.0\,\mathrm{cm}$. Aus (22) folgt für die Bahngeschwindigkeit:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 0.240\,\mathrm{m}}{0.100\,\mathrm{s}} = 15.71\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Für die Zentripetalbeschleunigung erhalten wir aus (23):

$$a_Z = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(15.08\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0.240\,\mathrm{m}} = 947.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Kräftesituation: Wir betrachten einen Wäscheklumpen in drei Momenten der Drehung:



Folgerungen: In jedem der drei Momente erfährt der Wäscheklumpen total die gleich grosse Zentripetalkraft F_Z (= resultierende Kraft) in Richtung Trommelmitte, denn es handelt sich ja um eine gfK mit fixem Radius und fixer Geschwindigkeit.

Allerdings setzt sich F_Z in den drei Momenten unterschiedlich zusammen. Daraus schliessen wir auf unterschiedliche Normalkräfte, welche die Wäsche erfährt. Diese lassen sich jeweils in Vielfachen des Ortsfaktors angeben:

- **Situation 1:** Die Normalkraft muss zusätzlich die Gewichtskraft kompensieren:

  $$F_Z = F_{N,1} - F_G \quad \Rightarrow \quad F_{N,1} = F_Z + F_G$$

  $$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{F_{N,1}}{F_G} = \frac{F_Z + F_G}{F_G} = \frac{m \cdot a_Z + m \cdot g}{m \cdot g} = \frac{a_Z}{g} + 1 = \frac{947.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 96.59 + 1 = 97.6$$

  Die Wäsche wird mit $97.6\,g$ gegen die Wand gedrückt!

- **Situation 2:** Die Normalkraft ist gerade gleich der Zentripetalkraft, denn die Gewichtskraft wird durch die Reibungskraft kompensiert. Es folgt:

  $$F_{N,2} = F_Z \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{F_{N,2}}{F_G} = \frac{a_Z}{g} = \frac{947.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 96.59 = 96.6$$

  Die Wäsche wird neu mit $96.6\,g$ gegen die Wand gedrückt!

- **Situation 3:** Normalkraft und Gewichtskraft erzeugen gemeinsam die Zentripetalkraft:

  $$F_Z = F_{N,3} + F_G \quad \Rightarrow \quad F_{N,3} = F_Z - F_G \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{F_{N,3}}{F_G} = 96.59 - 1 = 95.6$$

  Die Wäsche wird "nur noch" mit $95.6\,g$ gegen die Wand gedrückt!

4.7 Das Newton'sche Gravitationsgesetz

Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Als **Gravitation** *(oder Schwer-/Gewichtskraft)* $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ *bezeichnen wir die anziehende Kraft, welche zwei Körper aufgrund ihrer Massen aufeinander ausüben.*

Für zwei Punktmassen m_1 *und* m_2 *im Abstand* r *gilt für den Betrag dieser anziehenden Kraft das sogenannte* **(Newton'sche) Gravitationsgesetz***:*

$$F_{\mathrm{G}} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{25}$$

Dabei bezeichnet G *die* **universelle Graviationskonstante***. Universell bedeutet:* G *hat im ganzen Universum den gleichen Wert, nämlich:*

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

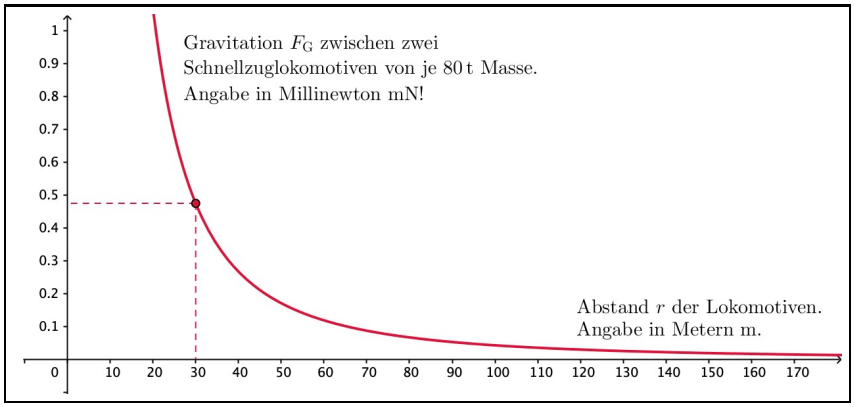
Anmerkungen zum Gravitationsgesetz

- Im Gravitationsgesetz werden sogenannte **Punktmassen** in die Rechnung eingesetzt. Damit ist ein theoretisches Konstrukt gemeint. Man lässt die Massen der sich anziehenden Körper auf Punkte zusammenschrumpfen, um einen sinnvollen Abstand zwischen ihnen zu definieren.

  Bei überall gleich dichten Kugeln sitzt die Punktmasse genau im Mittelpunkt. Das gilt in guter Näherung für Metallkugeln, aber eben auch für Sterne, Planeten und Monde. Um anders geformte Körper brauchen wir uns kaum Gedanken zu machen, denn die Gravitation ist eine so schwache Kraft, dass sie nur bei riesigen Massen wirklich spürbar und relevant wird.

- Die Gravitation ist proportional zu **beiden** beteiligten Massen.

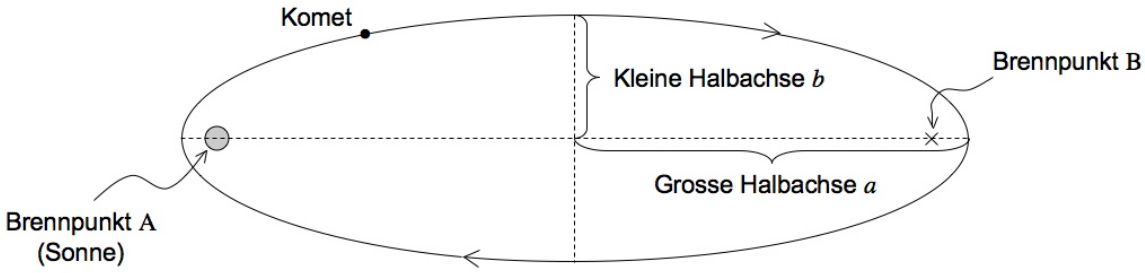
- Entscheidend am Gravitationsgesetz (25) ist das Abstandsquadrat r^2 im Nenner: Die Gravitation nimmt mit zunehmendem Abstand r relativ rasch ab, weist aber trotzdem eine **unendliche Reichweite** auf. Das folgende Diagramm zeigt dieses quadratische Abfallverhalten graphisch und illustriert zudem, wie klein die Gravitation in Alltagssituationen ist.



Die beiden Schnellzuglokomotiven mit doch ansehnlichen 80 Tonnen Masse ziehen sich mit gerademal einem knappen halben Millinewton an, wenn ihre Schwerpunkte einen Abstand von 30 Metern aufweisen – und näher können sie sich auf demselben Gleis kaum kommen! In 60 Metern Entfernung beträgt die Kraft nur noch ein Viertel. So funktioniert ein quadratisches Abfallverhalten: Bei Verdoppelung der Distanz viertelt sich der Wert, denn $2^2 = 4$.

4.8 Kreisbahnen von Himmelskörpern

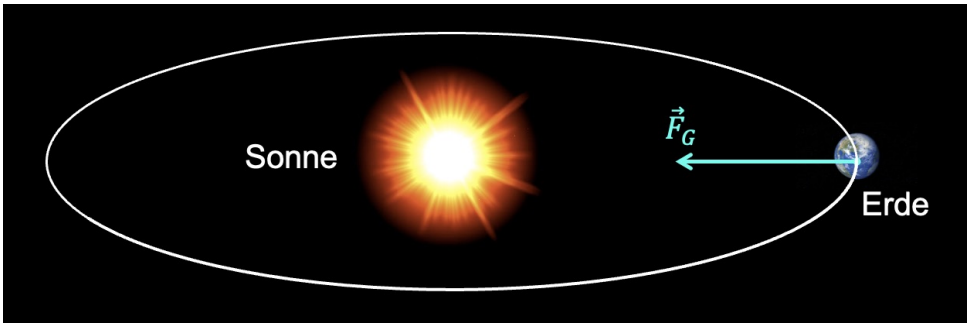
Aus der Newtonschen Mechanik folgt, dass sich leichtere Himmelskörper auf **elliptischen Bahnen** um viel massigere **Zentralkörper** bewegen. Dies gilt also z.B. für Satelliten/Monde um Planeten oder Planeten/Kometen um Sonnen (Sterne).



Es ist mathematisch recht anspruchsvoll, die Newtonsche Mechanik allgemein für ellipitsche Bahnen zu beschreiben. Viele Satelliten, Monde und Planeten – nicht hingegen Kometen – bewegen sich allerdings auf nahezu kreisförmigen Bahnen um den Zentralkörper (Kreis = Spezialfall einer Ellipse mit gleich grossen Halbachsen). Deshalb lassen sich deren Umlaufbewegungen bereits mit den uns bekannten Gleichungen zur gfK gut beschreiben.

Die "Himmelsgleichung" = Gleichung für Massen, die gravitativ um einen viel massigeren Zentralkörper kreisen

Himmelskörper bewegen sich alleine im nahezu perfekten Vakuum des Weltraums. Sie erfahren deshalb keinerlei Reibungs- oder Kontaktkräfte. D.h., die einzige auf einen Himmelskörper wirkende Kraft ist die Gravitation in Richtung des Zentralkörpers. Hier das Beispiel der um die Sonne kreisenden Erde:



Diese alleinige Kraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ muss laut Newton gleich der resultierenden Kraft $\vec{F}_{\mathrm{res}}$, und das bedeutet im Falle einer Kreisbewegung eben gleich der Zentripetalkraft $\vec{F}_{\mathrm{Z}}$ sein. Wir folgern:

$$\textbf{"Himmelsgleichung" (Masse kreist um Zentralkörper):} \qquad \vec{F}_{\mathrm{Z}} = \vec{F}_{\mathrm{G}} \tag{26}$$

Durch Gleichsetzen der Kraftbeträge folgt aus (24) und (25):

$$F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = F_{\mathrm{G}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M}{r} \tag{27}$$

Dabei schreibt man für die Masse des Zentralkörpers gerne ein grosses M und für jene des kreisenden Körpers ein kleines m.

Wie wir sehen, kürzt sich bei gravitativen Kreisbewegungen um Zentralkörper die Masse m des kreisenden Körpers weg. Das ist immer so. Für die Umlaufszeiten oder Geschwindigkeiten von Satelliten ist die Satellitenmasse also stets bedeutungslos.

Bahnradius und Umlaufszeit

Ist alleine die Gravitation für eine kreisförmige Umlaufbahn verantwortlich, so gehört zu jedem Bahnradius r eine ganz bestimmte Umlaufszeit T. Die mathematische Beziehung ergibt sich direkt aus Gleichung (27), wenn auf der linken Seite die Gleichung (22) für die Bahngeschwindigkeit v bei einer gfK eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} & v^2 = \frac{G \cdot M}{r} && \mid v = \frac{2\pi r}{T} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M}{r} && \mid : (4\pi^2 r^2) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2\, r^3} && \mid (\ldots)^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad & T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M} && \mid \sqrt{\ldots} \\ \Rightarrow \quad & T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M}} \end{aligned}$$

Soll ein Satellit auf einer bestimmten Höhe ausgesetzt werden, so ist dadurch also bereits vorgegeben, wie lange seine Umlaufzeit zu dauern hat. Das gilt z.B. auch für das Space Shuttle. Arbeitet es mit abgestelltem Antrieb auf einer Höhe von 450 km über der Erdoberfläche, so ergibt sich für die Dauer einer Erdumrundung:[6]

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (6\,820\,000\,\mathrm{m})^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}} = 5607\,\mathrm{s} = 93\,\mathrm{min}$$

Geostationäre Satelliten

Umgekehrt kann man nun fragen, auf welcher Höhe ein Satellit positioniert werden muss, wenn man eine bestimmte Umlaufszeit vorgeben möchte. Aus obiger Gleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M}{r} && \mid \cdot \frac{r \cdot T^2}{4\pi^2} \\ \Leftrightarrow \quad & r^3 = \frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2} && \mid \sqrt[3]{\ldots} \\ \Rightarrow \quad & r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}} \end{aligned}$$

Speziell nützlich für die Wetterbeobachtung sind **geostationäre Satelliten**. Diese stehen stets über demselben Ort auf dem Äquator. Dies ist möglich, weil ihre Flughöhe so gross ist, dass die Umlaufszeit gerade einen Tag beträgt. Berechnen wir den zugehörigen Bahnradius:[7]

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot (86\,400\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2}} = 42.2 \cdot 10^6\,\mathrm{m} = 42\,200\,\mathrm{km}$$

Für die Höhe über Erdboden folgt: $h = r - R = 42\,200\,\mathrm{km} - 6370\,\mathrm{km} = 35\,800\,\mathrm{km}$. Geostationäre Satelliten sind im Vergleich zu anderen Satelliten sehr weit von der Erde entfernt!

[6] Erdradius $R = 6370\,\mathrm{km} \Rightarrow$ Bahnradius $r = 6370\,\mathrm{km} + 450\,\mathrm{km} = 6820\,\mathrm{km}$, Erdmasse $M = 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$

[7] $T = 1\,\mathrm{Tag} = 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 86\,400\,\mathrm{s}$

5 Arbeit, Energie und Leistung

⇒ Energetische Betrachtungen – allgemein und speziell für die Mechanik

5.1 Arbeit, Energie und Leistung beim VBZ-Bus

Die Kapitel 2 und 3 liefern sämtliche Daten, um zur Fahrt des Busses nun auch energetische Betrachtungen anzustellen. Diese werden hier als Beispiele dienen.

