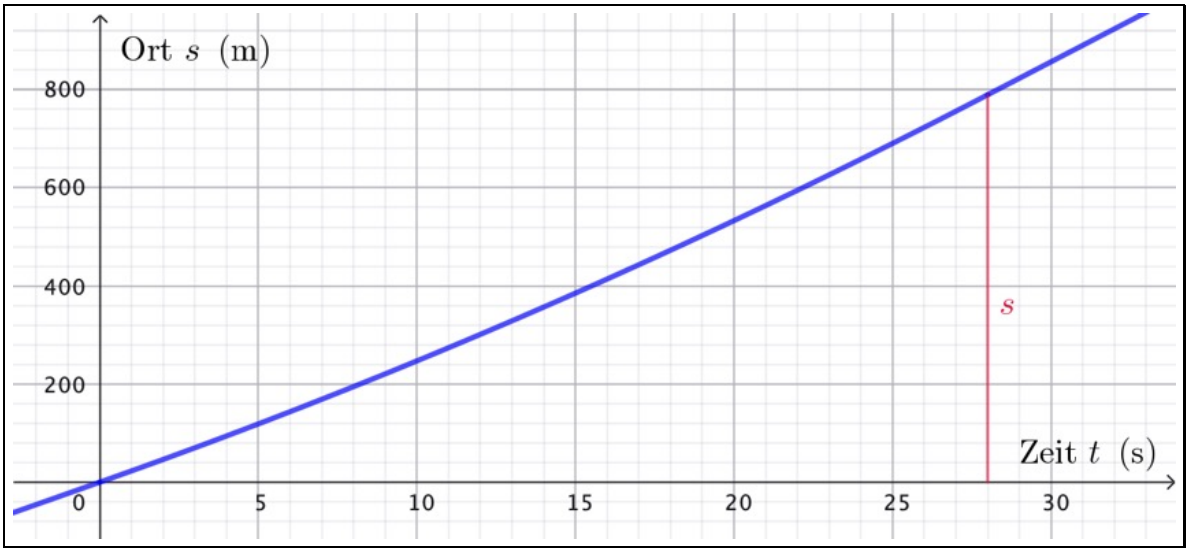
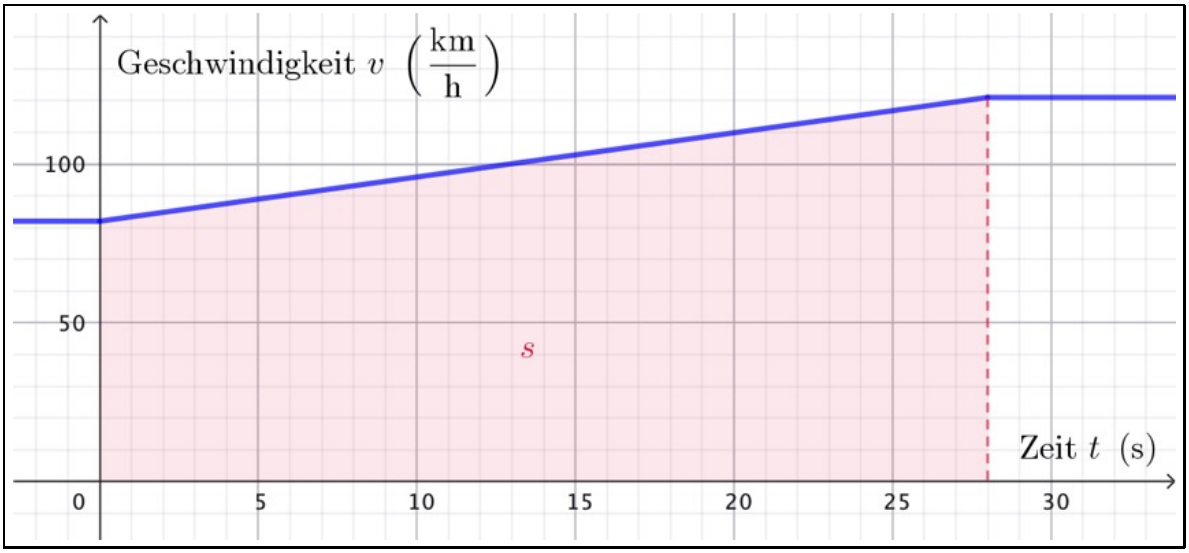
Übungen zur Mechanik – Lösungen Serie 3

1. *Willkommen auf der Autobahn*

   (a) Für die beiden Bewegungsdiagramme aus den Aufgaben (a) und (d) erhalten wir:





   Beim t-v-Diagramm könnte man natürlich auch Die Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ verwenden.