5.2 Die Definition der Arbeit W: "Arbeit ist Kraft mal Weg"

Vorgänge resp. Abläufe sind in der Regel mit einem Arbeitsaufwand verbunden. Die Physik möchte den für einen Vorgang benötigten Arbeitsaufwand als Zahl mit Einheit angeben können. Dazu definiert sie die Arbeit – resp. gedacht eben: den **Aufwand** für eine Arbeit – wie folgt:

Die Definition der Arbeit W (= Goldene Regel der Mechanik)

Auf einen Körper wirke eine konstante Kraft $\vec{F}$. Wird der Körper um die Strecke s in die Richtung von $\vec{F}$ bewegt (egal wie und warum), so wird aufgrund dieser Kraft die **Arbeit** *W am Körper verrichtet. Diese ist definiert durch:*

$$W = F \cdot s \tag{28}$$

"Arbeit = Kraft mal Weg."

Anmerkungen zur Arbeitsdefinition

- Das Symbol W hat seinen Ursprung im englischen Wort *work*.
- **Idee der Arbeitsdefinition:** Bei (mechanischen) Vorgängen geht es um die **Verschiebung** von Objekten. Zwei Faktoren machen eine solche Verschiebung aufwändig:
  i. Es muss mehr Arbeit verrichtet werden, wenn die dafür benötigte Kraft gross ist → F.
  ii. Je weiter die Verschiebung geht, desto mehr Arbeit muss verrichtet werden → s.

  Die Kombination beider Aspekte lautet: "Arbeit ist Kraft mal Weg." Diese Aussage bezeichnet man auch als die **Goldene Regel der Mechanik**.
- **Die Verschiebung des Körpers um die Strecke s muss in Richtung der Kraft $\vec{F}$ erfolgen.** Nur genau dann gilt die Arbeitsdefinition in dieser Form.
- **Der Kraftbetrag F muss über die Strecke hinweg konstant sein (oder es muss sich um einen Mittelwert handeln), damit man sie in diese Definition einsetzen darf.** Was sollte man denn sonst für den Wert von F einsetzen?
- Die Arbeit W erhält eine eigene SI-Grundeinheit, das **Joule** J. Aus der Arbeitsdefinition folgt für die Zusammensetzung des Joules aus SI-Grundeinheiten:

$$[\,W\,] = [\,F\,] \cdot [\,s\,] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} =: \mathrm{Joule} = \mathrm{J}$$

Beispielrechnungen und -überlegungen am VBZ-Bus

Ungerundete Bewegungs- und Kraftdaten aus den Kapiteln 2 und 3:

Allgemein:	Busmasse:	$m = 26\,000\,\mathrm{kg}$
	Normalkraft:	$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} = m \cdot g = 255\,060\,\mathrm{N}$
	Rollreibungszahl:	$\mu_\mathrm{R} = 0.0075$
	Rollreibungskraft:	$F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{N} = 1913\,\mathrm{N}$
1. Bewegungsabschnitt:	Resultierende Kraft:	$F_{\mathrm{res},1} = m \cdot a_1 = 46\,429\,\mathrm{N} \quad \left(a_1 = 1.786\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$
	Motorenkraft:	$F_{\mathrm{M},1} = F_{\mathrm{res},1} + F_\mathrm{R} = 48\,342\,\mathrm{N}$
2. Bewegungsabschnitt:	Motorenkraft:	$F_{\mathrm{M},2} = F_\mathrm{R} = 1913\,\mathrm{N}$
3. Bewegungsabschnitt:	Resultierende Kraft:	$F_{\mathrm{res},3} = m \cdot a_3 = 65\,000\,\mathrm{N} \quad \left((-)\,2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$
	Bremskraft:	$F_{\mathrm{Brems},3} = F_{\mathrm{res},3} - F_\mathrm{R} = 63\,087\,\mathrm{N}$

- Die Reibungskraft wirkt stets entgegen der Bewegungsrichtung des Busses. Das bedeutet, dass der Bus aufgrund dieser Kraft selber Arbeit abgeben muss. Wir sprechen von **Reibungsarbeit** W_R. Diese lässt sich leicht berechnen, insgesamt und auf den drei Teilstrecken:

1. Bewegungsabschnitt:	$W_{\mathrm{R},1} = F_\mathrm{R} \cdot s_1 = 1913\,\mathrm{N} \cdot 43.75\,\mathrm{m} = 83\,694\,\mathrm{J} = 84\,\mathrm{kJ}$
2. Bewegungsabschnitt:	$W_{\mathrm{R},2} = F_\mathrm{R} \cdot s_2 = 1913\,\mathrm{N} \cdot 125\,\mathrm{m} = 239\,125\,\mathrm{J} = 240\,\mathrm{kJ}$
3. Bewegungsabschnitt:	$W_{\mathrm{R},3} = F_\mathrm{R} \cdot s_3 = 1913\,\mathrm{N} \cdot 31.25\,\mathrm{m} = 59\,781\,\mathrm{J} = \underline{60}\,\mathrm{kJ}$
Gesamtreibungsarbeit:	$W_{\mathrm{R,total}} = W_{\mathrm{R},1} + W_{\mathrm{R},2} + W_{\mathrm{R},3} = 382\,600\,\mathrm{J} = 380\,\mathrm{kJ}$

- Solange der Buschauffeur aufs Gaspedal drückt, verrichtet der Motor Arbeit am Bus, denn die Motorenkraft zieht in Bewegungsrichtung $\rightarrow W_\mathrm{M}$:

  2. Bewegungsabschnitt: Auf diesem Bewegungsabschnitt verrichtet der Motor am Bus insgesamt die Arbeit, die dieser in Form von Reibungsarbeit wieder abgibt:

  $$W_{\mathrm{M},2} = W_{\mathrm{R},2} = 239\,125\,\mathrm{J} = 240\,\mathrm{kJ}$$

  1. Bewegungsabschnitt: Der Motor muss einerseits den Bus beschleunigen und andererseits die Reibung kompensieren. Unter Verwendung der Arbeitsdefinition werden **Beschleunigungsarbeit** $W_{\mathrm{B},1}$ und Kompensation der Reibungsarbeit $W_{\mathrm{R},1}$ gut erkennbar:

  $$W_{\mathrm{M},1} = F_{\mathrm{M},1} \cdot s_1 = (F_{\mathrm{res},1} + F_\mathrm{R}) \cdot s_1 = \underbrace{F_{\mathrm{res},1} \cdot s_1}_{= W_{\mathrm{B},1}} + \underbrace{F_\mathrm{R} \cdot s_1}_{= W_{\mathrm{R},1}}$$

  $$= 2031.3\,\mathrm{kJ} + 83.7\,\mathrm{kJ} = 2115\,\mathrm{kJ} \approx 2.1\,\mathrm{MJ}$$

  Das Anfahren ist deutlich aufwändiger als die gleichförmige Fortsetzung der Fahrt.

- Während dem Abbremsen (3. Bewegungsabschnitt) gibt der Bus nur noch Arbeit ab. Dies geschieht aufgrund zweier Kräfte. Einerseits wirkt immer noch die Rollreibung. Andererseits gibt es eine zusätzliche Haftreibung zwischen Pneus und Strasse, welche von der Verlangsamung der Räder aufgrund der Bremsen herrührt. Für diese abgegebene Bremsarbeit $W_{\mathrm{Brems},3}$ gilt:

  $$W_{\mathrm{Brems},3} = F_{\mathrm{Brems},3} \cdot s_3 = 63.087\,\mathrm{kN} \cdot 31.25\,\mathrm{m} = 1972\,\mathrm{kJ} = 2.0\,\mathrm{MJ}$$

5.3 "Der Arbeitsbetrag ist prozessunabhängig!"

Die an einem Körper verrichtete Arbeit verändert automatisch dessen **Zustand**.

Was damit gemeint ist, verstehen wir besser am konkreten Beispiel: Die Beschleunigungsarbeit im 1. Bewegungsabschnitt bringt den VBZ-Bus von Geschwindigkeit 0 (= erster Bewegungszustand) auf $12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (= zweiter Bewegungszustand).

Für die Beschleunigungsarbeit W_B darf es allerdings nicht darauf ankommen, wie diese Beschleunigung abläuft. Wenn wir alle Störeffekte, insbesondere alle Arten von Reibung, ausblenden, sollte für das Erreichen der Endgeschwindigkeit stets derselbe Aufwand, also der gleiche Arbeitsbetrag benötigt werden. Das ist eine wesentliche Anforderung an eine sinnvolle Arbeitsdefinition!

Beim VBZ-Bus darf es also keine Rolle spielen, mit welcher Beschleunigung er seine Endgeschwindigkeit von $12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ erreicht, die Beschleunigungsarbeit W_B muss stets denselben Wert aufweisen.

Tatsächlich genügt die Arbeitsdefinition $W = F \cdot s$ dieser Anforderung, was am Beispiel des VBZ-Busses auch ganz plausibel wird: Entweder beschleunigt der Bus mit grosser Kraft F, also auch mit grosser Beschleunigung, dann braucht er aber nur eine kurze Beschleunigungsstrecke s. Oder der Bus beschleunigt langsam, also mit geringer Kraft F, was aber eine längere Beschleunigungsstrecke s zur Folge hat.

Dass unsere Arbeitsdefinition vom tatsächlichen Prozessablauf unabhängige Arbeitsbeträge liefert, ist enorm wichtig, denn dies wird es uns ermöglichen **Energie** als das in einem Zustand gespeicherte Arbeitsvermögen zu definieren (vgl. Abschnitt 5.5). Dieser enorm fruchtbare und weitreichende Gedanke ist wohl der eigentlich Grund, weshalb die Arbeitsdefinition (28) als **Goldene Regel der Mechanik** bezeichnet wird.

5.4 Exkurs: Kraftwandler

Wie eben im Abschnitt 5.3 erläutert, ist der Arbeitsaufwand für eine bestimmte Zustandsänderung unabhängig vom Prozess, mit dem diese Zustandsänderung erreicht wird. Das bedeutet aber, dass es für uns "beim Arbeiten" resp. bei der Konstruktion von Maschinen gewisse Freiheiten gibt. Ganz explizit ausgedeutscht: Wir können selber entscheiden, mit wie viel Kraft F ein Prozess verrichtet wird, solange es uns gleich ist, welche Wegstrecke s dafür zurückgelegt werden muss. Die für den Prozess benötigte Arbeit $W = F \cdot s$ bleibt dadurch unverändert!

Technische Hilfsmittel erlauben uns also die für einen Vorgang benötigte Kraft selber einzustellen. Solche Hilfsmittel nennen wir **Kraftwandler**. Hier ein paar ganz typische Beispiele (Bilder dazu finden sich auf der nächsten Seite):

Normaler Flaschenzug: Ein Gewicht wird am selben Seil n-fach aufgehängt. Dadurch reduziert sich die Zugkraft im Seil um den Faktor n: $F_\mathrm{Z} = \frac{F_\mathrm{G}}{n}$. Gleichzeitig ist die Seilstrecke s, die man aus dem Flaschenzug herausziehen muss, um das Gewicht um eine bestimmte Höhe h anzuheben, n-mal so gross: $s = n \cdot h$! Es gilt also für das Anheben des Gewichts:

$$\text{Arbeit mit Flaschenzug} = F_\mathrm{Z} \cdot s = \frac{F_\mathrm{G}}{n} \cdot n \cdot h = F_\mathrm{G} \cdot h = \text{Arbeit mit nur einem Seil}$$

Hebel: Hebel sind wohl die klassischsten Kraftwandler: eine kleine Kraft F_1 kann über einen längeren **Hebelarm** r_1 (= Abstand zur Drehachse) in eine grössere Kraft F_2 bei kürzerem Hebelarm r_2 umgewandelt werden. Es gilt das sogenannte **Hebelgesetz**, das in direkter Verwandtschaft mit unserer Arbeitsdefinition steht:

$$\textbf{Hebelgesetz:} \qquad F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

Nach diesem Prinzip arbeiten z.B. Zangen, Nussknacker, Brecheisen, Schraubenschlüssel, Türfallen, etc. Wenn man bedenkt, wo das Hebelprinzip überall zur Anwendung kommt, wäre eine Welt ohne Hebel für uns vermutlich wesentlich mühsamer...

Zahnräder/Getriebe: Bei der Übersetzung von einem kleineren auf ein grösseres Zahnrad gewinnt der Mechanismus an Kraft. Allerdings muss sich das kleinere Zahnrad schneller drehen als das grosse. Umgekehrt lässt sich so auf Kosten der Kraft eine grosse Geschwindigkeit erzeugen.

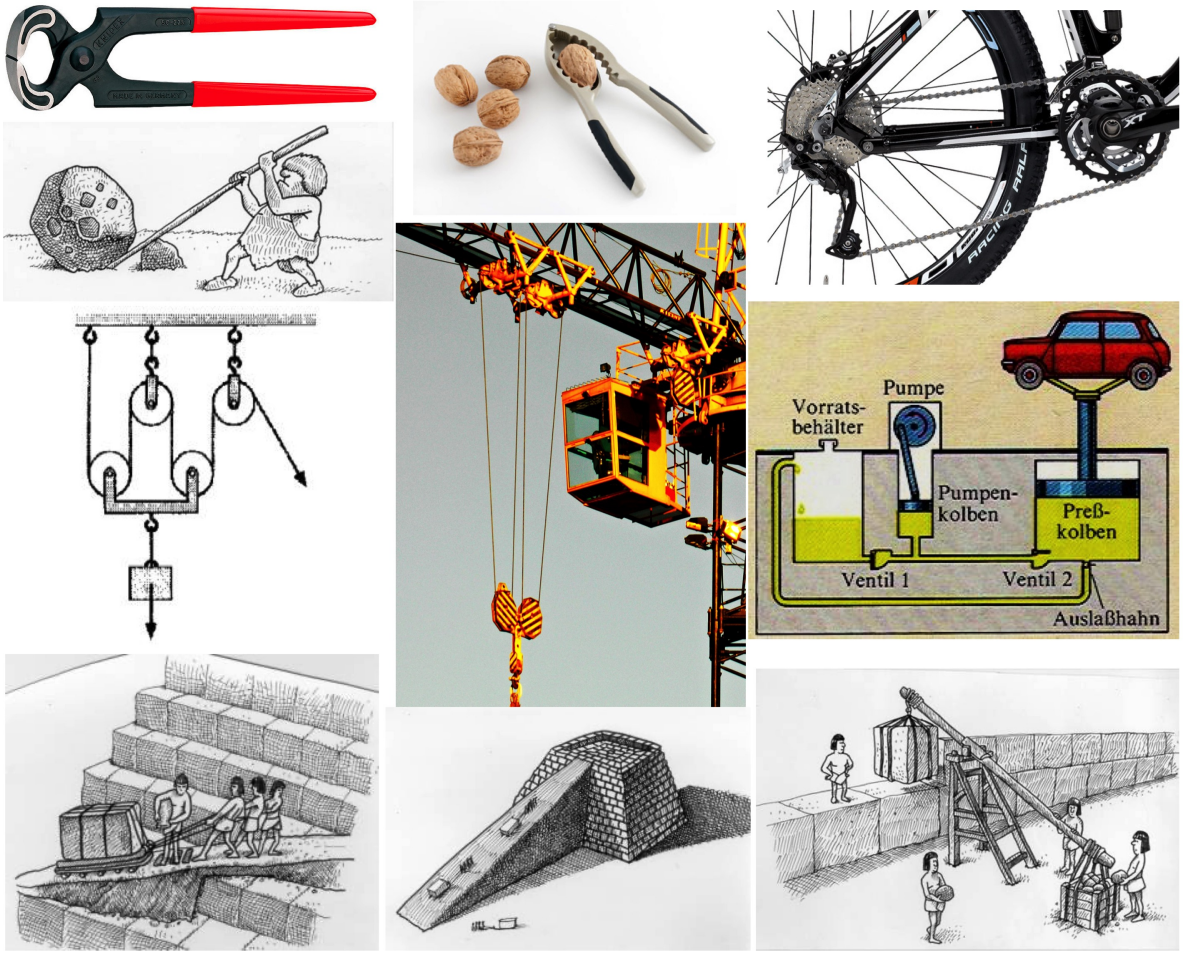
Zahnräder spielen in Getrieben eine grosse Rolle. Z.B. entwickeln Verbrennungsmotoren in Autos bei bestimmten Drehzahlen besonders viel Kraft. Dann sollte man darauf achten, dass das Auto normalerweise mit dieser Drehzahl fährt und das Zahnradgetriebe hinter dem Motor die entsprechende Übersetzung auf die gewünschte Fahrtgeschwindigkeit bewerkstelligen lassen.

Natürlich gilt Analoges beim Fahrradfahren: Es ist nicht möglich mit beliebig viel Kraft in die Pedale zu treten. Daher schalten wir einen Gang runter, wenn es bergauf geht...

Rampe: Das Hochziehen eines Gewichts über eine Rampe verringert die Zugkraft F_Z. Die Gewichtskraft F_G, die Sie beim gleichförmigen vertikalen Hochziehen des Gewichts kompensieren müssten, wird auf die Parallelkomponente $F_{G,\parallel} = F_G \cdot \sin\alpha$ reduziert. Hingegen ist der Weg über die Rampe länger: $s = \frac{h}{\sin\alpha}$, sodass immer noch der gleiche Arbeitsaufwand anfällt:

$$\text{Zugarbeit über Rampe} = F_Z \cdot s = F_{G,\parallel} \cdot s = F_G \cdot \sin\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = F_G \cdot h$$

Hydraulische Hebebühnen: In hydraulischen Hebevorrichtungen übernimmt der Druck in der Flüssigkeit die Rolle eines Kraftwandlers. Wie das genau geht, erfahren wir im Kapitel 6.



5.5 "Energie ist gespeichertes Arbeitsvermögen"

Die an einem Körper verrichtete Arbeit W geht nicht einfach verloren. Sie ist im Zustand des Körpers gespeichert und unter Umständen wieder abrufbar. Eine solche gespeicherte Arbeit bezeichnen wir als **Energie**:

> **Die physikalische Definition der Energie E**
>
> *Die Energie eines Zustandes ist das in diesem Zustand gespeicherte Arbeitsvermögen. Dabei ist der Ausdruck "gespeichert" im doppelten Sinn zu verstehen:*
>
> 1. *Bezogen auf die Vergangenheit:*
>
>   *Es war Arbeit nötig, um diesen Zustand zu erreichen.*
>
> 2. *Bezogen auf die Zukunft:*
>
>   *Die im Zustand vorhandene Energie kann als Arbeit abgegeben werden.*

Energie ist gespeichertes Arbeitsvermögen. Darin stecken sowohl **Nutzen**, als auch **Gefahr**. Den energiereichen Zustand eines Systems erkennen wir genau daran, dass er eben nützlich, aber genauso gefährlich sein kann. Denke z.B. an einen Kanister Brennsprit, an einen Stausee, oder an eine Steckdose. Gefahr und Nutzen gehen Hand in Hand!

Beispielüberlegung am VBZ-Bus

Die im 1. Bewegungsabschnitt am Bus verrichtete Beschleunigungsarbeit $W_{\mathrm{B},1}$ speichert der Bus in Form von **kinetischer Energie** $E_{\mathrm{kin},2}$ (= Bewegungsenergie). Diese Energie bleibt im 2. Bewegungsabschnitt erhalten, da sich der Bus gleichförmig bewegt. Im letzten Abschnitt der Fahrt gibt der Bus diese Energie wieder ab, und zwar in Form von Reibungs- und Bremsarbeit $W_{\mathrm{R},3}$ und $W_{\mathrm{Brems},3}$. Man bemerke also (vgl. Werte auf Seite 45):

$$E_{\mathrm{kin},2} = W_{\mathrm{B},1} = W_{\mathrm{Brems},3} + W_{\mathrm{R},3} \qquad \text{in Zahlenwerten:} \quad 2031.3\,\mathrm{kJ} \approx 1972\,\mathrm{kJ} + 59.8\,\mathrm{kJ}$$

5.6 Hubarbeit W_{Hub} und potentielle Energie E_{pot}

Beim Anheben eines Körpers wird **Hubarbeit** W_{Hub} an ihm verrichtet. Diese Arbeit erfolgt gegen die Gewichtskraft F_{G}. Die Höhendifferenz h entspricht der zurückgelegten Strecke. Aus der Arbeitsdefinition (28) und der Gleichung (17) für die Gewichtskraft folgt:

$$W_{\mathrm{Hub}} = F_{\mathrm{G}} \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

Hubarbeit speichert der Körper in Form von **Höhenenergie**, die auch als **Energie der Lage** oder **potentielle Energie** E_{pot} bezeichnet wird.

> **Berechnung einer potentiellen Energie E_{pot}**
>
> *Befindet sich ein Körper der Masse m auf der Höhe h über einem vorher definierten Nullniveau (NN), so besitzt er bezogen auf dieses Nullniveau eine potentielle Energie E_{pot} von:*
>
> $$E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot h \tag{29}$$
>
> *Die potentielle Energie ist die gespeicherte Hubarbeit W_{Hub}, die benötigt wurde, um den Körper vom Nullniveau auf die Höhe h anzuheben.*

Anmerkungen zur Hubarbeit W_{Hub} und zur potentiellen Energie E_{pot}

- Bei der Angabe einer potentiellen Energie muss zwingend ein **Nullniveau (NN)** angegeben werden. Ansonsten weiss man gar nicht, worauf sich die Energieangabe bezieht. Ohne Deklaration des Nullniveaus bleibt die Angabe einer potentiellen Energie bedeutungslos. Häufig legt aber bereits die Situation ein "natürliches" Nullniveau fest.

  Z.B. ist das Nullniveau der potentiellen Energie bei einem Wasserkraftwerk in den Bergen sinnvollerweise gegeben durch die Höhenlage der Turbinen.

- 1 Newton, also die SI-Einheit der Kraft, entspricht gerade etwa der Gewichtskraft einer Tafel Schokolade (vgl. Seite 25). Auch beim Joule, also bei der SI-Einheit von Arbeit und Energie, gibt es das einfache "Schokoladentafel-Beispiel" zur Verdeutlichung.

  Das Anheben einer Schokoladentafel ($m \approx 100\,\text{g}$) um einen Meter benötigt eine Hubarbeit von gerade etwa 1 Joule:

$$W_{\text{Hub}} = m \cdot g \cdot h = 0.1\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 1\,\text{m} = 0.981\,\text{J} \approx 1\,\text{J}$$

5.7 Beschleunigungsarbeit W_{B} und kinetische Energie E_{kin}

Beim der Beschleunigung eines Körpers wird **Beschleunigungsarbeit** W_{B} an ihm verrichtet. Diese Arbeit ist gekoppelt an die für die Beschleunigung benötigte resultierende Kraft F_{res}. Die in der Arbeitsdefintion auftretende Strecke ist die Strecke s, über welche hinweg das schneller Werden stattfindet.

Zur Herleitung der Beschleunigungsarbeit W_{B} betrachten wir eine gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit (gmbBoA). Aus der Arbeitsdefinition (28), dem Aktionsprinzip (14) und der Bewegungsgleichung (8) von Seite 17 folgt:

$$W_{\text{B}} = F_{\text{res}} \cdot s = m \cdot a \cdot s = m \cdot a \cdot \frac{v^2}{2a} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Beschleunigungsarbeit speichert der Körper in Form von **Bewegungsenergie**, die auch als **kinetische Energie** E_{kin} bezeichnet wird.

Berechnung einer kinetischen Energie E_{kin}

Besitzt ein Körper der Masse m die Geschwindigkeit v, so trägt er eine kinetische Energie E_{kin} von:

$$E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2} \tag{30}$$

Die kinetische Energie ist die gespeicherte Beschleunigungsarbeit W_{B}, die benötigt wurde, um den Körper aus dem Stand auf die Geschwindigkeit v zu bringen.

Am Beispiel des VBZ-Busses sei gezeigt, wie sich die Beschleunigungsarbeit resp. die kinetische Energie in einem konrekten Fall berechnen lässt. Die im 1. Bewegungsabschnitt verrichtete Beschleunigungsarbeit $W_{\text{B},1}$ bleibt als kinetische Energie $E_{\text{kin},2}$ während dem 2. Abschnitt gespeichert:

$$E_{\text{kin},2} = W_{\text{B},1} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{26\,000\,\text{kg} \cdot \left(12.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 2\,031\,000\,\text{J} = 2031\,\text{kJ}$$

Denselben Wert haben wir bereits auf Seite 45 erhalten ($2031.3\,\text{kJ}$). Die kleine Abweichung ist auf die Rundung des dort verwendeten Betrags für die resultierende Kraft zurückzuführen.

5.8 Weitere Energieformen

Neben potentieller und kinetischer Energie gibt es zahlreiche weitere **Energieformen**. D.h., es bestehen diverse weitere Möglichkeiten, wie im Zustand eines Körpers oder eines Systems von Körpern Arbeit gespeichert sein kann. Hier eine Auswahl:

- **Rotationsenergie E_{rot}**

  Dreht sich ein Körper um eine Achse, so ist auch in dieser Art der Bewegung Energie enthalten. Es handelt sich um eine spezielle Form der kinetischen Energie.

  Ein typisches Beispiel sind Schwungräder in Motoren und Schleifmaschinen. Die in der Drehbewegung enthaltene Energie wird bei Bedarf dazu eingesetzt, die Drehbewegung aufrecht zu erhalten. Das Schwungrad sorgt so für ein gleichmässiges Drehen. Auch in der Kreisbewegung von Planeten um die Sonne ist Rotationsenergie enthalten.

- **Elastische Energie E_{F}**

  Dehnbare Gegenstände, z.B. eine Spiralfeder, enthalten in ihrem angespannten Zustand elastische Energie. Man sagt auch **Federenergie** (daher das F im Index).

  Ein gespannter Pfeilbogen ist ein schönes Beispiel für elastische Energie.

E_{pot}, E_{kin}, E_{rot} und E_{F} werden auch als **mechanische Energieformen** bezeichnet.

- **Innere Energie E_{in}**

  Alle Stoffe können Energie in sich aufnehmen. Sinngemäss sagen wir dieser Energieform innere Energie. Wir bemerken sie vor allem anhand der Temperatur eines Körpers. (Diese innere Energie ist übrigens nichts anderes als die kinetische und die potentielle Energie der Atomen oder Molekülen, aus denen sich der Körper zusammensetzt.)

  Niemand wird die Gefahren bestreiten, die in einer heissen Herdplatte oder in siedendem Wasser stecken.

- **Elektrische Energie E_{el}**

  Unter elektrischen Ladungen herrschen anziehende und abstossende Kräfte. Wie bei der potentiellen Energie, die auf der Anziehung von Massen beruht, gibt es eine elektrische Energie, die je nach gegenseitiger Lage der Ladungen grösser oder kleiner ist. Aufgrund von elektrischer Energie bewegen sich Ladungen, wird also Strom hervorgerufen.