   (b) Entscheidend ist es zu wissen, dass die zurückgelegte Strecke der Fläche im t-v-Diagramm entspricht. Dabei handelt es sich um eine Trapezfläche und mit $v_0 = 82\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 22.78\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v = 121\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 33.61\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ folgt:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{22.78\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 33.61\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 28\,\text{s} = 789.4\,\text{m} \simeq \underline{\underline{790\,\text{m}}}$$

   (c) Wir berechnen unter Verwendung der Beschleunigungsdefinition:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{33.61\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 22.78\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{28\,\text{s}} = 0.3868\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \simeq \underline{\underline{0.39\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

   (d) Siehe (a).

2. *Kinematik des freien Falls*

(a) Ausgehend vom Moment des Loslassens der Kugel ist der Vorgang eine gmbBoA mit einer Beschleunigung von $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (freier Fall). Daraus folgt für die Fallstrecke bis zur Lichtschranke:

i. Bewegungstyp: gmbBoA.

ii. Gegeben: Geschwindigkeit $v = 3.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
Gesucht: Strecke s.

iii. Wir benutzen die zeitunabhängige Gleichung:

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(3.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.64595\,\mathrm{m}$$

Damit ergibt sich für die Starthöhe des Fallvorgangs:

$$h = 1.75\,\mathrm{m} + 0.64595\,\mathrm{m} = 2.39595\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{2.40\,\mathrm{m}}}$$

(b) Mit der unter (a) berechneten Gesamtfallstrecke bis zum Boden können wir die Aufprallgeschwindigkeit bestimmen:

i. Bewegungstyp: gmbBoA.

ii. Gegeben: Strecke $s = 2.39595\,\mathrm{m}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
Gesucht: Endgeschwindigkeit v.

iii. Wir benutzen erneut die zeitunabhängige Gleichung:

$$s = \frac{v^2}{2a} \quad \overset{\cdot 2a}{\Longleftrightarrow} \quad 2as = v^2 \quad \overset{\sqrt{\cdots}}{\Longleftrightarrow} \quad v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2.39595\,\mathrm{m}} = 6.856\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{6.86\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

(c) Mit den nunmehr bekannten Fallstrecken können wir zweimal auf genau die gleiche Weise die zugehörige Fallzeit berechnen:

- Zeit t_1 von ganz oben bis zur Lichtschranke ($0.64595\,\mathrm{m}$).
- Zeit t_2 von ganz oben bis zum Boden ($2.39595\,\mathrm{m}$).

Wir erhalten für die erste Fallzeit:

i. Bewegungstyp: gmbBoA.

ii. Gegeben: Strecke $s_1 = 0.64595\,\mathrm{m}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

iii. Wir verwenden zum Beispiel die erste Gleichung aus dem Gleichungsset, die die Zeit mit der Strecke verknüpft:

$$s_1 = \frac{a}{2}\,t_1^2 \quad \overset{\cdot\frac{2}{a}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{2s_1}{a} = t_1^2 \quad \overset{\sqrt{\cdots}}{\Longleftrightarrow} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.64595\,\mathrm{m}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0.3629\,\mathrm{s}$$

Und ebenso folgt für die zweite Fallzeit:

i. Bewegungstyp: gmbBoA.

ii. Gegeben: Strecke $s_2 = 2.39595\,\mathrm{m}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

iii. Wir brauchen nicht mehr nochmals umzuformen:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2s_2}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.39595\,\mathrm{m}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0.6989\,\mathrm{s}$$

Nun folgt für den Zeitunterschied, also für die Fallzeit von der Lichtschranke bis zum Boden:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0.6989\,\mathrm{s} - 0.3629\,\mathrm{s} = 0.3360\,\mathrm{s} \simeq \underline{\underline{0.336\,\mathrm{s}}}$$

Bei der Berechnung der beiden Fallzeiten hätten wir natürlich auch eine andere Gleichung verwenden können. Z.B. kennen wir ja die Geschwindigkeit bei der Lichtschranke und aus (b) ebenso die Aufprallgeschwindigkeit auf dem Boden. Damit lassen sich die beiden Fallzeiten genauso gut berechnen:

$$v_1 = a t_1 \quad \overset{:a}{\Longleftrightarrow} \quad t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{3.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.3629\,\mathrm{s}$$

$$v_2 = a t_2 \quad \overset{:a}{\Longleftrightarrow} \quad t_2 = \frac{v_2}{a} = \frac{6.856\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.6989\,\mathrm{s}$$

Wiederum ergibt sich $\Delta t = t_2 - t_1 = 0.6989\,\mathrm{s} - 0.3629\,\mathrm{s} = 0.3360\,\mathrm{s} \simeq \underline{\underline{0.336\,\mathrm{s}}}$.