  Wir verwenden diese elektrische Energie, wenn wir ein Gerät an die Steckdose anschliessen. Dem Elektrizitätswerk bezahlen wir die gelieferte Menge an elektrischer Energie. Der Blitz ist das Paradebeispiel für das Freiwerden von elektrischer Energie. Der Zustand vor der Entladung der aufgeladenen Wolken ist offensichtlich sehr gefährlich.

- **Strahlungsenergie E_{S}**

  Licht und andere Sorten von Strahlung tragen Energie. Dies merken Sie z.B. an einem schönen Tag. Trotz geschlossener Augen nehmen Sie die Richtung wahr, aus welcher die Strahlung kommt. Beim Auftreffen auf Ihre Haut wird ein Teil der Strahlungsenergie in innere Energie umgewandelt. Sie spüren eine Erwärmung. Die Strahlungsenergie der Sonne möchten wir in Zukunft technisch besser ausnutzen, da sie uns gratis zur Verfügung steht (→ Fotovoltaik (Solarzellen), Sonnenkollektoren, Solarkraftwerke).

  Sehr energiereiche Strahlung ist für uns Menschen gefährlich. Denken Sie z.B. an ultraviolette Strahlung (UV ⇒ Sonnenbrand), an Röntgenstrahlung oder auch an radioaktive Strahlung (hohe Dosen ⇒ Krebs oder sogar direkte Verbrennungen).

- **Chemische Energie E_{chem}**

  Viele chemische Reaktionen laufen spontan ab, weil dabei chemische Energie freigesetzt wird. D.h., die an der Reaktion beteiligten Atome besitzen vor der Reaktion mehr Energie als nachher. Diese überzählige Energie wird bei der Reaktion frei. Man nennt sie auch Bindungsenergie. Möchte man die entstandene Verbindung wieder auftrennen, so muss man ihr die Bindungsenergie wieder zuführen.

  Typische Beispiele für die Freisetzung von chemischer Energie sind Verbrennungsvorgänge (Verbindung mit Sauerstoffatomen). Z.B. verbrennen wir Heizöl zur Beschaffung von Wärme (innere Energie) oder Benzin in einem Motor, damit ein Auto fährt, also mit kinetischer Energie versorgt wird.Ganz offensichtlich werden die mit der chemischen Energie verbundenen Gefahren bei sehr heftigen Reaktionen wie beispielsweise Explosionen von Treibstoffen.

5.9 Der Energieerhaltungssatz – allgemein und speziell für die Mechanik

Die Gleichungen (29) und (30) zeigen, wie sich potentielle und kinetische Energien in einer konkreten Situation berechnen lassen. Im Prinzip kann man zu allen Energieformen eine solche Berechnungsgleichung aufstellen.

Die **Gesamtenergie** E_{tot} eines Systems lässt sich somit in jedem beliebigen Zustand genau bestimmen. Sie ist die Summe über alle im System vorkommenden einzelnen Energieformen:

$$E_{\text{tot}} = \text{Summe über alle vorhandenen Energieformen}$$

Wichtig dabei ist die genaue Abgrenzung des **Systems**: Welche Körper gehören zum betrachteten System und welche nicht? Erst wenn das klar ist, kann man die im System auftretenden Energieformen studieren.

Ist das System so beschaffen, dass es mit Körpern ausserhalb des Systems keine Energie austauscht, so bezeichnen wir es als **abgeschlossenes System**. D.h., wenn am System keine Arbeit verrichtet wird und das System selber auch keine Arbeit abgibt, so ist es abgeschlossen.

Der allgemeine Energieerhaltungssatz (Mayer, Joule, Helmholtz)

In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie erhalten:

$$E_{\text{tot}} = \text{konstant}$$

Alternative Formulierung: Die Summe über die Energien aller an einem Vorgang beteiligten Körper (= bezüglich diesem Vorgang abgeschlossenes System) bleibt konstant. Egal, welcher Vorgang abläuft, die Gesamtenergie bleibt dadurch unverändert! Sie hat vor, während und nach dem Vorgang den genau gleichen Wert.

Energie kann weder erzeugt, noch vernichtet, sondern lediglich von einer Energieform in eine andere Energieform umgewandelt werden!

Bisher wurde kein Vorgang beobachtet, welcher dem Prinzip der Energieerhaltung widersprechen würde. Es ist offenbar eines der fundamentalsten Naturgesetze.

Da auch das Universum als Ganzes sinnvollerweise als abgeschlossenes System betrachtet werden muss, ist die Gesamtenergie des Universums konstant, und zwar seit jeher, also seit dem Urknall.

Der Energieerhaltungssatz lässt sich wie folgt auf mechanische Abläufe einschränken:

> **Der Energieerhaltungssatz der Mechanik**
>
> *Bei reibungsfreien Vorgängen bleibt die Summe über die mechanischen Energieformen (E_{pot}, E_{kin}, E_{rot}, E_{F}) aller beteiligten Körper konstant.*

Anmerkungen zur Energieerhaltung in der Mechanik

- Zur Erinnerung: Mechanische Energieformen sind E_{pot}, E_{kin}, E_{rot} und E_{F}.
- Der freie Fall ist ein Beispiel für einen reibungsfreien Prozess. Bei vernachlässigbar kleinem Luftwiderstand ist die Energieerhaltung gewährleistet. Betrachten wir einen Ball mit der Masse m, der aus einer Höhe von $2.0\,\text{m}$ fallen gelassen wird:

  Zustand 1: Beim Loslassen besitzt der Ball noch keine kinetische Energie, da er noch keine Geschwindigkeit hat. Hingegen verfügt er dank seiner Höhe $h_1 = 2.0\,\text{m}$ über die potentielle Energie $E_{\text{pot},1}$ (Boden = Nullniveau).

  Fallvorgang: Während dem Fallen verliert der Ball sukzessive an potentieller Energie, da seine Höhe geringer wird. Gleichzeitig steigt seine kinetische Energie an, da er schneller wird. Die potentielle Energie wandelt sich in kinetische Energie um.

  Zustand 2: Genau dann, wenn der Ball am Boden ankommt, ist seine potentielle Energie vollständig in kinetische Energie $E_{\text{kin},2}$ umgewandelt worden. Er besitzt keine Höhe mehr. Hingegen hat er nun die Geschwindigkeit v_2 erreicht.

  Anwendung der Energieerhaltung: Die Umwandlung von potentieller in kinetische Energie vollständig ist, solange der Fallvorgang reibungsfrei war. Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
& E_{\text{kin},2} = E_{\text{pot},1} && \mid \text{Formeln einsetzen} \\
\Rightarrow \quad & \frac{m \cdot v_2^2}{2} = m \cdot g \cdot h_1 && \mid \cdot \frac{2}{m} \text{ und } \sqrt{\dots} \\
\Rightarrow \quad & v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} && \mid \text{Werte einsetzen} \\
& = \sqrt{2 \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 2.0\,\text{m}} = 6.3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}
$$

  Die formale Lösung $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$ entspricht übrigens genau der Gleichung (8) von Seite 17. Der Fallvorgang ist eine gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit (gmbBoA). Die zurückgelegte Strecke entspricht der Anfangshöhe ($s = h_1$) und der Fallvorgang läuft mit der Fallbeschleunigung g ab ($a = g$).

  Beim Aufprall schliesslich ist die mechanische Energieerhaltung zuende. Je nach Art des Balles und des Bodens geht mehr oder weniger mechanische Energie verloren.

  Bei einem Gummiball könnten z.B. pro Aufprall 20 % der mechanischen Energie verloren gehen. Der Energieverlust trägt zu den inneren Energien des Bodens und des Balles bei (⇒ minimale Erwärmung). Ganz deutlich sichtbar wird dieser Energieverlust nach dem Bodenkontakt. Der Ball erreicht dann nur noch 80 % seiner anfänglichen Höhe.

  Interessant sind die Vorgänge während dem Bodenkontakt. Der Ball wird auf kürzester Strecke abgebremst, bevor er wieder in Aufwärtsrichtung beschleunigt wird. Die verbleibende mechanische Energie steckt für einen kurzen Moment komplett in der elastischen Energie des Balls, denn dieser wird während dem Bodenkontakt zusammengedrückt.

- Beim VBZ-Bus lässt sich eher zeigen, wie die mechanische Energie im nicht-reibungsfreien Fall verloren geht. Die vom Motor verrichtete Arbeit W_{Motor} wird zwar zwischenzeitlich zur kinetischen Energie des Busses. Am Ende ist diese Arbeit allerdings komplett in innere Energie E_{in} der Strasse, der Pneus, der Reifen und der Umgebung übergegangen. Schuld daran ist die Reibung. Sie führt stets zur Erhöhung der inneren Energie.

  Definiert man als System hingegen den Bus, die Strasse und die nähere Umgebung zusammen, so ist dieses System bezüglich der Bewegung des Busses tatsächlich in guter Näherung (und über einen nicht allzu langen Zeitraum) abgeschlossen. Es gilt die Energieerhaltung. Die chemische Energie E_{chem}, welche vor der Bewegung in Form des Benzins vorhanden war, ist nach der Bewegung komplett in innere Energie E_{in} übergegangen. Dazwischen waren auch andere Energieformen, wie kinetische und Rotationsenergie, beteiligt.

5.10 Die Definition der Leistung P: "Leistung ist Energieumsatz pro Zeit"

In Prozessen wird Energie umgesetzt. Arbeit muss verrichtet werden oder es wird Arbeit frei, Energie wird von einem Körper auf einen anderen übertragen oder von einer Form in eine andere umgewandelt, etc. Alle Vorgänge sind mit **Energieumsätzen** ΔE verbunden.

Die **Leistung** P (engl. *power*) gibt nun an, wie rasch der Energieumsatz abläuft.

Die Definition der Leistung P

Ist ΔE der Energieumsatz während der Zeitspanne Δt, so definieren wir die **Leistung** *P durch:*

$$P := \frac{\Delta E}{\Delta t} \tag{31}$$

"Leistung = Energieumsatz pro Zeitspanne."

Anmerkungen zur Definition der Leistung

- Zur Leistung gehört eine eigene SI-Einheit, das **Watt**:

  $$[\,P\,] = \frac{[\,E\,]}{[\,t\,]} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^3} =: \text{Watt} = \text{W}$$

  Die Zusammensetzung des Watts aus SI-Basiseinheiten ist in der Anwendung nicht besonders wichtig ($\text{W} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^3}$), dafür umso mehr der Zusammenhang mit der Energieeinheit Joule:

  $$\text{J} = \text{W}\cdot\text{s} \qquad \textit{"Ein Joule ist eine Wattsekunde."}$$

- Mit der Leistungseinheit Watt wird eine weitere, sehr gebräuchliche und grosse Energieeinheit eingeführt, die **Kilowattstunde (kWh)**. Es gilt:

  $$\text{Kilowattstunde} = \text{kWh} = \text{k}\cdot\text{W}\cdot\text{h} = 1000\cdot\text{W}\cdot 3600\,\text{s} = 3\,600\,000\,\text{J} = 3.6\,\text{MJ}$$

  Merke dir: Es sind **immer Kilowattstunden (kWh)**, niemals Kilowatt pro Stunde (kW/h). Diese Einheit gibt es nicht. Sie ist einfach falsch.

- Je nachdem, welche Art von Energie umgesetzt wird, spricht man z.B. von elektrischer Leistung P_{el}, von Strahlungsleistung P_{S}, von Beschleunigungsleistung P_{B}, etc.

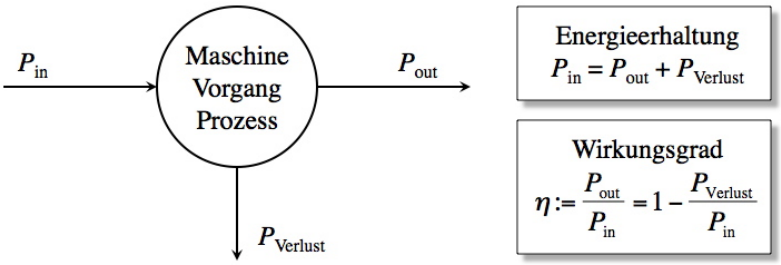
- Beim VBZ-Bus können wir z.B. die Beschleunigungsleistung im Bewegungsabschnitt 1 berechnen (Daten vgl. Seiten 10 und 49):

  $$P_{\text{B}} = \frac{\Delta E_{\text{kin},1}}{\Delta t_1} = \frac{W_{\text{B},1}}{\Delta t_1} = \frac{2\,031\,000\,\text{J}}{7.0\,\text{s}} = 290\,000\,\text{W} = 290\,\text{kW}$$

5.11 Das Maschinenschema und der Wirkungsgrad einer Maschine

Jeder Prozess / jeder Vorgang / jede Maschine wandelt Energie einer ersten Form in Energie einer zweiten Form um. D.h., es wird eine erste Art von Leistung eingespiesen ($\rightarrow P_{\text{in}}$) und es entsteht eine ausgehende Art von Leistung ($\rightarrow P_{\text{out}}$).

In der Regel wird allerdings nicht nur die "beabsichtigte" Art von Energie ausgegeben, sondern es entstehen **Verluste**. Man spricht von einer Verlustleistung P_{Verlust}. Dies wird durch das **Maschinenschema** des Prozesses, des Vorgangs oder der Maschine verdeutlicht:



Der **Wirkungsgrad** η (gr. *eta*) gibt an, wie gut eine Maschine, ein Prozess oder ein Vorgang darin ist, eine erste Energieform in eine bestimmte andere umzuwandeln:

Die Definition des Wirkungsgrades η

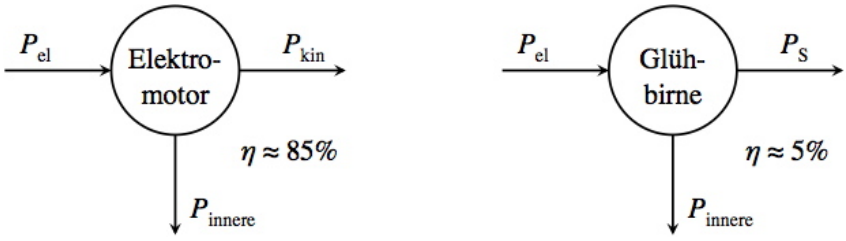
Wird bei einem laufenden Prozess die Leistung P_{out} abgegeben, währenddem die Leistung P_{in} zugeführt wird, so ist der **Wirkungsgrad η** *des Prozesses gegeben durch:*

$$\eta := \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \tag{32}$$

"Wirkungsgrad = abgegebene Leistung pro zugeführte Leistung."

Anmerkungen zum Wirkungsgrad

- Je höher der Wirkungsgrad, desto besser vermag die Maschine aus der ihr zugeführten Leistung die beabsichtigte Leistung zu erzeugen.
- Hier zwei Beispiele – ein eher gutes und ein eher schlechtes elektrisches Gerät:



  Die Verlustleistung hat sehr häufig mit der Abgabe von Wärme (innere Energie) zu tun. Es kommt allerdings darauf an, was man denn als Output-Energieform beabsichtigt hat. Bei einem Wasserkocher ist z.B. die ans Wasser abgegebene Wärme beabsichtigt. Nur die Erwärmung des Kochers selber und der Umgebung sind nicht gewollt.

- Im 1. Bewegungsabschnitt des VBZ-Busses ist die beabsichtigte Leistung die Beschleunigung. Bezieht der Bus während diesem Bewegungsabschnitt eine elektrische Leistung von $390\,\text{kW}$ von der Fahrleitung, so beträgt sein Wirkungsgrad in diesem Moment:

$$\eta = \frac{P_{\text{kin}}}{P_{\text{el}}} = \frac{290\,\text{kW}}{390\,\text{kW}} = 0.74 = 74\,\%$$

5.12 Energieproblematik und elektrischer Energieverbrauch im Alltag

Die Energieerhaltung besagt, dass Energie weder erzeugt, noch vernichtet werden kann. Daraus könnte man fälschlicherweise folgern, dass stets genügend Energie vorhanden ist und wir uns keine Sorgen um unsere Energieversorgung zu machen brauchen. Das ist so allerdings nicht richtig. Der Grund dafür liegt in den Eigenschaften der inneren Energie:

- **In der Regel ist innere Energie das energetische Endprodukt aller Prozesse.**

  Hat z.B. der VBZ-Bus seine Fahrt beendet, so ist praktisch die gesamte elektrische Energie in innere Energie übergegangen. (Allenfalls hat der Bus während der Fahrt seine Batterie aufgeladen oder er hat etwas an Höhe gewonnen, dann wäre ein Teil der Energie in Form von elektrischer resp. potentieller Energie vorhanden geblieben.)

- **Innere Energie ist nicht für die Umwandlung in andere Energieformen geeignet. Sie kann nur sehr bedingt zum Betrieb von Maschinen verwendet werden.**

  Soll innere Energie dazu genutzt werden eine Maschine anzutreiben, so sind dafür grosse Temperaturunterschiede nötig. Diese sind aber nicht einfach so vorhanden. Im Gegenteil: Die innere Energie verteilt sich von selbst über alle Körper gleichmässig. Deshalb können Sie sich z.B. an einer Heizung wärmen. Die Heizung besitzt eine höhere Temperatur als Sie, weshalb sie beim Kontakt Wärme und damit innere Energie an Sie abgibt – und zwar im Prinzip so lange, bis Sie dieselbe Temperatur wie die Heizung haben.

Das Wort **Energieverbrauch** muss also so verstanden werden, dass hochwertige Energieformen beim Gebrauch von Maschinen in innere Energie umgewandelt werden. In dieser Form ist die Energie nicht mehr weiter verwertbar. Daraus ergeben sich zwei Folgerungen für das **Sparen von Energie**:

- **Effizienz = grösstmögliche Ausnutzung der Energie**

  Wir sollten überall versuchen möglichst effiziente Maschinen (mit hohen Wirkungsgraden) zu verwenden. So kann Energie eingespart werden.

- **Suffizienz = genügsame Nutzung der Energiereserven**

  Wir sollten uns überlegen, ob wir wirklich so viel Energie benötigen, wie das heute der Fall ist. Einschränkungen wären an vielen Orten denkbar und sinnvoll.

Insbesondere aus ökologischen Gründen möchte die Schweiz möglichst rasch die **2000 Watt-Gesellschaft** realisieren. Das hiesse, die Schweiz würde insgesamt so viel Energie verbrauchen, dass heruntergerechnet auf einen einzelnen Menschen eine andauernde Bezugsleistung von $2000\,\mathrm{W}$ herauskäme. Im Jahr 2022 hat die Schweiz ungefähr eine pflegen wir eine $3600\,\mathrm{W}$-Gesellschaft gepflegt. Da sollte also unbedingt noch etwas passieren!

Persönliches Energierechnen punkto Verbrauch an elektrischer Energie

Auf den meisten elektrischen Geräten wird angegeben, welche elektrische Leistung P_{el} sie im Betrieb vom Elektrizitätswerk beziehen. Wird das Gerät über eine Zeitspanne Δt verwendet, so beträgt der Energieverbrauch: $\Delta E = P_{\mathrm{el}} \cdot \Delta t$.

Das Elektrizitätwerk rechnet die bezogene elektrische Energie in der Energieeinheit **Kilowattstunde** kWh ab. Das Rechnen damit ist sehr einfach! Der **Normaltarif** in der Schweiz beträgt zurzeit knapp 20 Rappen pro kWh.

Beispiel: Ich lasse den CTouch-Bildschirm $(360\,\mathrm{W})$ während einer Lektion $(45\,\mathrm{min} = \frac{3}{4}\,\mathrm{h})$ eingeschaltet:

$$\Delta E = P_{\mathrm{el}} \cdot \Delta t = 360\,\mathrm{W} \cdot \frac{3}{4}\,\mathrm{h} = 270\,\mathrm{Wh} = 0.27\,\mathrm{kWh}$$

Die Schule muss dem Elektrizitätswerk dafür etwa 5.4 Rappen bezahlen $(20 \cdot 0.27 = 5.4)$.

6 Druck und Auftrieb

⇒ Auswirkungen des inneren Zustandes bei Flüssigkeiten und Gasen

6.1 Die Dichte von Stoffen

Die Definition der Dichte ϱ

Die **Dichte** ϱ *eines Materials beschreibt, wie viel Masse* m *bei diesem Material pro Volumeneinheit* V *vorhanden ist:*

$$\varrho := \frac{m}{V} \tag{33}$$

"Dichte ist Masse pro Volumen."

- Das Dichtesymbol ϱ ist der griechische Kleinbuchstabe **"rho"**.
- Die **SI-Grundeinheit** der Dichte ist die Einheitenkombination $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.
- Die Dichte ϱ beschreibt eine **Materialeigenschaft**. Sie hängt aber nicht nur von der Art des Materials ab, sondern auch von äusseren Umständen wie **Druck** und **Temperatur** ab. Dies trifft ganz besonders für den gasförmigen Aggregatzustand zu.

  Die Werte in der nachfolgenden **Dichtetabelle** gelten genau genommen also nur bei den angeführten Bedingungen. Bei Festkörpern und Flüssigkeiten sind die Veränderungen der Werte beim Wechsel zu anderen Bedingungen allerdings geringfügig. Bei gasförmigen Stoffen hingegen sind sie beträchtlich!
- Für fast alle Stoffe gilt:

  $\varrho_{\mathrm{fest}} > \varrho_{\mathrm{flüssig}} \gg \varrho_{\mathrm{gasförmig}}$ "$\gg$" heisst "sehr viel grösser als".

  Die grosse und wichtige Ausnahme zu dieser Regel ist H_2O mit $\varrho_{\mathrm{Eis}} < \varrho_{\mathrm{Wasser}}$.

  Wasser, also eben H_2O, ist im flüssigen Zustand dichter als im festen. Konsequenzen: Eis schwimmt auf Wasser und Gewässer frieren von oben her zu, und nicht von unten!
- **Dichtebereiche zum Merken:**

  Gase: $0.05\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} < \varrho < 5\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

  Flüssigkeiten: $500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} < \varrho < 2000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ spez.: $\varrho_{\mathrm{Quecksilber}} = 13\,546\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

  Festkörper: nicht-metallisch: $500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} < \varrho < 3000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ spez.: $\varrho_{\mathrm{Styropor}} \approx 20\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

  Metalle: $2500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} < \varrho < 23\,000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

Dichte ϱ

Feste Stoffe bei 20° C

	kg m^{-3}		kg m^{-3}
Aluminium	$2.70 \cdot 10^3$	Messing (65% Cu, 35% Zn)	$8.47 \cdot 10^3$
Beton*	$2.2 \cdot 10^3$	Natrium	$0.97 \cdot 10^3$
Blei	$11.34 \cdot 10^3$	Nickel	$8.90 \cdot 10^3$
Buchenholz (trocken)*	$0.7 \cdot 10^3$	Paraffin	$0.9 \cdot 10^3$
Diamant	$3.51 \cdot 10^3$	Platin	$21.45 \cdot 10^3$
Eichenholz (trocken)*	$0.7 \cdot 10^3$	Plexiglas	$1.18 \cdot 10^3$
Eis (bei 0° C)	$0.917 \cdot 10^3$	Porzellan*	$2.4 \cdot 10^3$
Eisen	$7.86 \cdot 10^3$	Quarzglas	$2.2 \cdot 10^3$
Fensterglas*	$2.5 \cdot 10^3$	Quecksilber (bei – 39° C)	$14.19 \cdot 10^3$
Germanium	$5.35 \cdot 10^3$	Silber	$10.5 \cdot 10^3$
Glaskeramik	$2.53 \cdot 10^3$	Silicium	$2.42 \cdot 10^3$
Gold	$19.29 \cdot 10^3$	Stahl V2A	
Graphit	$2.24 \cdot 10^3$	(74% Fe, 18% Cr, 8% Ni)	$7.9 \cdot 10^3$
Grauguß	$7.2 \cdot 10^3$	Styropor*	$0.02 \cdot 10^3$
Invar (64% Fe, 36% Ni)	$8.00 \cdot 10^3$	Tannenholz (trocken)*	$0.5 \cdot 10^3$
Kalkstein*	$2.7 \cdot 10^3$	Uran	$18.7 \cdot 10^3$
Kohlenstoffstahl (1% C)	$7.83 \cdot 10^3$	Wolfram	$19.3 \cdot 10^3$
Kork*	$0.3 \cdot 10^3$	Ziegelstein*	$1.6 \cdot 10^3$
Kupfer	$8.92 \cdot 10^3$	Zink	$7.14 \cdot 10^3$
Marmor*	$2.7 \cdot 10^3$	Zinn (weiß)	$7.29 \cdot 10^3$

Flüssige Stoffe bei 20° C

Aceton	$(CH_3)_2CO$	$0.791 \cdot 10^3$	Petroleum		$0.85 \cdot 10^3$
Ammoniak			Quecksilber		
(bei –40° C)	NH_3	$0.690 \cdot 10^3$	(s. auch Tab. S. 175)	Hg	$13.546 \cdot 10^3$
Motorbenzin*		$0.75 \cdot 10^3$	Schwefelsäure		
Benzol	C_6H_6	$0.879 \cdot 10^3$	(konz.)	H_2SO_4	$1.84 \cdot 10^3$
Diethylether	$(C_2H_5)_2O$	$0.714 \cdot 10^3$	Tetrachlor-		
Ethanol	C_2H_5OH	$0.789 \cdot 10^3$	kohlenstoff	CCl_4	$1.594 \cdot 10^3$
Glycerin	$C_3H_5(OH)_3$	$1.261 \cdot 10^3$	Toluol	C_7H_8	$0.867 \cdot 10^3$
Heizöl EL*		$0.86 \cdot 10^3$	Wasser (s. auch		
Methanol	CH_3OH	$0.792 \cdot 10^3$	Tab. S. 175)	H_2O	$0.998 \cdot 10^3$
Olivenöl*		$0.92 \cdot 10^3$	Wasser schwer	D_2O	$1.105 \cdot 10^3$

Gasförmige Stoffe bei 0° C und Normdruck

Ammoniak	NH_3	0.771	Methan	CH_4	0.717
Argon	Ar	1.784	Neon	Ne	0.900
Butan	C_4H_{10}	2.732	Propan	C_3H_8	2.010
Erdgas*		0.83	Sauerstoff	O_2	1.429
Freon 12	CF_2Cl_2	5.510	Schwefeldioxid	SO_2	2.926
Helium	He	0.1785	Stickstoff	N_2	1.250
Kohlendioxid	CO_2	1.977	Wasserstoff	H_2	0.0899
Kohlenmonoxid	CO	1.250	Xenon	Xe	5.897
Luft (23% O_2, 76% N_2, 1% Ar; Massenanteile)		1.293			

*typischer Wert

6.2 Auflagedruck bei Festkörpern

Zwei sich berührende Festkörper üben Normalkräfte aufeinander aus. Diese Normalkräfte verteilen sich über die Kontaktfläche und wirken so auf den jeweils anderen Körper ein. Man bezeichnet diese Einwirkung als **Auflagedruck**.