(d) Eine Geschwindigkeit kann nicht direkt gemessen werden. Vielmehr muss ermittelt werden, zu welchem Zeitpunkt t_1 die Kugel an einem ersten Ort s_1 ankommt und wann (t_2) ein zweiter Ort s_2 erreicht wird. Aus diesen Daten, die eben mit Lichtschranken erhoben werden, kann dann die Geschwindigkeit berechnet werden:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Natürlich berechnet man auf diese Weise eigentlich die Durchschnittsgeschwindigkeit der Kugel zwischen den beiden Lichtschranken. Soll dies in guter Näherung einer Momentangeschwindigkeit entsprechen, so müssen die beiden Lichtschranken sehr nahe beieinander platziert werden. Vorraussetzung ist aber auch, dass die Zeitmessung sehr präzise ist! Der Zeitunterschied Δ zwischen den beiden Lichtschrankenunterbrüchen muss sehr genau erfasst werden können, sonst ist die Messung wertlos.

3. *Misslungene Schlüsselübergabe*

(a) Der senkrechte Wurf ist in der Zeit symmetrisch bezüglich dem höchsten Punkt. Gehen wir von einem vernachlässigbaren Luftwiderstand aus, so dauert der Aufstieg des Schlüssels von Sandras Hand bis zum toten Punkt gleich lange wie der Fall des Schlüssels vom toten Punkt in Sandras Hände. Demzufolge beträgt die Fallzeit $t = \frac{2.9\,\mathrm{s}}{2} = 1.45\,\mathrm{s}$ und wir können bei der Frage (a) von einer gmbBoA ausgehen.

i. Bewegungstyp: gmbBoA.
ii. Geg.: Zeit $t = 1.45\,\mathrm{s}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
Ges.: Strecke s.
iii. $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot (1.45\,\mathrm{s})^2 = 10.31\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{10\,\mathrm{m}}}$.

(b) Sandras Abwurfgeschwindigkeit ist vom Betrag her ebenfalls dieselbe, mit welcher der Schlüssel nach dem Flug auch wieder in ihren Händen landet. Somit können wir uns das Rechnen auch hier leicht machen:

i. Bewegungstyp: gmbBoA.
ii. Geg.: Zeit $t = 1.45\,\mathrm{s}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
Ges.: Geschwindigkeit v.
iii. $v = a \cdot t = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1.45\,\mathrm{s} = 14.22\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

(c) Die Gesamthöhe betrug $10.31\,\mathrm{m}$. Der Schlüssel fällt vom toten Punkt aus in einer gmbBoA herunter. Dabei entsprechen $3.7\,\mathrm{m}$ über der Abwurföhe einer Fallstrecke von $s = 10.31\,\mathrm{m} - 3.7\,\mathrm{m} = 6.61\,\mathrm{m}$. Haben wir uns dies erst einmal klar gemacht, ist der Rest nicht mehr schwierig:

i. Bewegungstyp: gmbBoA.
ii. Gegeben: Strecke $s = 6.61\,\mathrm{m}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
Gesucht: Geschwindigkeit v.
iii. Wieder ist es die zeitunabhängige Gleichung, die diese Grössen miteinander verknüpft:

$$s = \frac{v^2}{2a} \quad \overset{\cdot 2a}{\Longleftrightarrow} \quad 2as = v^2 \quad \overset{\sqrt{\cdots}}{\Longleftrightarrow} \quad v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 6.61\,\mathrm{m}} = 11.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

4. **Schwieriger:** *Nochmals zum* $100\,\mathrm{m}$*-Sprint (vgl. Serie 1, Aufgabe 3)*

   Die Bewegung ist in zwei Abschnitte zu unterteilen. Da wir zu keinem der beiden Abschnitte von Beginn an genügend Informationen haben um "den Rest" dazu zu berechnen, ist es angebracht formal zu rechnen und zu schauen, wie sich die Fragen aus der Kombination beider Abschnitte beantworten lassen. Machen wir uns zunächst einzelne Notizen zu den beiden Abschnitten:

   Abschnitt 1 (gmbBoA): Es gelten die vier Bewegungsgleichungen $s_1 = \frac{a}{2}\,t_1^2$, $v = a\,t_1$, $s_1 = \frac{v^2}{2a}$ und $s_1 = \frac{v\,t_1}{2}$. Dabei ist s_1 die im Abschnitt 1 zurückgelegte Strecke und t_1 die dafür benötigte Zeit. v ist die Endgeschwindigkeit nach der Zeit t_1. Dies ist die gesuchte Spitzengeschwindigkeit, mit der Elaine Thompson-Herah auch den gesamten Abschnitt 2 unterwegs gewesen sein soll. Die Beschleunigung a im ersten Abschnitt braucht keine Nummerierung, denn in Abschnitt 2 wird ja nicht beschleunigt.

   Zudem wissen wir (neue Angabe), dass $t_1 = \frac{t}{4}$, wobei t die Gesamtzeit des Vorganges bezeichnet.

   Abschnitt 2 (gfB): Es gilt $s_2 = v\,t_2$. Nun sind s_2 und t_2 die im Abschnitt 2 zurückgelegte Strecke resp. die dafür benötigte Zeit.

   Die Angaben in der Aufgabenstellung beziehen sich auf die Gesamtstrecke s resp. auf die Gesamtzeit t. Es gilt:

$$s = s_1 + s_2 = 1\,\underline{0}\,\underline{0}\,\mathrm{m} \qquad \text{und} \qquad t = t_1 + t_2 = 10.54\,\mathrm{s}$$

   Um damit etwas anzufangen, müssen wir die oben gefundenen Gleichungen in eine dieser beiden Gleichungen einsetzen. Dabei soll v vorkommen, a hingegen nicht, denn wir können keine weitere Unbekannte brauchen. Ich nehme beispielsweise die erste Gleichung und ersetze darin s_1 und s_2 wie folgt:

$$s = s_1 + s_2 = \frac{v\,t_1}{2} + v\,t_2 = v \cdot \left(\frac{t_1}{2} + t_2\right)$$

   Mit Hilfe der Zeitgleichung kann ich t_2 durch t_1 ersetzen ($t_2 = t - t_1$) und erhalte:

$$s = v \cdot \left(\frac{t_1}{2} + t - t_1\right) = v \cdot \left(t - \frac{t_1}{2}\right)$$

   Nun kommt die letzte Angabe ins Spiel: $t_1 = \frac{t}{4}$. Das setzen wir ein:

$$s = v \cdot \left(t - \frac{\frac{t}{4}}{2}\right) = v \cdot \left(t - \frac{t}{8}\right) = v \cdot \frac{7t}{8}$$

   Jetzt gibt es in der Gleichung nur noch die Unbekannte v und wir können nach ihr auflösen:

$$v = \frac{8s}{7t} = \frac{8 \cdot 100\,\mathrm{m}}{7 \cdot 10.54\,\mathrm{s}} = 10.843\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{10.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

   Die Beschleunigungszeit zu bestimmen ist wesentlich einfacher, denn aus der zusätzlichen Angabe folgt direkt:

$$t_1 = \frac{t}{4} = \frac{10.54\,\mathrm{s}}{4} = 2.635\,\mathrm{s}$$

   Damit kann leicht auf die Beschleunigung im ersten Abschnitt geschlossen werden:

$$a = \frac{v}{t_1} = \frac{10.843\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2.635\,\mathrm{s}} = 4.11499\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \simeq \underline{\underline{4.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

5. **Schwieriger:** *Zurück zu Franz und seinem Brunnen (vgl. Serie 2, Aufgabe 4)*

Die $2.70\,\mathrm{s}$ sind die Gesamtzeit für die Fallbewegung des Steins und die gleichförmige Bewegung des Schalls, der vom Grund des Brunnens nach oben aufsteigen muss, damit Franz das Plumpsen hört. Diese Gesamtzeit können wir aus zwei Teilen zusammensetzen, wobei das Fallen des Steins einer gmbBoA mit Beschleunigung $a = g$ und das Aufsteigen des Schalls einer gfB mit Geschwindigkeit $v = v_{\mathrm{Schall}}$ entspricht:

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2s}{g}} + \frac{s}{v}$$

Diese Gleichung gilt es nach der gesuchten Strecke s aufzulösen. Das fällt nicht ganz leicht, weil s sowohl unter, wie auch ausserhalb der Wurzel auftritt. Mathematisch musst du diese Gleichung derzeit noch nicht selbständig lösen können. Ich zeige hier aber einfach mal vor, wie sich das machen liesse...