Als Folge des Auflagedrucks kann ein Körper in einen anderen eindringen. Experimente und Beobachtungen zeigen, dass dieses Eindringen ganz unterschiedlich erfolgen kann: Ein scharfes Messer kann in Holz eindringen, eine Nadel lässt sich leicht in ein Stück Seife drücken. Dagegen sinkt ein Skifahrer nur wenig im Schnee ein. Wie stark ein Auflagedruck ist, erkennt man mitunter also an der **Eindringtiefe.**

Beispiel: Drückt man auf einen Reissnagel, so wirkt auf Kopf und Spitze die gleiche Kraft, aber nur die Spitze erzeugt wegen ihrer kleinen Fläche einen so grossen Druck, dass sie in die Unterlage eindringt.

Quantitative Beschreibung des Auflagedrucks

Der Auflagedruck soll in einer Zahl erfassen, wie sich die Kraft, die auf eine Auflagefläche wirkt, verteilt. Mathematisch entspricht dies einer Division. Wir legen deshalb fest:

Die Definition des Auflagedrucks p

Zwei Körper sollen sich berühren. Dabei wirke zwischen ihnen die Normalkraft $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ und A sei die Grösse der Kontakt- resp. Auflagefläche. Dann wirkt zwischen den Kontaktflächen der **(Auflage-)Druck***:*

$$p := \frac{F_{\mathrm{N}}}{A} \tag{34}$$

"Druck ist Kraft pro Fläche."

Anmerkungen zur Druckdefinition

- Das Symbol p ist die Abkürzung für das englische Wort *pressure* (= Druck).
- Die SI-Grundeinheit des Drucks ist das **Pascal (Pa)**. Es gilt:

$$[\,p\,] = \frac{[\,F\,]}{[\,A\,]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2} =: \mathrm{Pascal} = \mathrm{Pa}$$

- **Veranschaulichung:** $1\,\mathrm{N}$ entspricht ungefähr der Gewichtskraft von $100\,\mathrm{g}$ Masse (Schokoladentafel). Wird diese Kraft auf eine Fläche von $1\,\mathrm{m}^2$ verteilt (Schokolade schmelzen und verschmieren), so erzeugt sie ein Druck von etwa $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$. Das ist kaum der Rede wert!
- Da das Pascal offenbar eine sehr kleine Einheit ist, werden im Alltag oftmals auch die Einheiten **Bar (bar)** und **Millibar (mbar)** verwendet:

$$1\,\mathrm{bar} := 100\,000\,\mathrm{Pa} \qquad \Rightarrow \qquad 1\,\mathrm{mbar} = 100\,\mathrm{Pa}$$

- **Beispiel:** Nehmen wir an, der VBZ-Bus aus den vorangegangenen Kapiteln mit einer Masse von $26.0\,\mathrm{t}$ fahre auf insgesamt 8 Rädern mit je einer Auflagefläche von $11.0\,\mathrm{dm}^2$. Auf horizontaler Unterlage ist die Normalkraft zwischen Pneus und Strasse gleich der Gewichtskraft des VBZ-Busses. Sie verteilt sich auf alle 8 Räder. Somit folgt für den Auflagedruck:

$$p = \frac{F_{\mathrm{N}}}{A} = \frac{F_{\mathrm{G}}}{A} = \frac{m\cdot g}{A} = \frac{26.0\,\mathrm{t}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}{8\cdot 11.0\,\mathrm{dm}^2} = \frac{26\,000\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}{8\cdot 0.11\,\mathrm{m}^2} = 289\,800\,\mathrm{Pa} = 2.9\,\mathrm{bar}$$

6.3 Druck als innerer Zustand von Flüssigkeiten und Gasen

In einem Gefäss befinde sich eine Flüssigkeit, auf die mit Hilfe eines Kolbens eine Kraft ausgeübt werden kann. Drückt der Kolben auf die Flüssigkeit, so wird sie dadurch in einen Zustand versetzt, durch den sie ihrerseits Kräfte auf alle ihre Begrenzungsflächen – egal ob an ihrem Rand oder in ihrem Inneren – ausübt. Diesen **inneren Zustand** der Flüssigkeit nennen wir ebenfalls **Druck**. Manchmal spricht man hier auch vom **Kolbendruck**, weil er in vielen Anwendungen wie oben beschrieben durch einen Kolben erzeugt wird. Ganz gleiche Aussagen gelten für eine eingeschlossene Gasmenge.

Auch bei Flüssigkeiten und Gasen lässt sich der Druck über Gleichung (34) definieren. Wir müssen einfach nochmals genau sagen, was unter der Kraft und der Fläche genau zu verstehen ist:

Die Definition des Drucks in Flüssigkeiten und Gasen p

Ist eine Fläche A in Kontakt mit einer Flüssigkeit oder einem Gas und erfährt sie von dieser Flüssigkeit resp. diesem Gas die Kraft $\vec{F}$, so ist der **Druck** p *in der Flüssigkeit resp. im Gas gegeben durch:*

$$p := \frac{F}{A} \tag{35}$$

Immer noch gilt: "Druck ist Kraft pro Fläche."

Anmerkungen zum Druck in Flüssigkeiten und Gasen

- Druck in Flüssigkeiten und Gasen wirkt stets in alle Richtungen. Jede Fläche A, die mit der Flüssigkeit oder dem Gas in Kontakt ist, erfährt eine entsprechende Kraft $\vec{F}$ mit Betrag:

$$p = \frac{F}{A} \qquad \Rightarrow \qquad F = p \cdot A$$

- Zur Verdeutlichung: Egal, ob wir von einem Kolben-, von einem Auflage-, von einem Luft- oder von einem Schweredruck sprechen, wir meinen im Grunde genommen stets dasselbe: Jeglicher Druck beschreibt immer ein Verhältnis von Kraft pro Fläche. Es geht immer darum, wie sich eine Kraft auf eine Fläche verteilt resp. wie viel Kraft jedes einzelne Teilstück einer Oberfläche abbekommt. Die Beinamen "Auflage", "Kolben", "Luft" oder "Schwere" geben lediglich darüber Auskunft, wo wir diesen Druck antreffen oder welche Ursache er hat.

- **Hinweis:** Der Druck in resp. von einem **Vakuum** ist stets gleich Null: $p_{\text{Vakuum}} = 0$.

6.4 Druck im Teilchenmodell

Im **Teilchenmodell** gehen wir davon aus, dass sich Stoffe aus kleinen Teilchen (**Atome**, **Moleküle**) zusammensetzen. Je nach **Aggregatzustand** (fest, flüssig, gasförmig) sind die Teilchen unterschiedlich aneinander gekoppelt. Damit lassen sich Drucke bestens erklären:

Festkörper: Die Teilchen sind starr miteinander verbunden. Sie sitzen auf festen "Plätzen". Der Körper ist stabil. Er kann Normalkräfte aushalten resp. ausüben, wodurch Auflagedruck entstehen.

Aufgrund der Temperatur zittern die Teilchen auf ihren Plätzen hin und her. Je mehr Energie man zuführt und damit die Temperatur erhöht, desto heftiger ist diese Zitterbewegung. Sie führt, je nach Stoffart, früher oder später dazu, dass die starren Verbindungen zwischen den Teilchen aufbrechen. Dann schmilzt der Festkörper und wird zur Flüssigkeit.

Flüssigkeiten: Die Teilchen sind relativ zueinander beweglich, aber es gibt noch immer anziehende zwischenmolekulare Kräfte, sodass sie zusammenbleiben und dicht aneinander liegen.

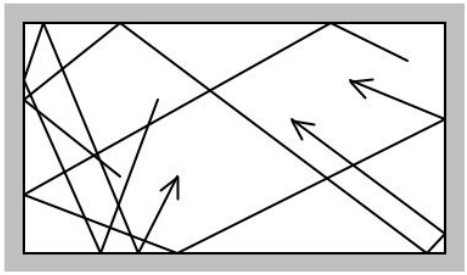
Wird auf die dicht liegenden Teilchen von einer Seite her eine Kraft ausgeübt, so pflanzt sich diese Kraft in alle Richtungen fort. So versteht man den Kolbendruck.

Auch in der Flüssigkeit sind die Teilchen aufgrund der Temperatur in Bewegung. Sie bewegen sich durch die ganze Flüssigkeit (Diffusion). Diese Teilchenbewegung ist mitverantwortlich für den Druck einer Flüssigkeit. Die Teilchen stossen ständig gegen Oberflächen in der Flüssigkeit. Je heisser die Flüssigkeit ist, desto heftiger und häufiger sind diese Stösse.

Erhöht man die Temperatur einer Flüssigkeit immer weiter, so wird die Teilchenbewegung darin immer heftiger. Die einzelnen Teilchen tragen mehr Bewegungsenergie. Ab einer bestimmten Grenztemperatur schaffen es die Teilchen die zwischenmolekularen Kräfte zu überwinden und aus der Flüssigkeit auszutreten resp. sich in der Flüssigkeit mehr Raum zu verschaffen. Dann siedet die Flüssigkeit und wird dabei gasförmig.

Gase: Die Teilchen schwirren voneinander losgelöst im Raum herum. Je höher die Temperatur, desto grösser ihre mittlere Geschwindigkeit. Der Gasdruck entsteht, weil sie aneinander und gegen begrenzende Oberflächen stossen (vgl. Bild unten links). Mit höherer Temperatur passiert dies heftiger und häufiger.

Verdeutlichung: Bei $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ beträgt die mittlere Teilchengeschwindigkeit in Luft etwa $500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.



6.5 Der Schweredruck von Flüssigkeiten

Durch das eigene Gewicht erzeugt eine Flüssigkeit in sich einen Druck. Man spricht vom **Schweredruck**. Dieser ist umso grösser, je tiefer man in der Flüssigkeit "taucht":

Der Schweredruck in Flüssigkeiten

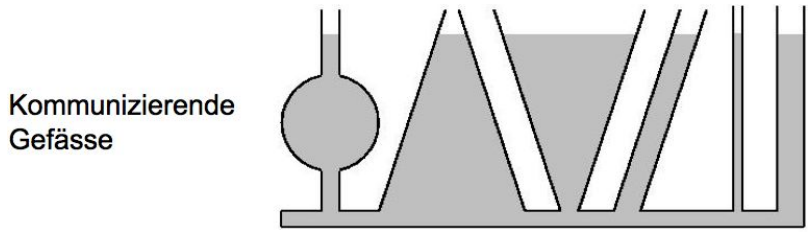
Besitzt eine Flüssigkeit die Dichte ϱ, so erzeugt sie auf der Tiefe h unter ihrer Oberfläche einen Schweredruck von:

$$p = \varrho \cdot h \cdot g \tag{36}$$

Anmerkungen zum Schweredruck

- Der Schweredruck einer Flüssigkeit hängt nur von der Dichte ϱ und der Höhe der Flüssigkeitssäule resp. der Tauchtiefe ab. Es kommt also nicht darauf an, welche Flüssigkeitsmenge tatsächlich über die Höhe h vorhanden ist. Dies nennt man das **hydrostatische Paradoxon**.

  Am anschaulichsten manifestiert sich dieses Prinzip bei **kommunizierenden Gefässen**. Diese sind oben offen und unten miteinander verbunden. Füllt man eine Flüssigkeit ein, so ergibt sich in allen Gefässen derselbe Flüssigkeitsstand (vgl. Bild oben rechts).



- Die Schweredruckformel (36) gilt **nur für Flüssigkeiten** und nicht für Gase. Der Grund dafür ist, dass Flüssigkeiten im Gegensatz zu Gasen **inkompressibel** (= nicht zusammendrückbar) sind. Bei Gasen ist demzufolge die Dichte ϱ nicht über die ganze Höhe hinweg gleich und es lässt sich nicht einfach ein konstanter Dichtewert einsetzen.

- Der Schweredruck von Wasser beträgt etwa $1\,\mathrm{bar}$ pro $10\,\mathrm{m}$ Wassersäule:

$$p = \varrho \cdot h \cdot g = 998\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 10\,\mathrm{m} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 97\,900\,\mathrm{Pa} \approx 1\,\mathrm{bar}$$

- Die **Herleitung** der Schweredruckformel (36) wird in Abschnitt 6.11 ausführlich besprochen.

6.6 Notizen zum Luftdruck

- Der Luftdruck p_{Luft} an der Erdoberfläche kommt durch die Gewichtskraft der Atmosphäre darüber zustande. Es handelt sich also auch beim Luftdruck um einen **Schweredruck**.

- p_{Luft} hat (auf Meereshöhe) stets einen Wert von etwa $1\,\mathrm{bar}$. Er schwankt zwischen $970\,\mathrm{mbar}$ (Tiefdruckgebiet) und $1030\,\mathrm{mbar}$ (Hochdruckgebiet).

- **Zur Verdeutlichung:** Bei $1\,\mathrm{bar}$ Luftdruck erfährt jeder Quadratmeter Oberfläche von der Luft eine Kraft von $100\,000\,\mathrm{N}$. Das entspricht der Gewichtskraft von $10\,\mathrm{t}$ Masse! Pro Quadratzentimeter entstehen so noch $10\,\mathrm{N}$, was ungefähr der Gewichtskraft von $1\,\mathrm{kg}$ Masse entspricht.

- Wichtig für die Tabellierung von Materialkonstanten (z.B. Dichte) ist der auf $1.013\,\mathrm{bar}$ festgelegte **Normdruck** p_0. Diesen Wert nennt man auch eine **Atmosphäre (atm)**.

- Luftdruck und Luftdichte nehmen mit zunehmender Höhe gleichermassen ab. Diese Tatsache kann bereits über kleine Höhenunterschiede hinweg zur Höhenbestimmung verwendet werden.

  Die Veränderung von Luftdruck und -dichte verläuft über grössere Höhenunterschiede hinweg allerdings nicht linear, sondern exponentiell. (Ansonsten würde sich ein eindeutiger oberer Rand der Erdatmosphäre ergeben. Genau ab dieser Höhe wäre dann keine Luft mehr vorhanden.)

6.7 Gesamtdruck, Druckgleichgewicht, Über- und Unterdruck

Prinzip der Druckaddition

Der an einem bestimmten Ort vorhandene Gesamtdruck p ist die Summe aller wirkenden Teildrucke p_1, p_2, p_3, etc.

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots \tag{37}$$

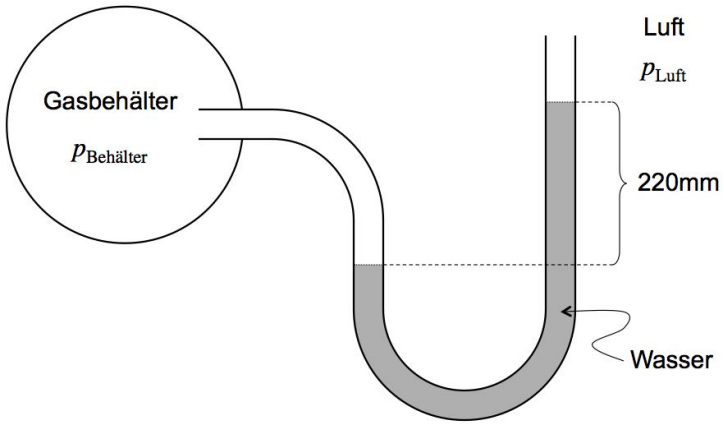
Beispiel: In einem Reagenzglas befinde sich unten Wasser über eine Höhe von $4.5\,\mathrm{cm}$ und darüber sei eine Ölsäule von $3.5\,\mathrm{cm}$. Das Reagenzglas sei oben offen.

Der (Gesamt-)Druck zuunterst ist somit die Summe aus dem Luft- und zwei Schweredrucken:

$$p = p_{\text{Luft}} + p_{\text{Öl}} + p_{\text{Wasser}}$$

Ist eine Situation statisch, also ruhend, herrschen an allen Stellen **Kraft**- resp. **Druckgleichgewichte** (vgl. Trägheitsprinzip, p. 23).

Beispiel: In einem **U-Rohr** befinde sich Wasser. Auf der linken Seite sei das U-Rohr mit einem abgeschlossenen Glasbehälter verbunden, in dem sich ein Gas befinde. Auf der rechten Seite sei das Rohr oben offen und das Wasser stehe $220\,\mathrm{mm}$ höher:



Die Situation ist statisch. Demzufolge herrschen überall Druckgleichgewichte, insbesondere **unten im U-Rohr**. Von beiden Seiten des Rohrs muss dort derselbe Druck erzeugt werden. Bis zur unteren gestrichelten Linie ist dies der Schweredruck einer auf beiden Seiten gleich hohen Wassersäule. Auf dieser gestrichelten Linie müssen demzufolge die Drucke in beiden Teilen des U-Rohrs immer noch gleich gross sein. Daraus folgt:

$$p_{\text{links}} = p_{\text{rechts}}$$

$$p_{\text{Behälter}} = p_{\text{Wasser,220mm}} + p_{\text{Luft}}$$

Der Gasdruck links ist also grösser als der Luftdruck aussen. Wir sagen: Im Behälter herrscht ein **Überdruck**. Damit meint man den Druckunterschied zwischen Gasbehälter und Luft:

$$\text{Überdruck:} \qquad \Delta p = p_{\text{Behälter}} - p_{\text{Luft}}$$

Dieser Überdruck ist hier gerade so gross wie der Schweredruck einer $220\,\mathrm{mm}$-Wassersäule.

Ganz analog spricht man von einem **Unterdruck**, wenn der Druck in einem Gefäss geringer als der Luftdruck ist.

Wenn Sie z.B. Wasser durch einen Trinkhalm aus einem Glas in Ihren Mund "saugen" wollen, so müssen Sie dafür in Ihrem Mund einen Unterdruck erzeugen. Dazu vergrössern Sie das Mundvolumen bei geschlossenem Mund, wodurch sie die Luft in Ihrem Mund verdünnen und damit den Druck absenken. Als Folge davon wird die Luft von der anderen Seite das Wasser in Ihren Mund hochdrücken.

Ebenfalls mit Unterdrucken arbeiten z.B. der Staubsauger oder auch der Saugnapf. Das Wort "Saugen" ist physikalisch gesehen aber eben nicht ganz passend.

"Saugen" gibt es nicht! Alles wird gestossen!

Ohne äusseren Luftdruck würden weder der Staubsauger, noch der Trinkhalm, noch der Saugnapf funktionieren!

6.8 Die Auftriebskraft $\vec{F}_A$

Das Archimedische Auftriebsprinzip

Ein Körper erfährt in einer flüssigen oder gasförmigen Umgebung eine Auftriebskraft nach oben, die gerade so gross ist wie die Gewichtskraft des verdrängten Umgebungsvolumens.

Die Formel für die Auftriebskraft

ϱ_U *sei die* Dichte der Umgebung *und* V_v *bezeichne das vom Körper* **verdrängte Umgebungsvolumen**. *Dann erfährt der Körper eine* **Auftriebskraft** $\vec{F}_A$ *nach oben, deren Betrag gegeben ist durch:*

$$F_A = \varrho_U \cdot V_v \cdot g \tag{38}$$

Anmerkungen zum Autriebsprinzip und zur Auftriebskraft

- Die Formel (38) für die Auftriebskraft ist die direkte formale Umsetzung des Archimedischen Auftriebsprinzips. Die Auftriebskraft $\vec{F}_A$ soll gerade so gross sein wie die Gewichtskraft $\vec{F}_{G,v}$ der Masse m_v des vom Körper verdrängten Umgebungsvolumens V_v:

  $$F_A = F_{G,v} = m_v \cdot g = \varrho_U \cdot V_v \cdot g \qquad \text{mit} \quad m_v = \varrho_U \cdot V_v$$

- **Der Auftrieb entsteht aufgrund des Druckunterschieds zwischen Ober- und Unterseite des Körpers!**

  In einer Flüssigkeit oder einem Gas erfährt ein Körper nämlich von unten her einen grösseren Druck als von oben und diese Druckdifferenz ist die Ursache für den Auftrieb.

  Grund für den Druckunterschied zwischen oben und unten ist der zusätzliche Schweredruck, der durch die Flüssigkeits- resp. Gasmasse "neben dem Körper" erzeugt wird.

  Deshalb folgt die Auftriebsformel (38) aus der Schweredruckformel (36), wie in Abschnitt 6.12 explizit gezeigt wird.

- Für F_A sind das **verdrängte Volumen** V_v und die **Umgebungsdichte** ϱ_U massgebend.

  Weil Gase sehr kleine Dichtewerte aufweisen, ist der Auftrieb in Gasen in der Regel vernachlässigbar klein. Er wird erst relevant, wenn sehr grosse Volumen im Spiel sind (z.B. bei einem Heissluftballon). Ein durchschnittlich grosser Mensch mit einer Masse von $76\,\mathrm{kg}$ besitzt z.B. ein Volumen von etwa $75\,\mathrm{dm}^3$. Daraus ergibt sich in Luft eine Auftriebskraft von:

  $$F_A = \varrho_{\text{Luft}} \cdot V_v \cdot g = 1.293\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0.075\,\mathrm{m}^3 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 0.95\,\mathrm{N}$$

  Dies entspricht knapp der Gewichtskraft von $100\,\mathrm{g}$ Masse und somit etwa dem 800. Teil der Masse des Menschen. Aufgrund des Auftriebs in der Luft fühlen wir uns also etwa um einen 800-stel leichter, als wir effektiv sind. Das bemerken wir sicher nicht!

  In Wasser beträgt die Auftriebskraft für denselben Durchschnittsmenschen:

  $$F_A = \varrho_{\text{Wasser}} \cdot V_v \cdot g = 998\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0.075\,\mathrm{m}^3 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 730\,\mathrm{N}$$

  Dies entspricht etwa der Gewichtskraft von $75\,\mathrm{kg}$ Masse. In Wasser wird also die Gewichtskraft von uns Menschen beinahe komplett durch die Auftriebskraft kompensiert. Es braucht nur noch wenig Aufwand, damit wir schwimmen und uns über Wasser halten können.

6.9 Steigen, Sinken und Schweben

Befindet sich ein Körper komplett in einer Flüssigkeit, so ist das durch ihn verdrängte Flüssigkeitsvolumen V_v gerade gleich seinem eigenen Körpervolumen V_K, also: $V_v = V_K$.

Ohne Einfluss weiterer Kräfte wirken auf den eingetauchten Körper nur die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ nach unten und die Auftriebskraft $\vec{F}_A$ nach oben. Es kommt nur auf diese beiden Kräfte an, ob der Körper in der Flüssigkeit steigt, schwebt oder absinkt:

Steigen	$\Leftrightarrow$	$F_A > F_G$	$\Leftrightarrow$	$\varrho_U \cdot V_v \cdot g > \varrho_K \cdot V_v \cdot g$	$\Leftrightarrow$	$\varrho_U > \varrho_K$
Schweben	$\Leftrightarrow$	$F_A = F_G$	$\Leftrightarrow$	$\varrho_U \cdot V_v \cdot g = \varrho_K \cdot V_v \cdot g$	$\Leftrightarrow$	$\varrho_U = \varrho_K$
Sinken	$\Leftrightarrow$	$F_A < F_G$	$\Leftrightarrow$	$\varrho_U \cdot V_v \cdot g < \varrho_K \cdot V_v \cdot g$	$\Leftrightarrow$	$\varrho_U < \varrho_K$

Dabei habe ich verwendet, dass $F_G = m_K \cdot g = \varrho_K \cdot V_K \cdot g$ ist, wobei $V_K = V_v$ ist.

Die gleichen Überlegungen gelten übrigens auch für Körper in einer gasförmigen Umgebung.

Entscheidend für das "Höhenverhalten" eines Körpers in einer Flüssigkeit resp. einem Gas ist also lediglich der Vergleich zwischen den Dichten. Soll ein Körper aufsteigen, so muss seine Dichte ϱ_K geringer sein als die Dichte ϱ_U seiner Umgebung. Ist hingegen die Körperdichte grösser, so sinkt er ab. Sind die Dichten gleich, so schwebt der Körper in der Flüssigkeit resp. dem Gas.

Dieses Prinzip erklärt z.B. die Auf-Ab-Bewegungen von Fischen, welche ihre Körperdichte mit Hilfe einer **Schwimmblase** steuern können. Ebenso lassen sich damit Aussagen über die Höhensteuerung bei **Gas**- oder **Heissluftballonen**, wie auch bei **U-Booten** machen.

6.10 Schwimmende Körper

Ein Körper befinde sich in einer Flüssigkeit (z.B. ein Eiswürfel in Wasser). Ist seine Dichte ϱ_K geringer als die Flüssigkeitsdichte ϱ_{Fl}, so steigt er an die Oberfläche auf – aber sicher nicht weiter!

Ein Teil des Körpers schaut aus der Flüssigkeit und verdrängt somit keine Flüssigkeit mehr. Die Auftriebskraft $\vec{F}_A$ ist somit geringer als beim vollständig eingetauchten Körper.

Die Höhenlage des Körpers an der Flüssigkeitsoberfläche wird bestimmt durch ein Kräftegleichgewicht zwischen der Auftriebskraft $\vec{F}_A$ und der Gewichtskraft $\vec{F}_G$, wobei nun das Körpervolumen V_K nicht mehr dem verdrängten Flüssigkeitsvolumen V_v entspricht. V_v steht nur noch für den in die Flüssigkeit eingetauchten Anteil von V_K.

$$
\begin{aligned}
& F_A = F_G && \text{| Formeln einsetzen} \\
\Rightarrow \quad & \varrho_{Fl} \cdot V_v \cdot g = \varrho_K \cdot V_K \cdot g && \text{| } : g \text{ , } : \varrho_{Fl} \text{ und } : V_K \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{V_v}{V_K} = \frac{\varrho_K}{\varrho_{Fl}}
\end{aligned}
$$

Der Bruch $\frac{V_v}{V_K}$ steht für den eingetauchten Anteil des Körpervolumens. Er ist offenbar gerade gegeben durch das Verhältnis von Körper- zu Flüssigkeitsdichte!