$$\begin{aligned}
& t = \sqrt{\frac{2s}{g}} + \frac{s}{v} && | -\frac{s}{v} \\
\Leftrightarrow \quad & t - \frac{s}{v} = \sqrt{\frac{2s}{g}} && | (\ldots)^2 \\
\Rightarrow \quad & \left(t - \frac{s}{v}\right)^2 = \frac{2s}{g} && | \text{ausmultiplizieren} \\
\Leftrightarrow \quad & t^2 - \frac{2s\,t}{v} + \frac{s^2}{v^2} = \frac{2s}{g} && | -\frac{2s}{g} \\
\Leftrightarrow \quad & t^2 - \frac{2s\,t}{v} + \frac{s^2}{v^2} - \frac{2s}{g} = 0 && | \text{umgruppieren und } s \text{ ausklammern} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{s^2}{v^2} - \left(\frac{2t}{v} + \frac{2}{g}\right) \cdot s + t^2 = 0 && | \cdot (v^2\,g) \\
\Leftrightarrow \quad & g \cdot s^2 - 2v\,(g\,t + v) \cdot s + t^2\,v^2\,g = 0
\end{aligned}$$

Die Unbekannte in dieser Gleichung ist s. Wir sehen, dass das s in dieser Gleichung im ersten Term $a \cdot s^2$ quadratisch vorkommt. Man spricht deshalb von einer **quadratischen Gleichung**. Unsere Umformungen haben diese Gleichung auf die Form $a \cdot s^2 + b \cdot s + c = 0$ gebracht (mit $a = g$, $b = -2v\,(g\,t + v)$ und $c = t^2\,v^2\,g$). Dies ist die sogenannte **Normalform der quadratischen Gleichung**. Wie du in der Mathematik gezeigt bekommen wirst, werden die beiden möglichen Lösungen dieser Gleichung durch die da und dort als **Mitternachtsformel** bezeichnete Gleichung beschrieben:

$$s_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textbf{Mitternachtsformel}$$

Das $\pm$ erzeugt zwei Lösungen, einmal mit $+\sqrt{\ldots}$ und einmal mit $-\sqrt{\ldots}$ im Zähler.
Setzen wir hier unsere Ausdrücke für a, b und c ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
s_{1/2} &= \frac{2gtv + 2v^2 \pm \sqrt{\big(-2v(gt+v)\big)^2 - 4g \cdot t^2v^2g}}{2g} = \frac{2gtv + 2v^2 \pm \sqrt{4v^2(g^2t^2 + 2gtv + v^2) - 4g^2t^2v^2}}{2g} \\
&= \frac{2gtv + 2v^2 \pm \sqrt{4v^2(g^2t^2 + 2gtv + v^2 - g^2t^2)}}{2g} = \frac{2gtv + 2v^2 \pm \sqrt{4v^2(2gtv + v^2)}}{2g} \\
&= \frac{2gtv + 2v^2 \pm 2v\sqrt{2gtv + v^2}}{2g} = \frac{gtv + v^2 \pm v\sqrt{2gtv + v^2}}{g} = \frac{v}{g} \cdot \left(gt + v \pm \sqrt{v(2gt + v)}\right)
\end{aligned}$$

Endlich können wir Zahlenwerte einsetzen:

$$\begin{aligned}
s_{1/2} &= \frac{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \cdot \left(9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2.70\,\mathrm{s} + 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm \sqrt{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\left(2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2.70\,\mathrm{s} + 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}\right) \\
&= 34.66\,\mathrm{s} \cdot \left(366.49\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm 365.53\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 33.32\,\mathrm{m} \quad \text{oder} \quad 25\,372\,\mathrm{m} \approx 25.4\,\mathrm{km}
\end{aligned}$$

Offensichtlich kommt nur die erste Lösung in Frage und somit lautet das richtige Resultat $s \simeq \underline{\underline{33.3\,\mathrm{m}}}$.
Die zweite Lösung gibt es eigentlich gar nicht! Sie ist künstlich erzeugt worden, und zwar genau in dem Moment, wo in den Umformungen weiter oben von der zweiten zur dritten Zeile quadriert wurde. Dadurch wurde nämlich zusätzlich die Möglichkeit eingebaut, dass nun $t - \frac{s}{v}$ auch gleich $-\sqrt{\frac{2s}{g}}$ sein kann. Genau so ist die falsche Lösung ins Spiel gekommen.