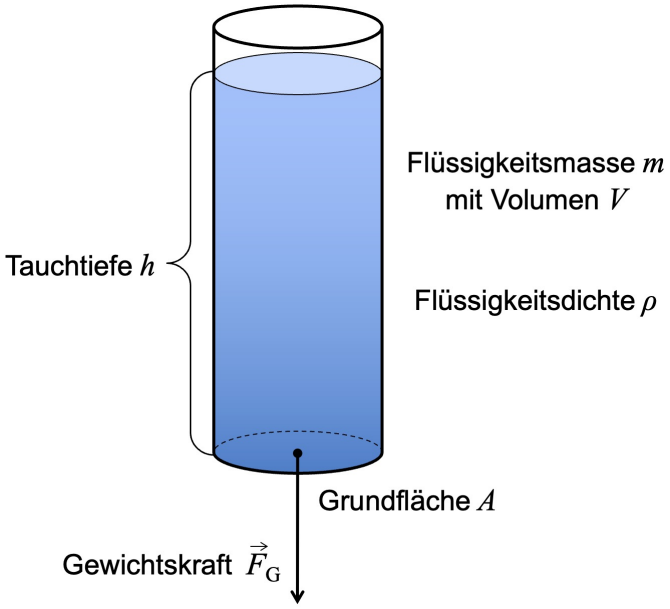
Beispiel: Die Dichte von Eis beträgt $\varrho_{Eis} = 917\ \frac{kg}{m^3}$, diejenige von Wasser $\varrho_{Wasser} = 998\ \frac{kg}{m^3}$. Daraus ergibt sich für das Volumenverhältnis:

$$\text{Eingetauchter Volumenanteil:} \qquad \frac{V_v}{V_K} = \frac{\varrho_{Eis}}{\varrho_{Wasser}} = \frac{917\ \frac{kg}{m^3}}{998\ \frac{kg}{m^3}} = 0.919 = 91.9\,\%$$

Bei einem **Eiswürfel in einem Wasserglas** befindet sich somit ein Volumenanteil von 91.9 % im Wasser und nur 8.1 % schauen heraus. Praktisch die gleichen Zahlen gelten für **Eisberge im Meer**, aber weil die Dichte von Salzwasser etwas grösser ist als jene von reinem Wasser, schaut ein geringfügig grösserer Teil, nämlich ca. 10 %, aus dem Wasser.

6.11 Herleitung der Formel (36) für den Schweredruck in Flüssigkeiten

Die Formel (36) für den Schweredruck von Flüssigkeiten lässt sich direkt herleiten, wenn man eine **zylinderförmige, stehende Flüssigkeitssäule** zur Betrachtung heranzieht:



Die formale Herleitung sieht nun folgendermassen aus:

$$p \overset{\text{i.}}{=} \frac{F_G}{A} \overset{\text{ii.}}{=} \frac{m \cdot g}{A} \overset{\text{iii.}}{=} \frac{\varrho \cdot V \cdot g}{A} \overset{\text{iv.}}{=} \frac{\varrho \cdot A \cdot h \cdot g}{A} = \varrho \cdot h \cdot g$$

Notizen zu den einzelnen Schritten

i. Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ der gesamten Flüssigkeitssäule verteilt sich unten auf die Querschnittsfläche A. Deshalb kann man die Druckdefinition (35) anwenden.

ii. Mit der Flüssigkeitsmasse m ist $F_G = m \cdot g$.

iii. Die Masse m lässt sich via ihre Dichte ϱ auch durch das Flüssigkeitsvolumen V ausdrücken: $m = \varrho \cdot V$.

iv. Für das zylinderförmige Volumen V gilt: $V = A \cdot h$, wobei h für die Höhe der Flüssigkeitssäule steht.

Die Grundfläche A hat sich weggekürzt und es bleibt die Schweredruckformel (36) stehen.

Die effektive Flüssigkeitsmenge (Grössen m resp. V) spielt für den Schweredruck keine Rolle! Nur die Höhe h der Flüssigkeitssäule und die Flüssigkeitsdichte ϱ sind entscheidend. D.h., bereits mit einer geringen Flüssigkeitsmenge lassen sich prinzipiell grosse Schweredrucke erzeugen.

Dies sieht man besonders gut beim Vergleich mehrerer Schweredruck in kommunizierenden Gefässen (p. 61). Selbst die dünne Flüssigkeitssäule vermag unten denselben Druck zu erzeugen wie die anderen Gefässe, weshalb die Flüssigkeitsstände überall gleich hoch sind.

6.12 Herleitung der Formel (38) für die Auftriebskraft

Auch ohne Kenntnis des Archimedischen Auftriebsprinzips (p. 38) kann man auf die Idee einer Auftriebskraft kommen, sobald man einmal weiss, dass in Flüssigkeiten und Gasen Schweredrucke entstehen.

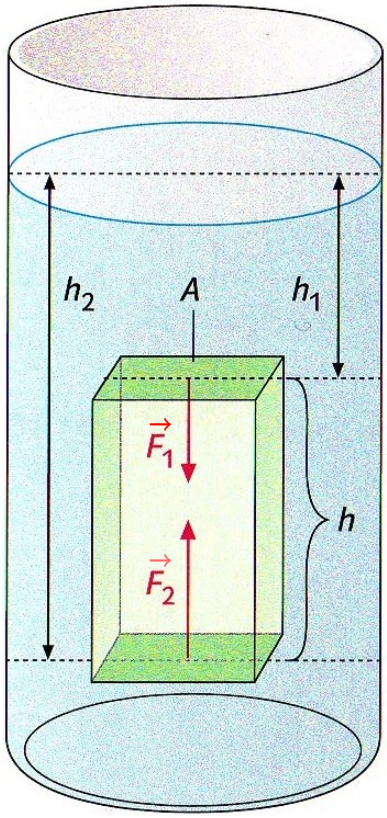


Bild: Ist ein Quader in eine Flüssigkeit mit Dichte ϱ eingetaucht, so muss der Druck p_2 an dessen Unterseite grösser sein als der Druck p_1 an der Oberseite, weil unten der Schweredruck der Flüssigkeit grösser ist.
Als Resultat dieser Druckdifferenz erfährt der Quader eine nach oben gerichtete Kraft $\vec{F}_A$. Wir leiten her:

$$
\begin{aligned}
F_A &\overset{\text{i.}}{=} F_2 - F_1 \\
&\overset{\text{ii.}}{=} p_2 \cdot A - p_1 \cdot A \\
&\overset{\text{iii.}}{=} \varrho \cdot h_2 \cdot g \cdot A - \varrho \cdot h_1 \cdot g \cdot A \\
&\overset{\text{iv.}}{=} \varrho \cdot g \cdot A \cdot (h_2 - h_1) \\
&\overset{\text{v.}}{=} \varrho \cdot g \cdot A \cdot h \\
&\overset{\text{vi.}}{=} \varrho \cdot g \cdot V
\end{aligned}
$$

Notizen zu den einzelnen Schritten

i. Die Auftriebskraft $\vec{F}_A$ ist Vektorsumme der beiden durch den Druck entstehenden Kräfte $\vec{F}_2$ von unten und $\vec{F}_1$ von oben.

ii. Für Kräfte, welche aufgrund von Drucken entstehen, gilt gemäss der Druckdefinition (35) stets: $F = p \cdot A$.

iii. Der Druck p_2 von unten und der Druck p_1 von oben unterscheiden sich nur aufgrund eines anderen Schweredruckwertes. Bei der Differenz dieser Gesamtdrucke spielt es keine Rolle, ob darin noch weitere Teildrucke enthalten sind. Diese subtrahieren sich weg.

Daher kann man hier direkt je die Formel (36) für den Schweredruck auf der jeweiligen Tauchtiefe, h_1 resp. h_2, einsetzen. Dabei ist ϱ die Dichte der umgebenden Flüssigkeit.

iv. $(\varrho \cdot g \cdot A)$ ausklammern.

v. Die Differenz $h_2 - h_1$ ist gerade die Höhe h des Quaders.

vi. Das Produkt $A \cdot h$ ergibt das Quadervolumen V.

Tatsächlich erhalten wir als Resultat die Formel (38) für die Auftriebskraft: $F_A = \varrho_U \cdot V_v \cdot g$.
Die Flüssigkeitsdichte ϱ ist ja die Dichte der Umgebung ϱ_U und das Quadervolumen V entspricht beim vollständig eingetauchten Quader gerade dem verdrängten Volumen V_v.

Diese Herleitung lässt sich übrigens genau gleich in gasförmiger Umgebung durchführen, solange die Höhenunterschiede nicht zu gross sind. Dann nämlich wäre die Umgebungsdichte ϱ_U oben und unten nicht mehr dieselbe.

Solange man von einer einigermassen konstanten Gasdichte ausgehen kann, ist aber alles richtig, weshalb wir für den Auftrieb in Gasen ebenfalls die Auftriebsformel (38) verwenden.

A Formelsammlung

A.1 Kinematik (Bewegungsgleichungen)

Gleichförmige Bewegung (gfB) v = konstant	$s = v \cdot t$	s = Strecke v = Geschwindigkeit t = Zeitspanne	p. 16
Gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit (gmbBoA) a = konstant und $v_0 = 0$	$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ $v = a \cdot t$ $s = \frac{v^2}{2a}$ $s = \overline{v} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot t$	s = Strecke a = Beschleunigung t = Zeitspanne v = Endgeschwindigkeit $\overline{v}$ = Durschschnittsgeschw.	p. 17
Gleichmässig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit (gmbBmA) a = konstant und $v_0 \neq 0$	$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ $v = v_0 + a \cdot t$ $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ $s = \overline{v} \cdot t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$	s = Strecke a = Beschleunigung t = Zeitspanne v_0 = Anfangsgeschwindigkeit v = Endgeschwindigkeit $\overline{v}$ = Durschschnittsgeschw.	p. 18
Gleichförmige Kreisbewegung (gfK) v = konstant	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ $a_Z = \frac{v^2}{r}$	v = Bahngeschwindigkeit r = Bahnradius T = Umlaufszeit = Periode a_Z = Zentripetalbeschleunigung	p. 35f

A.2 Dynamik (Newtonsche Mechanik und Kräfte)

Trägheitsprinzip **= 1. Newtonsches Axiom**	$F_{res} = 0 \Leftrightarrow v = \text{konst.}$	F_{res} = resultierende Kraft v = Geschw. (inkl. Richtung!)	p. 21ff
Aktionsprinzip **= 2. Newtonsches Axiom**	$F_{res} = m \cdot a$	F_{res} = resultierende Kraft a = Beschleunigung	p. 23ff
Wechselwirkungsprinzip **= 3. Newtonsches Axiom** *"actio = reactio"*	$F_{A \to B} = F_{B \to A}$	$F_{A \to B}$ = Kraft von A auf B $F_{B \to A}$ = Kraft von B auf A	p. 23 p. 31f
Zentripetalkraft = resultierende Kraft in die Kreismitte bei einer gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)	$F_Z = m \cdot a_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$	F_Z = Zentripetalkraft m = Masse a_Z = Zentripetalbeschleunigung v = Bahngeschwindigkeit r = Bahnradius	p. 37
Newtonsches Gravitationsgesetz	$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$	F_G = Gewichtskraft $m_{1/2}$ = Punktmassen r = Abstand der Punktmassen G = univ. Gravitationskonstante $= 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$	p. 41
Gewichtskraft = Schwer-/Anziehungskraft = Gravitation	$F_G = m \cdot g$	F_G = Gewichtskraft m = Masse g = Ortsfaktor	p. 25
Zerlegung der Gewichtskraft auf der schiefen Ebene	$F_{G,\parallel} = F_G \cdot \sin \alpha$ $F_{G,\perp} = F_G \cdot \cos \alpha$ $\tan \alpha = m$	F_G = Gewichtskraft $F_{G,\parallel}$ = Komponente von F_G parallel zum Hang $F_{G,\perp}$ = Komponente von F_G senkrecht zum Hang α = Neigungswinkel m = Steigungsangabe als Zahl	p. 33f

Federkraft	$F_F = D \cdot s$	F_F = rücktreibende Kraft D = Federkonstante s = Dehnung	p. 28
Haftreibung	$F_R \leq \mu_H \cdot F_N$	F_R = Haftreibungskraft μ_H = Haftreibungszahl F_N = Normalkraft	p. 26ff
Gleit- und Rollreibung	$F_R = \mu_{G/R} \cdot F_N$	F_R = Gleit-/Rollreibungskraft $\mu_{G/R}$ = Gleit-/Rollreibungszahl F_N = Normalkraft	p. 26ff

A.3 Arbeit, Energie und Leistung

Arbeitsdefinition	$W = F \cdot s$	F = arbeitende Kraft W = von F verrichtete Arbeit s = Wegstrecke	p. 44f
Hubarbeit und potentielle Energie	$W_{Hub} = m \cdot g \cdot h$ $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$	W_{Hub} = Hubarbeit E_{pot} = potentielle Energie m = Masse g = Ortsfaktor h = Höhe	p. 48f
Beschleunigungsarbeit und kinetische Energie	$W_B = \frac{m \cdot v^2}{2}$ $E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$	W_B = Beschleunigungsarbeit E_{kin} = kinetische Energie m = Masse v = Geschwindigkeit	p. 49
Leistungsdefinition	$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$	P = Leistung ΔE = Energieumsatz Δt = Zeitspanne	p. 53
Wirkungsgrad einer Maschine	$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}}$	η = Wirkungsgrad P_{out} = abgegebene Leistung P_{in} = zugeführte Leistung	p. 54

A.4 Druck und Auftrieb

Dichte eines Stoffes	$\varrho = \frac{m}{V}$	ϱ = Dichte des Stoffes m = Masse V = Volumen	p. 56f
Druckdefinition	$p = \frac{F}{A}$	p = Druck F = Kraft A = Fläche	p. 58
Gesamtdruck und Druckaddition	$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$	p = Gesamtdruck $p_{1/2/3/\ldots}$ = Teildrucke	p. 61f
Schweredruck in Flüssigkeiten	$p = \varrho \cdot g \cdot h$	h = Tauchtiefe p = Schweredruck auf der Tiefe h ϱ = Flüssigkeitsdichte g = Ortsfaktor	p. 60f
Auftriebskraft	$F_A = \varrho_U \cdot V_v \cdot g$	F_A = Auftriebskraft ϱ_U = Umgebungsdichte V_v = verdrängtes Volumen g = Ortsfaktor	p. 63f